

فرض الفصل الأول في مادة الرياضيات -01-

التمرين الأول :

نعتبر كثير الحدود $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - 15x + 18$ حيث :

1. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $P(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$.
3. عين إشارة $P(x)$ ، ثم استنتج في $\mathbb{R}$ مجموعة حلول المتراجحة $P(x) \leq 0$.
4. استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة : $4x\sqrt{x} - 4x - 15\sqrt{x} + 18 = 0$.

التمرين الثاني:

(I) لتكن f_m دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على $\mathbb{R}$ بإيلي : $f_m(x) = mx^2 - 2x + 1$ حيث m وسيط حقيقي وليكن (C_{f_m}) المنحنى الممثل للدالة في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- عين قيمة m بحيث المنحنى (C_{f_m}) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين متمايزتين.

(II) نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بإيلي $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بين أن عبارة الدالة f تكتب على الشكل : $f(x) = -(x+1)^2 + 2$.
 2. فكك f إلى مركب دالتين يطلب تعيينها.
 3. استنتج أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; -1]$.
 4. أرسم (C_f) التمثيل البياني للدالة f انطلاقاً من التمثيل البياني لدالة مرجعية يطلب تعيينها.
 5. بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ محور تناظر لـ (C_f) .
- (III) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^2 - 2|x| - 1$ وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوى السابق.

1. بين أن g دالة زوجية.
2. من أجل $x \in]-\infty; 0]$ احسب $g(x) + f(x)$.
3. استنتج كيفية تمثيل (C_g) انطلاقاً من (C_f) ثم مثله.

التمرين الأول (07 نقاط):

نعتبر كثير الحدود $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - 15x + 18$ حيث $P(x)$: حيث

1. برهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $P(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب

تعيينها..... (1,5)

باستعمال خوارزمية هورنر نجد

	4	-4	-15	18
-2		-8	24	-18
	4	-12	9	0

ومنه $P(x) = (x+2)(4x^2 - 12x + 9)$ إذن $a = 4$ ، $b = -12$ و $c = 9$.

يمكن استعمال القسمة الإقليدية أو النشر ثم المطابقة.

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$.

..... (1,5)

$P(x) = 0$ يكافئ $(x+2)(4x^2 - 12x + 9) = 0$ أو $(x+2) = 0$ أو $(4x^2 - 12x + 9) = 0$

لما $(x+2) = 0$ أي $x = -2$ ولما $(4x^2 - 12x + 9) = 0$ أي $\Delta = 0$ ومنه للمعادلة حل مضاعف في $\mathbb{R}$ $x = \frac{3}{2}$ ومنه $S = \left\{-2; \frac{3}{2}\right\}$

3. عين إشارة

..... (1,5)

x	$-\infty$	-2	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$(x+2)$	-	0	+	+
$(4x^2 - 12x + 9)$	+	+	0	+
$P(x)$	-	0	+	+

استنتاج في $\mathbb{R}$ مجموعة حلول المتراجحة $P(x) \leq 0$

..... (1,5)

ومنه $P(x) \leq 0$ لما $x \in]-\infty; -2]$ أو $x = \frac{3}{2}$ و عليه $S =]-\infty; -2] \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$

4. استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة :

..... (01)

المعادلة معرفة لما $D = [0; +\infty[$.

$4x\sqrt{x} - 4x - 15\sqrt{x} + 18 = 0$ يكافئ $4(\sqrt{x})^3 - 4(\sqrt{x})^2 - 15\sqrt{x} + 18 = 0$ بوضع $t = \sqrt{x}$ مع $t > 0$ تصبح

$$4t^3 - 4t^2 - 15t + 18 = 0$$

ومن السؤال 2. نجد $t = -2$ (مرفوض لأن $t > 0$) أو $t = \frac{3}{2}$ وعليه $\sqrt{x} = \frac{3}{2}$ إذن $x = \frac{9}{4}$ وعليه $S = \left\{ \frac{9}{4} \right\}$.

التمرين الثاني (13 نقطة):

(I) تعيين قيمة m بحيث المنحنى (C_{f_m}) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين متمايزتين.

..... (1,5)

(C_{f_m}) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين متمايزتين معناه للمعادلة $f_m(x) = 0$ حلان مختلفان في $\mathbb{R}$ أي $mx^2 - 2x + 1 = 0$ مع $m \neq 0$

أي $\Delta > 0$ لدينا $\Delta = 4 - 4m$ ومنه $4 - 4m > 0$ أي $-4m > -4$ ومنه $m < 1$ إذن قيم المطلوبة هي $m \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[$.

(II) نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بإيلي $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تبيان أن عبارة الدالة f تكتب على الشكل: $f(x) = -(x+1)^2 + 2$.

..... (1,5)

$$-(x+1)^2 + 2 = -(x^2 + 2x + 1) + 2 = -x^2 - 2x - 1 + 2 = -x^2 - 2x + 1 = f(x)$$

2. تفكيك f إلى مركب دالتين يطلب تعيينها.

..... (1,5)

$$\begin{cases} u(x) = x + 1 \\ v(x) = -x^2 + 2 \end{cases} \text{ حيث } f : x \xrightarrow{u} x + 1 \xrightarrow{v} -(x+1)^2 + 2 \\ f = v \circ u$$

3. استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; -1]$.

..... (1,5)

لدينا $f = v \circ u$ والدالة u متزايدة تماما على المجال $]-\infty; -1]$ وعلما أنه من أجل كل $x \in]-\infty; -1]$ نجد أن $x + 1 \in]-\infty; 0]$

وعليه $u(x) \in]-\infty; 0]$ أي الدالة u متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; -1]$.

