

☆ مسائل شاملة حول الاحتمالات مع الحل ☆

يوم : 2022

المستوى: الثالثة شعب علمية

☆ تمرين ☆ السحب من صندوقين

يحتوي صندوق U_1 على سبع كريات منها خمس حمراء مرقمة بـ 1، 1، 1، 2، 0 و كرتين خضراوين مرقمة بـ 1، 0 . ويحتوي صندوق U_2 على سبع كريات منها ثلاث حمراء مرقمة بـ 2، 2، 1 و أربع خضراء مرقمة بـ 2، 1، 0، 0 . (الكرات لا نفرق بينها باللمس)

(I) نرمي زهر نرد غير مزيف ذا ستة اوجه مرقمة من 1 إلى 6 ، بحيث إذا ظهر الرقمان 2 و 4 نسحب عشوائيا كرتين من الصندوق U_1 على التوالي دون إرجاع ، وفي باقي الحالات نسحب كرتين في آن واحد من الصندوق U_2 .
① أحسب احتمال الحوادث التالية :

A: "سحب كرتين من نفس اللون" .

B: "سحب كرتين تحملان نفس الرقم" .

C: "سحب كرة حمراء على الأقل" .

$A \cap B$: "سحب كرتين من نفس اللون و تحملان نفس الرقم"

② هل الحادثان A و B مستقلتان . علل .

③ علما أن الكرتين المسحوبتين من نفس الرقم ، ماهو احتمال أن تكون الكرتين من الصندوق U_1 .

(II) نغير نوع التجربة ونسحب من الصندوقين U_1 و U_2 معا ، حيث نسحب من U_1 كرتين على التوالي مع الإرجاع ونسحب من U_2 كرتين على التوالي دون إرجاع .

① أحسب احتمالات الحوادث السابقة : A: "سحب كرتين من نفس اللون من كل صندوق" .

B: "سحب كرتين تحملان نفس الرقم من كل صندوق" .

C: "سحب كرة حمراء على الأقل من كل صندوق" .

$A \cap B$: "سحب كرتين من نفس اللون و تحملان نفس الرقم من كل صندوق"

D: "الكرة المسحوبة ثانيا حمراء من كل صندوق" .

E: "سحب كرتين من U_1 جداء رقيهما معدوم" .

(III) نعيد التجربة حيث نسحب الآن من U_1 كرتين في آن واحد و نضعها في U_2 ، ثم نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع من U_2 .

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة .

① عين قيم X

② عين قانون احتمال المتغير العشوائي X . ثم أحسب $E(2023X + 1444)$

③ أحسب الاحتمال : $p(\ln X(X - 2) = 0)$.

☆ حل التمرين ☆

(I) ملاحظة : في هذه الحالة كل صندوق له احتمال سحب حيث $P(U_1) = \frac{1}{3}$ و $P(U_2) = \frac{2}{3}$.
عدد الحالات الممكنة للسحب من الصندوق U_1 هي : $A_7^2 = 42$ و من الصندوق U_2 هي : $C_7^2 = 21$.

① حساب احتمالات الحوادث :

$$P(A) = P(U_1) \times P_{u_1}(A) + P(U_2) \times P_{u_2}(A) = \frac{1}{3} \times \frac{A_5^2 + A_2^2}{A_7^2} + \frac{2}{3} \times \frac{C_3^2 + C_4^2}{C_7^2} = \frac{29}{63}$$

$$P(B) = P(U_1) \times P_{u_1}(B) + P(U_2) \times P_{u_2}(B) = \frac{1}{3} \times \frac{A_4^2 + A_2^2}{A_7^2} + \frac{2}{3} \times \frac{C_3^2 + C_2^2 + C_2^2}{C_7^2} = \frac{17}{63}$$

$$P(C) = P(U_1) \times P_{u_1}(C) + P(U_2) \times P_{u_2}(C) = \frac{1}{3} \times \frac{\left(\underbrace{2}_{\text{م ت}} \times A_5^1 \times A_2^1 \right) + A_5^2}{A_7^2} + \frac{2}{3} \times \frac{C_3^1 \times C_4^1 + C_3^2}{C_7^2} = \frac{40}{63}$$

$$P(A \cap B) = P(U_1) \times P_{u_1}(A \cap B) + P(U_2) \times P_{u_2}(A \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{A_3^2}{A_7^2} + \frac{2}{3} \times \frac{C_2^2 + C_2^2}{C_7^2} = \frac{7}{63}$$

