

التمرين 01: ت ر 2019

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 7u_n - 18n + 9 \end{cases}$ و $v_n = u_n - 3n + 1$.

1. أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
2. اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
3. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
4. أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 7^n على 9.
ب. ما هو باقي القسمة الاقليدية على 9 للعدد $1962^{1954} + 1954^{1962} + 1442^{2019}$ ؟
ج. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $6S_n - 7u_n \equiv 0[9]$.

التمرين 02: ت ر 2019

1. نعتبر المعادلة ذات المجهول (x, y) : $(E) : 5x - 3y = 1, \dots, \dots$ حيث x و y عدنان صحيحان.
أ. تحقق أن الثنائية $(6n + 2, 10n + 3)$ حل للمعادلة (E) حيث n عدد طبيعي.
ب. استنتج أن العددين $6n + 2$ و $10n + 3$ أوليان فيما بينهما.
2. نضع $a = 10n + 3$ و $b = 6n + 2$ وليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .
أ. بيّن أن $d = 1$ أو $d = 41$.
ب. بيّن أنه إذا كان $d = 41$ فإن $n \equiv 12[41]$.
3. ليكن العدنان الطبيعيان $A = 20n^2 + 36n + 9$ و $B = 6n^2 + 19n + 15$.
أ. بين أن العددين A و B يقبلان القسمة على $2n + 3$.
ب. جد بدلالة n وحسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين 03: ر 2019

1. حل المعادلة $(E) : 505x - 673y = 1, \dots, \dots$ ذات المجهول (x, y) حيث x و y عدنان صحيحان.
لاحظ أن: $2019 = 3 \times 673$ و $2020 = 4 \times 505$.
2. بيّن أنه من أجل كل ثنائية (x, y) حل للمعادلة (E) فإن x و y من نفس الإشارة.
3. نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرّفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 505 \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_n = u_n + 673 \end{cases}$.
أكتب u_α بدلالة α ثم اكتب v_β بدلالة β حيث α و β عدنان طبيعيان.
4. أ. عيّن الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) ثم بيّن أنّ هذه الحدود المشتركة تشكل متتالية حسابية (w_n) يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.
ب. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $X_n = \frac{1}{505}(w_n - 2023)$ احسب بدلالة n الجداء $P = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.

(u_n) متتالية عددية حدودها موجبة معرفة بحدّها الأول $u_1 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1$$

1. أ. تحقّق أنّه: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$.

ب. استنتج كتابة الحد العام u_n بدلالة n .

2. تحقّق أنّه: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = n(n-2) + 1$.

3. عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $n-2$ يقسم $n-5$.

4. أ. من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ بيّن أنّ: $PGCD(n-2, u_n) = 1$.

ب. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها $(n^2 + 1)(n-2)$ يقسم $(n-5)u_n$.

f الدالة العددية المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2x}{e \cdot x + 1}$.

و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{5}{4e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{e}$.

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{e \cdot u_n \left(\frac{1}{e} - u_n \right)}{e \cdot u_n + 1}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) وبرّر أنّها متقاربة.

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = \frac{e \cdot u_n}{e \cdot u_n - 1}$.

أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها 2، يطلب تعيين حدّها الأول v_0 وعبارة v_n بدلالة n .

3. أ. تحقّق أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = 1 + \frac{1}{e \cdot u_n - 1}$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ب. بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

4. أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 7.

ب. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_n يقبل القسمة على 7.

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام كما يلي $u_n = 2(3)^n$.

و (v_n) متتالية عددية معرفة بحدّها الأول $v_0 = 4$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = 5v_n + u_n$.

1. نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$.

. أثبت أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ يطلب تعيين حدّها الأول.

2. اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثم استنتج أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = 5^n - 3^n$.

3. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعددين 3^n و 5^n على 8.

4. عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة للعدد v_n على 8.

$$1. \alpha \text{ و } \beta \text{ عدنان طبيعيان بحيث: } \begin{cases} \alpha + \beta = 4035 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

عين العددين α و β ، ثم بين أن العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما.

2. عيّن كل الثنائيات الصحيحة (x, y) التي تحقق المعادلة: $1009x - 2017y = 1$.

$$3. \text{ عيّن الأعداد الصحيحة } a \text{ التي تحقق الجملة } \begin{cases} a \equiv 2019[2017] \\ a \equiv 2019[1009] \end{cases}$$

4. أ. n عدد طبيعي، ادرس تبعا لقيم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9.

ب. L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كما يلي: $L = \overline{111\dots 1}_{2018}$.

. عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $42L$ على 9.

التمرين 08: ت ر 2017

1. بين أن: من أجل كل عدد طبيعي k ، $4^{5k} \equiv 1[11]$.

2. استنتج تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

3. بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1)$ يقبل القسمة على 11.

4. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(2 \times 2017^{5n+2} + n - 3)$ قابلا للقسمة على 11.

التمرين 09: ر 2017

1. نعتبر المعادلة $(E) : 104x - 20y = 272 \dots\dots\dots$ ذات المجهول (x, y) حيث x و y عدنان صحيحان.

أ. احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104 ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حولا.