4. أرسم (C_f) التمثيل البياني للدالة f انطلاقا من التمثيل البياني لدالة مرجعية يطلب تعيينها.

..... (1,5)

لدينا $f(x) = -(x+1)^2 + 2$ ومنه (C_f) صورة منحنى الدالة $h : x \rightarrow -x^2$ بانسحاب شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (يمكن كتابة f على الشكل $f(x) = h(x+1) + 2$)

(

أو يمكن استعمال طريقة أخرى وذلك بكتابة f على الشكل: $f(x) = -[(x+1)^2 - 2]$.

5. تبين أن المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ محور تناظر لـ (C_f) (1,5)

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ نجد $-2 - x \in \mathbb{R}$

$$f(-2-x) = -(-x-2+1)^2 + 2 = -(-x-1)^2 + 2 = -(-(x+1))^2 + 2 = -(x+1)^2 + 2 = f(x)$$

أو يمكن الاستعانة بدساتير تغيير المعلم.

6. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^2 - 2|x| - 1$ وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوى السابق.

أ. تبين أن g دالة زوجية. (1,5)

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ نجد $-x \in \mathbb{R}$ و $g(-x) = (-x)^2 - 2|-x| - 1 = x^2 - 2|x| - 1 = g(x)$ و.ه.م

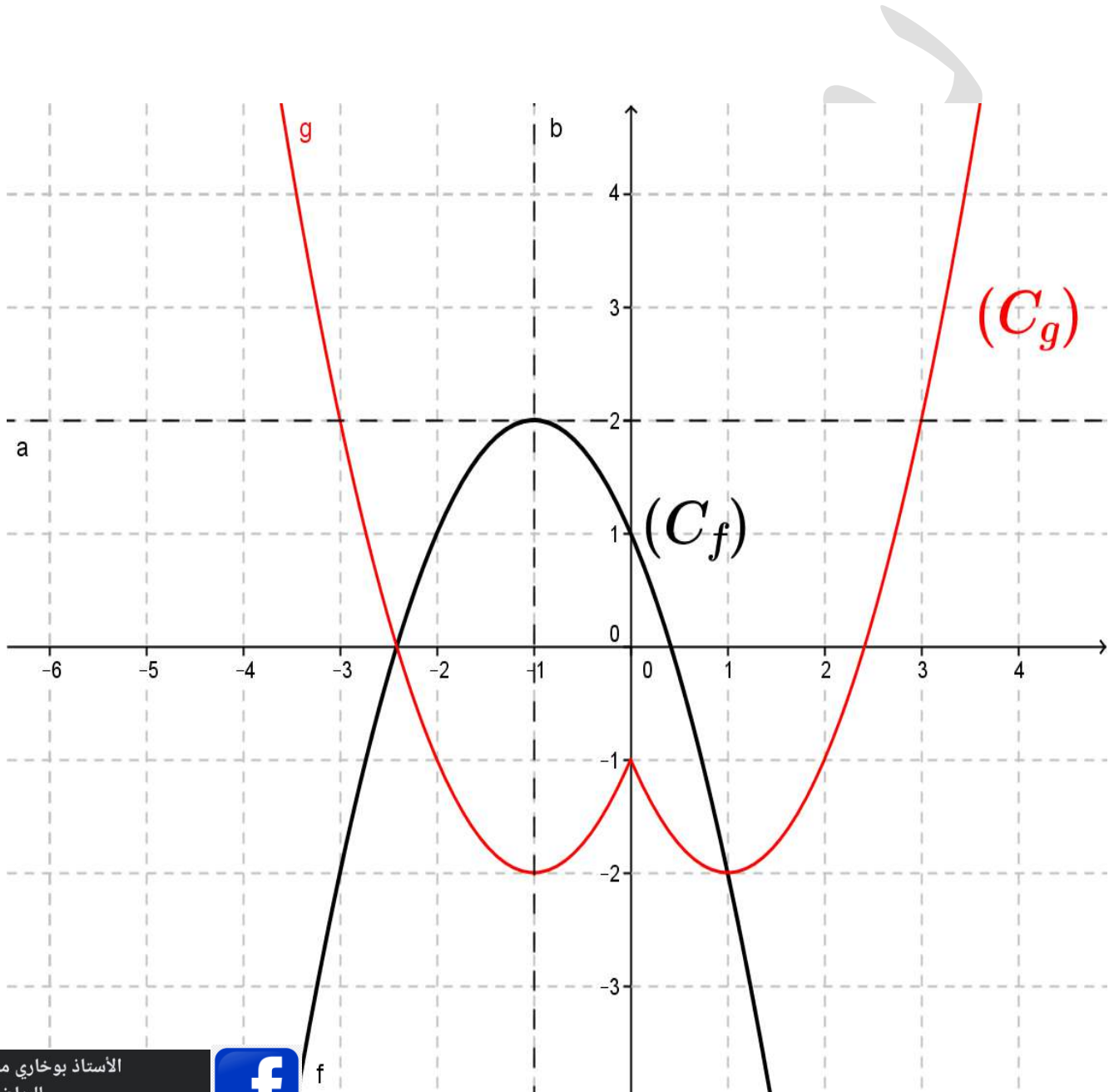
ب. من أجل $x \in]-\infty; 0]$ حساب $g(x) + f(x)$ (01)

$$x \in]-\infty; 0] \cup |x| = -x \text{ لأن } g(x) + f(x) = (x^2 - 2|x| - 1) + (-x^2 - 2x + 1) = -2|x| - 2x = 2x - 2x = 0$$

ت. استنتج كيفية تمثيل (C_g) انطلاقاً من (C_f) (01)

من أجل $x \in]-\infty; 0]$ وجدنا أن $g(x) + f(x) = 0$ أي $g(x) = -f(x)$ وعليه (C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل على المجال $]-\infty; 0]$ ونكمل التمثيل البياني على المجال $[0; +\infty[$ بالتناظر بالنسبة إلى حامل محور الترتيب لأن الدالة g زوجية.