② لدينا $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ وعليه A و B حادثان غير مستقلتين.

$$P_B(U_1) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(U_1) \times P_{u_1}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{A_4^2 + A_2^2}{A_7^2}}{\frac{17}{63}} = \frac{7}{17}$$

(II) ملاحظة : عدد الحالات الممكنة للسحب من الصندوقين معا هو : $7^2 \times A_7^2 = 2058$.

حساب الاحتمالات :

$$P(A) = \frac{(5^2 + 2^2) \times (A_3^2 + A_4^2)}{7^2 \times A_7^2} = \frac{87}{343}$$

$$P(B) = \frac{(4^2 + 2^2 + 1^2) \times (A_3^2 + A_2^2 + A_2^2)}{7^2 \times A_7^2} = \frac{5}{49}$$

$$P(C) = \frac{(2 \times 5^1 \times 2^1 + 5^2) \times (2 \times A_3^1 A_4^1 + A_3^2)}{7^2 \times A_7^2} = \frac{225}{343}$$

$$P(A \cap B) = \frac{(3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) \times (A_2^2 + A_2^2)}{7^2 \times A_7^2} = \frac{26}{1029}$$

$$P(D) = \frac{(5^2 + 2^1 \times 5^1) \times (A_3^2 + A_4^1 A_3^1)}{7^2 \times A_7^2} = \frac{15}{49}$$

$$P(E) = \frac{(2^2 + 2 \times 2^1 \times 5^1) \times A_7^2}{7^2 \times A_7^2} = \frac{24}{49}$$

(III) ① قيم المتغير العشوائي X هي : $\{0, 1, 2\}$.

② تعيين قانون احتمال X :

$$P(X = 0) = \frac{C_5^2}{C_7^2} \times \frac{A_4^2}{A_9^2} + \frac{C_2^2}{C_7^2} \times \frac{A_6^2}{A_2^2} + \frac{C_5^1 C_2^1}{C_7^2} \times \frac{A_5^2}{A_9^2} = \frac{175}{756}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_5^2}{C_7^2} \times \frac{2 \times A_4^1 A_5^1}{A_9^2} + \frac{C_2^2}{C_7^2} \times \frac{2 \times A_6^1 A_3^1}{A_2^2} + \frac{C_5^1 C_2^1}{C_7^2} \times \frac{2 \times A_4^1 A_5^1}{A_9^2} = \frac{418}{756}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_5^2}{C_7^2} \times \frac{A_5^2}{A_9^2} + \frac{C_2^2}{C_7^2} \times \frac{A_3^2}{A_2^2} + \frac{C_5^1 C_2^1}{C_7^2} \times \frac{A_4^2}{A_9^2} = \frac{163}{756}$$

2	1	0	$X = x_i$
$\frac{163}{756}$	$\frac{418}{756}$	$\frac{175}{756}$	$P(X = x_i)$

③ حساب الأختمال $p(\ln X(e^{2X} - e^X) = 0)$:

لدينا $\ln X(e^{2X} - e^X) = 0$ يكافئ $\ln X = 0$ أو $2e^X(e^X - 1) = 0$ يكافئ $X = 1$ أو $X = 0$ ومنه :

$$p(\ln X(e^{2X} - e^X) = 0) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{593}{756}$$