ب. بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3[5]$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E) .

2. λ عدد طبيعي يكتب $1\alpha\alpha\beta 01$ في نظام التعداد الذي أساسه 4، ويكتب $1\alpha\beta 01$ في نظام التعداد الذي أساسه 6، حيث α و β عدنان طبيعيان.

. عيّن α و β ، ثم أكتب λ في النظام العشري.

3. تحقق أن كلا من 2017 و 1009 عدد أولي، ثم عيّن الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق:

$$2m - d = 2017 \text{ حيث } PGCD(a, b) = d \text{ و } PPCM(a, b) = m$$

التمرين 10: ر 2017

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 7u_n + 8$.

1. برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $3u_n = 7^n - 4$.

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

أ. احسب بدلالة n المجموع S_n ، ثم جد علاقة بين S_n و S'_n .

ب. استنتج أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$.

3. أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5.

ب. عين قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5.

- نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول (x, y) : $6x - 7y = 19$ حيث x و y عدنان صحيحان.
1. جد الحل الخاص (x_0, y_0) للمعادلة (E) بحيث $x_0 = y_0$ ، ثم حل المعادلة (E).
 2. استنتج قيم العدد الصحيح λ والتي تحقق: $\begin{cases} \lambda \equiv 24[7] \\ \lambda \equiv 5[6] \end{cases}$ ، ثم عيّن باقي قسمة العدد λ على 42.
 3. عيّن جميع الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) حيث: $|x + y - 1| \leq 13$.
 4. أ. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.
ب. عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة: $\begin{cases} n - 5^n \equiv 2020[7] \\ n \equiv 1437[6] \end{cases}$.

1. أ. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11.
ب. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$ مضاعف للعدد 11.
2. نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول (x, y) : $7x - 3y = 8$ حيث x و y عدنان طبيعيين.
أ. حل المعادلة (E).
ب. d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث الثنائية (x, y) حلا المعادلة (E).
- ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
- عيّن الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$.
ج. جد الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) التي تحقق: $2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0[11]$.

- (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدودها موجبة تماما، حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث: $\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases}$.
1. احسب u_1 و u_2 ثم استنتج قيمة الأساس q .
 2. نضع: $u_1 = e^4$ و $q = e^3$.
أ. عبّر عن u_n بدلالة n .
 - ب. نضع: $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \ln(u_2) + \dots + \ln(u_n)$. احسب S_n بدلالة n .
 3. من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $a_n = n + 3$.
أ. بيّن أنّ: $PGCD(2S_n, a_n) = PGCD(a_n, 14)$.
ب. عيّن القيم الممكنة لـ: $PGCD(2S_n, a_n)$.
ج. عيّن قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها: $PGCD(2S_n, a_n) = 7$.
 4. ادرس تبعا لقيم العدد طبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.
 5. نضع: $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$.
أ. عيّن قيم العدد طبيعي n التي من أجلها يكون: $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$.
 6. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52)$ يقبل القسمة على 7.

التمرين 14: ت ر 2015

1. أ. عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13.
- ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $3 - 2014^{2037} + 42 \times 138^{2015}$ على 13.
2. أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6)8^{2n} [13]$.
- ب. عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n حتى يكون: $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0 [13]$.

التمرين 15: ر 2015

1. أ. عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.
 - ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $2015^{53} + 1954^{1962} - 1962^{1954}$ على 7.
 2. أ. بيّن أنّ 89 عدد أولي.
 - ب. عيّن كل القواسم الطبيعية للعدد 7832.
 - ج. بيّن أنّ العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.
 3. x و y عدنان طبيعيان غير معدومين قاسمهما الأكبر هو 2.
- $$\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8 [22] \end{cases}$$
- عيّن x و y علما أنّ:
4. a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b و a أولي مع c .
 - أ. باستعمال مبرهن بيزو، برهن أنّ a أولي مع $b \times c$.
 - ب. باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $PGCD(a, b^n) = 1$.
 - ج. استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962} .

التمرين 16: ت ر 2014

- n و p عدنان طبيعيان.
1. أدرس حسب قيم n ، بواقي القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n .
 2. نضع: $C_n = 16n + 9$ و $D_p = 5^p$.
 - أ. بيّن أنّه إذا كان $p = 4k + 2$ حيث k عدد طبيعي، فإنّه يوجد عدد طبيعي n يحقق $C_n = D_p$.
 - ب. عيّن n من أجل $p = 6$.
 3. f هي الدالة المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 5^{(4x+2)} - 9$ أدرس تغيرات الدالة f ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.
 4. (u_n) المتتالية المعرفة على N كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n من N ، $u_{n+1} = 5^4 \left(u_n + \frac{9}{16} \right) - \frac{9}{16}$.
 - أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{5^{(4n+2)} - 9}{16}$.
 - ب. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن u_n عدد طبيعي.
 5. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

التمرين 17: ر 2014

1. نعتبر المعادلة (E) : $2013x - 1962y = 54$ حيث x و y عدنان صحيحان.
- أ. أحسب $PGCD(2013, 1962)$.