رسم (C_g) (0,5)



فرض الفصل الأول في مادة الرياضيات-02-

تمرين:

(I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بإيلي: $f(x) = x^2 + 2x + a$ حيث a عدد حقيقي و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة في

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. عين قيمة a علما أن I جذر لكثير الحدود $f(x)$.

2. نعتبر فيما يأتي أن $a = -3$.

أ. بين أن عبارة الدالة f تكتب على الشكل: $f(x) = (x + I)^2 - 4$.

ب. فكك f إلى مركب دالتين يطلب تعيينهما.

ت. ادرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $[-1; +\infty[$ و المجال $]-\infty; -1]$.

3. أرسم (C_f) التمثيل البياني للدالة f انطلاقا من التمثيل البياني لدالة مرجعية يطلب تعيينها.

4. بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ محور تناظر لـ (C_f) .

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^2 + 2|x| - 2$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي السابق.

1. بين أن g دالة زوجية.

2. بين أنه من أجل كل $x \in [0; +\infty[$: $g(x) = f(x) + 1$.

3. استنتج كيفية تمثيل (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم مثله في المعلم السابق.

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

1. احسب $h(-2)$ ماذا تستنتج؟

2. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$ حيث a, b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $h(x) = 0$.

4. عين إشارة $h(x)$ ، ثم استنتج في $\mathbb{R}$ مجموعة حلول المتراجحة $h(x) \leq 0$.

5. استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة: $x^6 + 4x^4 + x^2 - 6 = 0$.

حل فرض الفصل الأول في مادة الرياضيات-02-

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = x^2 + 2x + a$ حيث a عدد حقيقي وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة في المستوى المنسوب

إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تعين قيمة a علماً أن I جذر لكثير الحدود $f(x)$: (01)

$$I \text{ جذر لكثير الحدود } f(x) \text{ معناه } f(I) = 0 \text{ معناه } (I)^2 + 2(I) + a = 0 \text{ معناه } a = -3$$

2. نعتبر فيما يأتي أن $a = -3$

أ. تبين أن عبارة الدالة f تكتب على الشكل: $f(x) = (x+1)^2 - 4$: (01)

$$(x+1)^2 - 4 = x^2 + 2x + 1 - 4 = x^2 + 2x - 3 = f(x)$$

ب. تفكيك f إلى مركب دالتين يطلب تعيينهما.: (1,5)

$$\begin{cases} u(x) = x+1 \\ v(x) = x^2 - 4 \text{ ومنه } f(x) = (x+1)^2 - 4 \\ f = v \circ u \end{cases}$$

ت. دراسة اتجاه تغير الدالة f : (02)

• على المجال $[-1; +\infty[$:

لدينا الدالة u متزايدة تماماً على المجال $[-1; +\infty[$

ومن أجل كل $x \in [-1; +\infty[$ نجد $u(x) \in [0; +\infty[$ ومنه الدالة v متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$

ومنه الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[-1; +\infty[$

• على المجال $]-\infty; -1]$:

لدينا الدالة u متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; -1]$

ومن أجل كل $x \in]-\infty; -1]$ نجد $u(x) \in]-\infty; 0]$ ومنه الدالة v متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$

ومنه الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; -1]$

3. أرسم (C_f) التمثيل البياني للدالة f انطلاقاً من التمثيل البياني لدالة مرجعية يطلب تعيينها.: (01)

$$\text{لدينا } f(x) = (x+1)^2 - 4 \text{ ومنه } (C_f) \text{ صورة منحنى الدالة مربع يانسحاب شعاعه } \vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

4. تبين أن المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ محور تناظر لـ (C_f) : $2a - x = -2 - x$: (1,5)

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $-2 - x \in \mathbb{R}$

$$f(2a - x) = f(-2 - x) = ((-2 - x) + 1)^2 - 4 = (-1 - x)^2 - 4 = (-(1 + x))^2 - 4 = (x + 1)^2 - 4 = f(x)$$

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^2 + 2|x| - 2$ وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوى السابق.

1. تبين أن g دالة زوجية.: (01)

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $-x \in \mathbb{R}$

$$g(-x) = (-x)^2 + 2|-x| - 2 = x^2 + 2|x| - 2 = g(x)$$

2. تبين أنه من أجل كل $x \in [0; +\infty[$: $g(x) = f(x) + 1$ (01)

من أجل كل $x \in [0; +\infty[$: $|x| = x$ ومنه

$$g(x) = x^2 + 2|x| - 2 = x^2 + 2x - 2 = x^2 + 2x - 3 + 1 = f(x) + 1$$

3. استنتج كيفية تمثيل (C_g) انطلاقاً من (C_f) ثم مثله. (02)

$$\text{لما } x \in [0; +\infty[: \text{صورة } (C_g) \text{ ينسحب شعاعه } \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (} \vec{v} = \vec{j} \text{)}$$

و بما أن g دالة زوجية نكمل التمثيل بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

1. حساب $h(-2)$: (01)

$$h(-2) = (-2)^3 + 4(-2)^2 + (-2) - 6 = 0$$

• نستنتج أن -2 جذر لكثير الحدود $h(x)$ (0,5)

2. برهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$ حيث a, b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها. ... (1,5)

$$h(x) = (x+2)(x^2 + 2x - 3) \text{ نجد}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases} \text{ أي } h(x) = (x+2)f(x) \text{ ومنه}$$