تَمْرِين ☆ ☆ تشكيل اللجان

- (I) قسم 3 تقني رياضي به 25 تلميذ منهم 14 ذكر و 11 أنثى .
 يراد تشكيل لجنة بثلاث أعضاء تضم رئيسا - نائبا - أمينا .
- 1 ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها .
 - 2 أحسب احتمالات الحوادث التالية :
 A : "اللجنة مشكلة من الذكور فقط".
 B : "اللجنة مشكلة من نفس الجنس".
 C : " أعضاء اللجنة مشكلة من جنسين مختلفين".
 D : "الرئيس ذكر".
 E : "الرئيس ذكر و الأمين تلميذة".
 F : "الرئيس ذكر أو الأمين تلميذة".
 G : "اللجنة تضم ذكرا على الاقل".
 - 3 أحسب احتمال أن يكون الرئيس ذكرا علما أن أعضاء اللجنة من جنسين مختلفين .
- (II) يوجد من بين التلاميذ تلميذ يسمى " بلال " و تلميذة تسمى " زينب " . نعتبر الحوادث :
 H : "بلال و زينب لا يجتمعان معا في نفس اللجنة".
 A_1 : "بلال عضو باللجنة".
 A_2 : "زينب رئيسا للجنة".
 A_3 : "اللجنة بدون بلال و زينب".
- 2 أحسب الإحتمالات الشرطية التالية : $P_H(A_1)$ ، $P_H(A_1)$ ، $P_H(A_1)$
- (III) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل لجنة عدد الإناث فيها .
- 1 عين قيم X .
 - 2 عين قانون احتمال X .
 - 3 أحسب $E(X)$ و $V(X)$.
 - 1 أحسب الإحتمال : $p(X^2 - X = 0)$.

حل التمرين ☆ ☆

- (I) 1 عدد اللجان الممكن تشكيلها هو : $A_{25}^3 = 13800$
- 2 حساب الإحتمالات :
- $$P(A) = \frac{A_{14}^3}{A_{25}^3} = \frac{91}{575}$$
- $$P(B) = \frac{A_{14}^3 + A_{11}^3}{A_{25}^3} = \frac{23}{100}$$
- بما أن C الحادثة العكسية لـ B فإن $P(C) = 1 - P(B) = \frac{77}{100}$
- $$P(D) = \frac{A_{14}^1 \times A_{24}^2}{A_{25}^3} = \frac{14}{25}$$
- $$P(E) = \frac{A_{14}^1 \times A_{11}^1 \times A_{23}^1}{A_{25}^3} = \frac{77}{300}$$

$$P(F) = P(D \cup F_1) = P(D) + \underbrace{P(F_1)}_{\text{التلهيذة امينة}} - \underbrace{P(D \cap F_1)}_{P(E)} = \frac{A_{14}^1 \times A_{24}^2}{A_{25}^3} + \frac{A_{11}^1 \times A_{24}^2}{A_{25}^3} - \frac{A_{14}^1 \times A_{11}^1 \times A_{23}^1}{A_{25}^3} =$$

$$\frac{223}{300}$$

$$P(G) = \frac{\left(\underbrace{3}_{\text{معامل ترتيب}} \times A_{14}^1 \times A_{11}^2 \right) + \left(3 \times A_{14}^2 \times A_{11}^1 \right) + A_{14}^3}{A_{25}^3} = \frac{427}{460}$$

يمكن حساب $P(G)$ بطريقة ثانية بإستعمال الحادثة العكسية لـ G وهذا أسهل حيث $\bar{G}$: "بالجنة ثلاث إناث".

$$P(G) = 1 - P(\bar{G}) = 1 - \frac{A_{11}^3}{A_{25}^3} = \frac{427}{460} \text{ عليه}$$

③ حساب إحتمال أن يكون الرئيس ذكرا علما أن أعضاء اللجنة من جنسين مختلفين أي $P_C(D)$:

$$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{A_{14}^1 \times A_{21}^1 + (A_{14}^1 \times (2 \times A_{13}^1 \times A_{11}^1))}{A_{25}^3} = \frac{231}{575}$$

① حساب الإحتمالات الشرطية التالية $P_H(A_1)$ ، $P_H(A_1)$ ، $P_H(A_1)$:

$$P_H(A_1) = \text{إذن} \begin{cases} P(H \cap A_1) = \frac{3 \times A_1^1 \times A_{23}^2}{A_{25}^3} = \frac{11}{100} \\ P(H) = \frac{3 \times A_2^1 \times A_{23}^2 + A_{23}^3}{A_{25}^3} = \frac{99}{100} \end{cases} \text{ لدينا } P_H(A_1) = \frac{P(H \cap A_1)}{P(H)} \text{ ولدينا}$$