3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $h(x) = 0$: (1,5)

$$h(x) = 0 \text{ يكافئ } (x+2)f(x) = 0 \text{ يكافئ } x+2=0 \text{ أو } f(x)=0 \text{ يكافئ } x=-2 \text{ أو } x=1 \text{ أو } x=-3$$

$$\text{ومن } S = \{-3; -2; 1\}$$

4. تعيين إشارة $h(x)$: (1,5)

x	$-\infty$	-3	-2	1	$+\infty$
$x+2$	-	-	0	+	+
$x^2 + 2x - 3$	+	0	-	0	+
$h(x)$	-	0	+	0	+

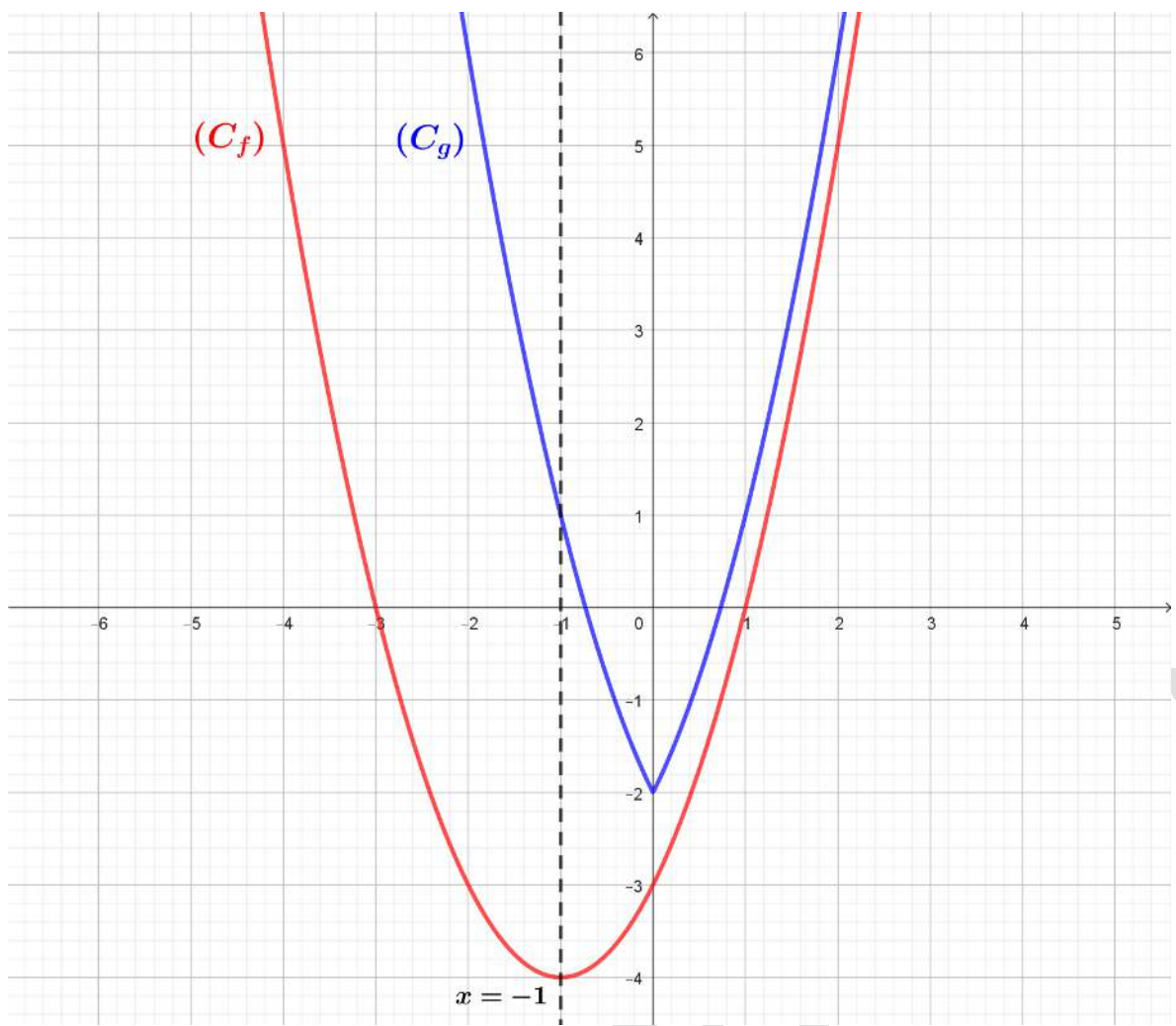
استنتاج في $\mathbb{R}$ مجموعة حلول المتراجحة $h(x) \leq 0$ (01)

$$h(x) \leq 0 \text{ لما } x \in]-\infty; -3] \cup [-2; 1] \text{ وعليه } S =]-\infty; -3] \cup [-2; 1]$$

5. استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة : $x^6 + 4x^4 + x^2 - 6 = 0$ (01)

$$x^6 + 4x^4 + x^2 - 6 = 0 \text{ يكافئ } (x^2)^3 + 4(x^2)^2 + (x^2) - 6 = 0 \text{ بوضع } t = x^2 \text{ مع } t \geq 0 \text{ تصبح } t^3 + 4t^2 + t - 6 = 0$$

ومن السؤال 5، نجد $t = -3$ أو $t = -2$ (مفروضين لأن $t \geq 0$) أو $t = 1$ وعليه $x^2 = 1$ إذن $x = 1$ أو $x = -1$ وعليه $S = \{-1; 1\}$.



فرض الفصل الأول في مادة الرياضيات-03-

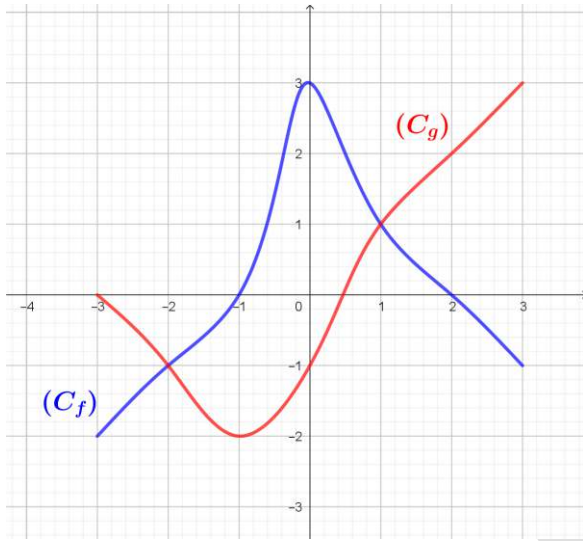
التمرين الأول :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على الترتيب بـ: $f(x) = \frac{8-3x}{2+\sqrt{3x-4}}$ و $g(x) = 2 - \sqrt{3x-4}$

- بين أن الدالتين f و g متساويتين.

التمرين الثاني :

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ليكن (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g كما هو موضح في الشكل المقابل:



1. عين $D_{g \circ f}$

2. عين كل من $(g \circ f)(0)$ ، $(g \circ f)(-1)$

و $(g \circ f \circ g)(-1)$

3. حل بيانيا المعادلتين : $(g \circ f)(x) = -1$ ،

$(f \circ g)(x) = -1$

4. حل بيانيا المتراجحتين:

$(f \circ g)(x) < -1$ ، $(g \circ f)(x) > -1$

التمرين الثالث :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ حيث: $f(x) = x + m + 1$ و $g(x) = mx + 1$

جد قيم العدد الحقيقي m التي تحقق: $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على الترتيب بـ: $f(x) = \frac{8-3x}{2+\sqrt{3x-4}}$ و $g(x) = 2 - \sqrt{3x-4}$

• تبين أن الدالتين f و g متساويتين:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x \in \left[\frac{4}{3}, +\infty \right[\end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{3x-4} \neq -2 \dots\dots\dots (*) \\ x \geq \frac{4}{3} \end{array} \right. \text{ العلاقة } (*) \text{ محققة مهما كان } x \in \mathbb{R} \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} 2 + \sqrt{3x-4} \neq 0 \\ 3x-4 \geq 0 \end{array} \right. \text{ أي الدالة معرفة } f \text{ لما}$$

$$D_f = \left[\frac{4}{3}, +\infty \right[\text{ أي } x \in \left[\frac{4}{3}, +\infty \right[$$

$$D_g = \left[\frac{4}{3}, +\infty \right[\text{ ومن جهة الدالة معرفة } g \text{ لما } 3x-4 \geq 0 \text{ أي } x \geq \frac{4}{3} \text{ أي } x \in \left[\frac{4}{3}, +\infty \right[\text{ ومنه } D_g = \left[\frac{4}{3}, +\infty \right[$$

$$D_f = D_g \dots\dots\dots (1) \text{ إذن}$$

ومن جهة :

$$g(x) = 2 - \sqrt{3x-4} = \frac{(2 - \sqrt{3x-4})(2 + \sqrt{3x-4})}{(2 + \sqrt{3x-4})} = \frac{(2)^2 - (\sqrt{3x-4})^2}{2 + \sqrt{3x-4}} = \frac{4 - (3x-4)}{2 + \sqrt{3x-4}} = \frac{8-3x}{2 + \sqrt{3x-4}} = f(x)$$

$$g(x) = f(x) \dots\dots\dots (2) \text{ إذن}$$

من (1) و (2) نستنتج أن الدالتين f و g متساويتين

التمرين الثاني :

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ليكن (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g كما هو موضح في الشكل المقابل:

1. تعين $D_{g \circ f}$

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x / x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} \\ &= \{x / x \in [-3; 3] \wedge f(x) \in [-3; 3]\} \\ &= \{x / x \in [-3; 3] \wedge -3 \leq f(x) \leq 3\} \\ &= \{x / x \in [-3; 3] \wedge x \in [-3; 3]\} \\ &= \{x / x \in [-3; 3]\} \end{aligned}$$

2. تعين كل من $(g \circ f)(-1)$ ، $(g \circ f)(0)$ و $(g \circ f \circ g)(-1)$:

$$(g \circ f)(-1) = g[f(-1)] = g(0) = -1$$

$$(g \circ f)(0) = g[f(0)] = g(3) = 3$$

$$(g \circ f \circ g)(-1) = g[f[g(-1)]] = g[f(-2)] = g(-1) = -2$$

3. حل بيانيا المعادلتين : $(g \circ f)(x) = -1$ ، $(f \circ g)(x) = -1$

✓ $(g \circ f)(x) = -1$ يكافئ $g[f(x)] = -1$ معناه تعيين فواصل نقاط تقاطع

$$(C_g) \text{ مع المستقيم ذو المعادلة } y = -1$$

$$\text{معناه } f(x) = 0 \text{ أو } f(x) = -2$$

$$f(x) = 0 \text{ معناه تعيين فواصل نقاط تقاطع } (C_f) \text{ مع المستقيم ذو المعادلة } y = 0 \text{ (محور الفواصل) لما } x = -1 \text{ أو } x = 2$$

$f(x) = -2$ معناه تعيين فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = -2$ لما $x = -3$