$$\frac{11}{\frac{99}{100}} = \frac{1}{9}$$

$$P_H(A_2) = \frac{11}{\frac{99}{100}} = \frac{100}{99} \text{ إذن} \begin{cases} P(H \cap A_2) = \frac{A_1^1 \times A_{23}^2}{A_{25}^3} = \frac{11}{300} \\ P(H) = \frac{99}{100} \end{cases} \text{ لدينا } P_H(A_2) = \frac{P(H \cap A_2)}{P(H)} \text{ ولدينا}$$

$$\left(\text{ل لا يوجد معامل ترتيب هنا لان رتبة زينب محددة} \right) \cdot \frac{1}{27}$$

$$P_H(A_1) = \frac{77}{\frac{99}{100}} = \frac{7}{9} \text{ إذن} \begin{cases} P(H \cap A_3) = \frac{A_{23}^3}{A_{25}^3} = \frac{77}{100} \\ P(H) = \frac{99}{100} \end{cases} \text{ لدينا } P_H(A_3) = \frac{P(H \cap A_3)}{P(H)} \text{ ولدينا}$$

③ III ① تعيين قيم X : $\{0, 1, 2, 3\}$.

② تعيين قانون إحتمال X :

$$P(X=0) = \frac{A_{14}^3}{A_{25}^3} = \frac{91}{575} \text{ ☆}$$

$$P(X=1) = \frac{3 \times A_{11}^1 \times A_{14}^2}{A_{25}^3} = \frac{1001}{2300} \text{ ☆}$$

$$P(X=2) = \frac{3 \times A_{11}^2 \times A_{14}^1}{A_{25}^3} = \frac{77}{230} \text{ ☆}$$

$$P(X=3) = \frac{A_{11}^3}{A_{25}^3} = \frac{33}{460} \text{ ☆}$$

③ حساب $E(X)$ و $V(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 p_i x_i = 0 \times \frac{91}{575} + 1 \times \frac{1001}{2300} + 2 \times \frac{77}{230} + 3 \times \frac{33}{460} = \frac{33}{25} = 1,32$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^4 p_i(x_i)^2 - E^2(X) = 0^2 \times \frac{91}{575} + 1^2 \times \frac{1001}{2300} + 2^2 \times \frac{77}{230} + 3^2 \times \frac{33}{460} = \boxed{2,42}$$

④ حساب $P(X^2 - X=0)$:

$$P(X^2 - X=0) = P(X=1) + P(X=0) = \frac{91}{575} + \frac{1001}{2300} = \text{لدينا } X^2 - X=0 \text{ يكافئ } X=1 \text{ أو } X=0 \text{ ومنه}$$

$$\boxed{\frac{273}{460}}$$

تَمْرِين ☆ ☆ ☆

(I) يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء تحمل الأرقام: 0، 1، 1 وثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام: 1، 2، 2 وكرتين سوداويتين تحملان الرقمين: 0، 2. الكرات كلها متماثلة ولا نفرق بينها باللمس. ن سحب من الصندوق ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع.

① احسب احتمال الحوادث التالية:

A: الكرات المسحوبة من نفس اللون، B: ظهور الرقم 1 مرة واحدة فقط في السحبات الثلاث،
C: ظهور ثلاث أرقام مجموعها عدد فردي، D: الكرة المسحوبة ثانيا حمراء.

② بين أن: $p(B \cap D) = \frac{17}{84}$ ثم إستنتج $P(A \cup B)$

③ علما أن الرقم 1 ظهر مرة واحدة فقط في السحبات الثلاث، أحسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ثانيا حمراء.

④ نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات السوداء المتبقية في الصندوق.
• عين قيم المتغير العشوائي X واكتب قانون احتماله.

• احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

(II) ننزع الآن من الصندوق الكرتين السوداويتين فتبقى فيه ثلاث كرات بيضاء وثلاث كرات حمراء. ن سحب من الصندوق كرة n مرة على التوالي مع الإرجاع في كل مرة. (n عدد طبيعي غير معدوم ويمثل عدد السحبات). وليكن p_n هو احتمال الحادثة A_n "الكرات المسحوبة من نفس اللون".

① بين أن المتتالية (P_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $P_1 = 1$.

• ماهو أكبر عدد ممكن من السحبات بحيث يكون احتمال الحادثة "الكرات المسحوبة من نفس اللون" أكبر أو يساوي العدد $\frac{1}{16}$.

• احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(n)$ ، ماذا تستنتج.

② من أجل n غير معدوم، احسب بدلالة n احتمال ان تكون في كل السحبات على الأقل كرة واحدة حمراء.

حل التمرين ☆ ☆ ☆

(I) ① حساب الاحتمالات:

☆ عدد الحالات الممكنة هو $A_8^3 = 336$

$$\bullet P(A) = \frac{A_3^3 + A_3^3}{A_8^3} = \frac{1}{28} \quad \star$$

$$\bullet P(B) = \frac{3 \times A_3^1 \times A_5^2}{A_8^3} = \frac{15}{28} \quad \star$$

$$P(C) = \frac{3 \times A_3^1 \times A_5^2 + A_3^3}{A_8^3} = \frac{31}{56} \quad \star$$

$$\bullet P(D) = \frac{A_3^3 + 2 \times A_3^2 A_5^1 + A_5^2 A_3^1}{A_8^3} = \frac{3}{8} \quad \star$$

② إثبات أن: $P(B \cap D) = \frac{17}{84}$

$$P(B \cap D) = \frac{A_1^1 \times A_5^2 + (A_2^1 \times (2 \times A_3^1 A_4^1))}{A_8^3} = \frac{17}{84}$$

إنتاج $P(B \cup D)$ و $P_B(D)$:

$$P(B \cup D) = P(A) + P(B) - P(B \cap D) = \frac{1}{28} + \frac{15}{28} - \frac{17}{84} = \frac{31}{84}$$

لدينا:

حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ثانيا حمراء علما أن الرقم 1 ظهر مرة واحدة فقط في السحبات الثلاث

:

$$P_B(D) = \frac{P(B \cap D)}{P(B)} = \frac{\frac{17}{84}}{\frac{15}{28}} = \frac{17}{45}$$

③ تعيين قيم $X \in \{0, 1, 2\}$:

تعيين قانون احتمال X :

$$P(X = 0) = \frac{3 \times A_2^2 \times A_6^1}{A_8^3} = \frac{3}{28}$$

$$P(X = 1) = \frac{3 \times A_2^1 \times A_6^2}{A_8^3} = \frac{15}{28}$$

$$P(X = 2) = \frac{A_6^3}{A_8^3} = \frac{10}{28}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 p_i x_i = 0 \times \frac{3}{28} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{10}{28} = \frac{5}{4}$$

② ① إثبات أن المتتالية (P_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $P_1 = 1$:

$$P_{n+1} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} P_n \quad \text{إذن: } P(A_n) = P(n) = \frac{3^n + 3^n}{6^n} = 2 \times \frac{3^n}{6^n} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$P(n) = \frac{1}{2} P(n) \text{ وعليه المتتالية } (P_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{1}{2} \text{ وحدها الأول } p_1 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1$$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(n)$:

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(n) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ نستنتج أنه كلما كان عدد السحبات كبير جدا كان احتمال الحادثة "الكرات المسحوبة من نفس اللون" مستحيلا.

تعيين أكبر عدد ممكن من السحبات بحيث يكون احتمال الحادثة "الكرات المسحوبة من نفس اللون" أكبر أو يساوي العدد $\frac{1}{16}$.

$$P(n) \geq \frac{1}{16} \text{ يكافئ } 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{1}{16} \text{ يكافئ } \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{1}{32} \text{ يكافئ } e^{n \ln \frac{1}{2}} \geq \frac{1}{32} \text{ معناه } n \ln(2) \leq$$

$$\ln(32) \text{ أي: } n \leq 5 \text{ وعليه أكبر عدد ممكن من السحبات هو: } [5]$$

② الحساب بدلالة n احتمال الحادثة H : "في كل السحبات على الأقل كرة واحدة حمراء":

أي عدد الكرات الحمراء المتحصل عليها يتغير من 1 إلى n . ولحساب الإحتمال نستعمل الحادثة العكسية $\bar{H}$:

$$P(H) = 1 - P(\bar{H}) = 1 - \frac{3^n}{6^n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ ومنه: } P(H) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

رمضان كريم

العصراني
خبراء الدين