ومنه حلول المعادلة $(g \circ f)(x) = -1$ هي $S = \{-3; -1; 2\}$

✓ $(f \circ g)(x) = -1$ يكافئ $f[g(x)] = -1$ معناه تعيين فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = -1$

معناه $g(x) = 3$ أو $g(x) = -2$

$g(x) = 3$ معناه تعيين فواصل نقاط تقاطع (C_g) مع المستقيم ذو المعادلة $y = 3$ (محور الفواصل) لما $x = 3$

$g(x) = -2$ معناه تعيين فواصل نقاط تقاطع (C_g) مع المستقيم ذو المعادلة $y = -2$ لما $x = -1$

ومنه حلول المعادلة $(f \circ g)(x) = -1$ هي $S = \{-1; 3\}$

4. حل بيانيا المتراجحتين: $(g \circ f)(x) > -1$ ، $(f \circ g)(x) < -1$

✓ $(g \circ f)(x) > -1$ يكافئ $g[f(x)] > -1$ معناه تعيين فواصل نقاط تقاطع (C_g) الواقعة فوق المستقيم ذو المعادلة $y = -1$

معناه $-2 < f(x) \leq 3$ أو $-3 \leq f(x) < -2$

$-3 \leq f(x) < -2$ معناه تعيين فواصل نقاط تقاطع (C_f) الواقعة بين المستقيمين ذو المعادلتين $y = -3$ و $y = -2$ أي $S = \emptyset$

$0 < f(x) \leq 3$ معناه تعيين فواصل نقاط تقاطع (C_f) الواقعة بين المستقيمين ذو المعادلتين $y = 0$ و $y = 3$ أي $x \in]-1; 2[$

ومنه حلول المتراجحة $(g \circ f)(x) > -1$ هي $S =]-1; 2[$

✓ $(f \circ g)(x) < -1$ يكافئ $f[g(x)] > -1$ معناه تعيين فواصل نقاط تقاطع (C_f) الواقعة فوق المستقيم ذو المعادلة $y = -1$

معناه $-2 < g(x) < 3$

$-2 < g(x) < 3$ معناه تعيين فواصل نقاط تقاطع (C_g) الواقعة بين المستقيمين ذو المعادلتين $y = -2$ و $y = 3$ أي

$x \in [-3; -1[\cup]-1; 3[$

ومنه حلول المتراجحة $(f \circ g)(x) < -1$ هي $S = [-3; -1[\cup]-1; 3[$

حل التمرين الثالث :

نعتبر الدالتين f و g المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث: $f(x) = x + m + 1$ و $g(x) = mx + 1$

✓ إيجاد قيم العدد الحقيقي m التي تحقق: $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$

$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ يكافئ $g[f(x)] = f[g(x)]$ يكافئ $g[f(x)] + 1 = g(x) + m + 1$ يكافئ $m f(x) + 1$ يكافئ

$m(x + m + 1) + 1 = mx + 1 + m + 1$ يكافئ $mx + m^2 + m + 1 = mx + m + 2$ يكافئ $m^2 + 1 = 2$ يكافئ $m^2 = 1$ ومنه $m = 1$ أو

$m = -1$

فرض الفصل الأول في مادة الرياضيات-04-

التمرين الأول :

لتكن f الدالة المعرفة على $D =]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$ جزء من $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x}{2x-1}$

1. تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x من D لدينا : $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-1}$

2. من أجل كل عدد حقيقي x من D نضع : $h(x) = \frac{1}{2x-1}$.

• بين أن : $h = g \circ k$ حيث g هي الدالة "مقلوب" $(x \mapsto \frac{1}{x})$ ، و k دالة يطلب تعيينها

• عين اتجاه تغير الدالة h على كل من المجالين $]-\infty; \frac{1}{2}[$ ، $]\frac{1}{2}; +\infty[$ ثم استنتج عندئذ اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty; \frac{1}{2}[$ ، $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

4. بين أن النقطة $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f في معلم $(O, I; J)$.

5. حدّد طريقة لرسم (C_f) انطلاقاً من المنحنى البياني للدالة $(v : x \mapsto \frac{1}{4x})$ ، ثم أرسم (C_f) في معلم $(O, I; J)$.

(إرشاد : يمكن كتابة الدالة f على الشكل : $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x - \frac{1}{2}} \right)$).

6. بين أن الدالة p المعرفة على $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\}$ بـ : $p(x) = f(|x|)$ زوجية، وأن من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ و $x \neq \frac{1}{2}$

لدينا : $p(x) = f(x)$ ثم اشرح كيف يمكن رسم منحنى الدالة p ثم ارسمه.

التمرين الثاني :

ليكن $P_m(x)$ كثير حدود لمتغير حقيقي x و m وسيط حقيقي $p_m(x) = (2m-1)x^3 + (5m-5)x^2 + (4m-8)x + m-4$

1. بين أن -1 جذراً لـ $P_m(x)$ من أجل كل m من $\mathbb{R}$

2. عين $Q_m(x)$ بحيث من أجل كل حقيقي x فان : $P_m(x) = (x+1) \times Q_m(x)$

3. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $\frac{P_4(x)}{P_1(x)} \geq 0$

4. عين قيم m في كل حالة من الحالات التالية :

• للمعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل ثلاث حلول متميزة في $\mathbb{R}$.

• للمعادلة $P_m(x) = 0$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$.

• للمعادلة $P_m(x) = 0$ ثلاث حلول في $\mathbb{R}$. من نفس الإشارة.

• للمعادلة $P_m(x) = 0$ ثلاث حلول في $\mathbb{R}$ ، حلاً منها متعاكسان في الإشارة.

التمرين الأول : لتكن f الدالة المعرفة على $D =]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$ جزء من $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x}{2x-1}$

1. تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x من D لدينا : $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-1}$

$$\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-1} = \frac{\frac{1}{2}(2x-1) + \frac{1}{2}}{2x-1} = \frac{x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2x-1} = \frac{x}{2x-1} = f(x)$$

2. من أجل كل عدد حقيقي x من D نضع : $h(x) = \frac{1}{2x-1}$

• تبين أن : $h = g \circ k$ حيث g هي الدالة "مقلوب" ($x \mapsto \frac{1}{x}$)، و k دالة يطلب تعيينها

$$h = g \circ k \text{ و } g(x) = \frac{1}{x} \text{ و } k(x) = 2x-1 \text{ وعليه } h: x \xrightarrow{k} 2x-1 \xrightarrow{g} \frac{1}{2x-1}$$

• تعيين اتجاه تغير الدالة h على كل من المجالين $]-\infty; \frac{1}{2}[$ ، $]\frac{1}{2}; +\infty[$

أ- على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}[$: الدالة $k: x \rightarrow 2x-1$ متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}[$ لأن $a = 2 > 0$

ولدينا من أجل كل $x \in]-\infty; \frac{1}{2}[$ نجد $2x-1 \in]-\infty; 0[$ وعليه الدالة $g: x \rightarrow \frac{1}{x}$ متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 0[$

وعليه الدالة $h = g \circ k$ متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}[$

ب- على المجال $]\frac{1}{2}; +\infty[$: الدالة $k: x \rightarrow 2x-1$ متزايدة تماماً على المجال $]\frac{1}{2}; +\infty[$ لأن $a = 2 > 0$

ولدينا من أجل كل $x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$ نجد $2x-1 \in]0; +\infty[$ وعليه الدالة $g: x \rightarrow \frac{1}{x}$ متناقصة تماماً على المجال $]0; +\infty[$

وعليه الدالة $h = g \circ k$ متناقصة تماماً على المجال $]\frac{1}{2}; +\infty[$

✓ استنتج عندئذ اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty; \frac{1}{2}[$ ، $]\frac{1}{2}; +\infty[$: لدينا $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} h(x)$

بما أن الدالة h متناقصة على المجالين $]-\infty; \frac{1}{2}[$ ، $]\frac{1}{2}; +\infty[$ فإن الدالة $\frac{1}{2} h$ ($\frac{1}{2} > 0$) تبقى متناقصة على المجالين $]-\infty; \frac{1}{2}[$ ، $]\frac{1}{2}; +\infty[$ و

عليه فالدالة $f = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} h$ متناقصة تماماً على المجالين $]-\infty; \frac{1}{2}[$ ، $]\frac{1}{2}; +\infty[$

4. بين أن النقطة $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ مركز تناظر للمنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم $(O, I; J)$.

من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ أي $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ يكافئ $1-x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ وعليه $2a-x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$$f(2a-x) + f(x) = f(1-x) + f(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2(1-x)-1} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-1} \right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1-2x} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-1} \right)$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1-2x} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-1} = 2 + \frac{\frac{1}{2}}{-(2x-1)} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-1} = 1 = 2 \left(\frac{1}{2} \right) = 2b$$

3. تحديد طريقة لتمثيل (C_f) ، ثم تمثيل (C_f) في معلم $(O, I; J)$.

لدينا $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x - \frac{1}{2}} \right)$ يكافئ $f(x) = \frac{1}{2} + l\left(x - \frac{1}{2}\right)$ حيث $l(x) = \frac{1}{4x}$ و عليه (C_f) صورة منحنى الدالة $x \rightarrow \frac{1}{4x}$ بانسحاب

شعاعه $\vec{v} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$.

5. تبين أن الدالة p المعرفة على $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2}; \frac{-1}{2} \right\}$ بـ: $p(x) = f(|x|)$ زوجية: لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2}; \frac{-1}{2} \right\}$ نجد $-x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2}; \frac{-1}{2} \right\}$

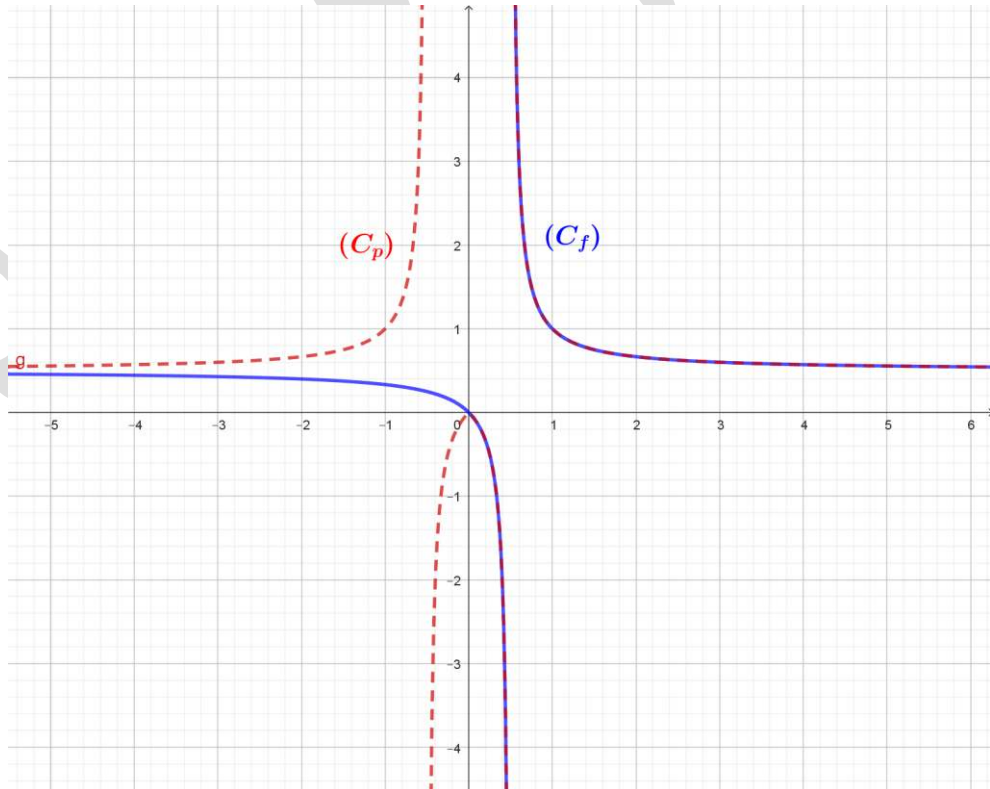
$$p(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = p(x)$$

ومنه الدالة p المعرفة على $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2}; \frac{-1}{2} \right\}$ بـ: $p(x) = f(|x|)$ زوجية

• تبين أن من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ و $x \neq \frac{1}{2}$ لدينا: $p(x) = f(x)$ ثم اشرح كيف يمكن رسم منحنى الدالة p ثم ارسمه.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ و $x \neq \frac{1}{2}$ و $|x| = x$ ومنه يكون لدينا: $p(x) = f(|x|) = f(x)$

ومنه (C_p) منحنى الدالة ينطبق على (C_f) من أجل $x \geq 0$ و $x \neq \frac{1}{2}$ وبما أن الدالة p زوجية نكمل التمثيل بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب



التمرين الثاني: ليكن $P_m(x)$ كثير حدود لمتغير حقيقي x وسيط حقيقي m و $p_m(x) = (2m-1)x^3 + (5m-5)x^2 + (4m-8)x + m-4$

1. عين $Q_m(x)$ بحيث من أجل كل حقيقي x فان: $P_m(x) = (x+1) \times Q_m(x)$ باستعمال القسمة الاقليدية أو خوارزمية هورنر نجد :

$$Q_m(x) = (2m-1)x^2 + (3m-4)x + m-4 \text{ إذن } P_m(x) = (x+1)[(2m-1)x^2 + (3m-4)x + m-4]$$

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\frac{P_4(x)}{P_1(x)} \geq 0$

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1-\sqrt{13}}{2}; -1; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right\} \text{ وعليه } P_1(x) = (x+1)[x^2 - x - 3] \neq 0 \text{ أي } P_1(x) \neq 0 \text{ المتراجحة معرفة لما } \frac{P_4(x)}{P_1(x)} \geq 0$$

$$\frac{P_4(x)}{P_1(x)} = \frac{(x+1)[7x^2 + 8x]}{(x+1)[x^2 - x - 3]} = \frac{7x^2 + 8x}{x^2 - x - 3}$$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$	$-\frac{8}{7}$	-1	0	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$
$7x^2 + 8x$	+	+	0	-	-	0	+
$x^2 - x - 3$	+	-	-	-	-	-	+
$\frac{P_4(x)}{P_1(x)}$	+	-	0	+	+	0	-

$$x \in \left] -\infty; \frac{1-\sqrt{13}}{2} \right[\cup \left[\frac{-7}{8}; -1 \right[\cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}; +\infty \right[\text{ و } \frac{P_4(x)}{P_1(x)} \geq 0$$

5. تعيين قيم m في كل حالة من الحالات التالية: أ) للمعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل ثلاث حلول متمايزة في $\mathbb{R}$.

$P_m(x) = 0$ تقبل ثلاث حلول متمايزة في $\mathbb{R}$ أي للمعادلة $Q_m(x) = 0$ حلان مختلفان في $\mathbb{R}$ مع $2m-1 \neq 0$ أي من أجل $m \neq \frac{1}{2}$ و $\Delta > 0$ أي

$$m \in \left] -\infty; -12 \right[\cup \left] 0; \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ و } \Delta > 0 \text{ أي } \Delta = (3m-4)^2 - 4(2m-1)(m-4) = m^2 + 12m$$

m	$-\infty$	-12	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Δ	+	0	-	0	+

ب) للمعادلة $P_m(x) = 0$ حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

أي المعادلة $Q_m(x) = 0$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$ وعليه $\Delta < 0$ ومنه $m \in]-12; 0[$

• للمعادلة $P_m(x) = 0$ ثلاث حلول في $\mathbb{R}$ ، حلان منها متعاكسان في الإشارة.

$$\text{أي } \Delta > 0 \text{ و } P = \frac{c}{a} = \frac{m-4}{2m-1} > 0 \text{ و } S = \frac{-b}{a} = \frac{-(3m-4)}{2m-1} > 0 \text{ (حلان موجبان وحل سالب هو -1)}$$

$$\text{أو } \Delta > 0 \text{ و } P = \frac{c}{a} = \frac{m-4}{2m-1} < 0 \text{ (حلان مختلفان في الإشارة وحل سالب هو -1)}$$

m	$-\infty$	-12	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	4	$+\infty$
$-b = -3m + 4$	+	+	+	+	0	-	-
$c = m - 4$	-	-	-	-	-	0	+
$a = 2m - 1$	-	-	-	+	+	+	+
P	+	+	+	-	-	0	+
S	-	-	-	+	0	-	-
Δ	+	0	-	0	+	+	+

$$m \in \left] \frac{1}{2}; 4 \right[\text{ وعليه}$$