- ب. استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولاً.
- ج. بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حل للمعادلة (E) فإن: $x \equiv 0[6]$.
- د. استنتج حلاً خاصاً (x_0, y_0) حيث: $74 < x_0 < 80$ ثم حل المعادلة (E).
2. نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث (x, y) حل للمعادلة (E).
أ. ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
ب. عين العدد الطبيعيين a و b حيث: $671a - 654b = 18$ و $PGCD(a, b) = 18$.

التمرين 18: ر 2013

1. أ. عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $2n + 27 \equiv 0[n + 1]$.
ب. عين الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية، حيث: $(b - a)(a + b) = 24$.
ج. استنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.
2. α و β عدنان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس خمسة على الشكل: $\alpha = \overline{10141}$ و $\beta = \overline{3403}$.
أ. أكتب العددين α و β في النظام العشري.
ب. عين الثنائية (a, b) من الأعداد الطبيعية حيث:
$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$$

3. أ. عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1432، استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478.
ب. حل في Z^2 المعادلة ذات المجهول (x, y) التالية: $2013x - 1434y = 27$.

التمرين 19: ر 2013

1. n عدد طبيعي. نعتبر العددين الصحيحين α و β حيث: $\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ و $\beta = n + 3$.
أ. بين أن: $PGCD(\alpha, \beta) = PGCD(\beta, 10)$.
ب. ما هي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha, \beta)$ ؟
ج. عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $PGCD(\alpha, \beta) = 5$.
2. أ. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.
ب. عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n ، التي تحقق الجملة التالية:
$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$$

التمرين 20: ت 2013

- x و y عدنان صحيحان، و (E) المعادلة ذات المجهول (x, y) التالية: $11x + 7y = 1$.
1. أ. عين (x_0, y_0) حل للمعادلة (E) الذي يحقق: $x_0 + y_0 = -1$.
ب. استنتج حل للمعادلة (E).
2. a و b عدنان طبيعيان، و S العدد الذي يحقق:
$$\begin{cases} S = 11a + 1 \\ S = 7b + 2 \end{cases}$$

أ. بين أن $(a, -b)$ حل للمعادلة (E).
ب. ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد S على 77 ؟
3. n عدد طبيعي باقي قسمته على 11 هو 1 وباقي قسمته على 7 هو 2.
عين أكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n < 2013$.

1. نعتبر في Z^2 المعادلة ذات المجهول (x, y) التالية: (1) $2011x - 1432y = 31$.
أ. أثبت أن العدد 2011 أولي.
ب. باستعمال خوارزمية إقليدس، عيّن حلا خاصا (x_0, y_0) للمعادلة (1)، ثم حل المعادلة (1).
2. أ. عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7.
ب. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $[7] \equiv 0 \cdot 2010^n + 2011^n + 1432^n$.
3. N عدد طبيعي يكتب $2\gamma\alpha\beta$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث: α, β, γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابة من متتالية حسابية متزايدة تماما و (β, γ) حل للمعادلة (1).
عيّن α, β, γ ثم أكتب N في النظام العشري.

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 9^n على 11.
2. ما هو باقي قسمة 2011^{2012} على 11؟
3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(4 + 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012})$ يقبل القسمة على 11.
4. عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $(2011^{2012} + 2n + 2)$ مضاعفا للعدد 11.

1. (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي: $u_0 = 16$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = 6u_n - 9$.
أ. أحسب بواقي قسمة كل من الحدود u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 على 7.
ب. خمن قيمة للعدد a وقيمة للعدد b بحيث: $u_{2k} \equiv a[7]$ و $u_{2k+1} \equiv b[7]$.
2. أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} \equiv u_n[7]$.
ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k} \equiv 2[7]$ ثم استنتج أن $u_{2k+1} \equiv 3[7]$.
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \frac{9}{5}$.
أ. بين أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
ب. أحسب بدلالة n كل من u_n و S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

- نسمي (S) الجملة التالية: $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ حيث x عدد صحيح $(x \in Z)$.
1. بين أن العدد 153 حل للجملة (S) .
2. إذا كان x_0 حل للجملة (S) ، بين أن: $(x \text{ حل للجملة } (S))$ يكافئ $\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}$.
3. حل الجملة (S) .
4. يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب، فإذا إستعملنا علبا تتسع لـ 15 كتابا بقي لديه 3 كتب، وإذا استعمل علبا تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب.
إذا علمت أن عدد الكتب التي بحوزته محصور بين 500 و 600، ما عدد هذه الكتب؟

$$\begin{cases} m = PPCM(U_3, U_5) \\ d = PGCD(U_3, U_5) \end{cases} \text{ حيث: } \begin{cases} U_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases} \quad (U_n) \text{ متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق:}$$

1. عيّن الحدين U_3 و U_5 ثم استنتج U_0 .
2. أكتب U_n بدلالة n ، ثم بين أن: 2010 حد من حدود (U_n) و عيّن رتبته.
3. عيّن الحد الذي ابتداء منه يكون مجموع خمسة حدود متعاقبة من (U_n) يساوي 10080.
4. n عدد طبيعي غير معدوم.
- أ. أحسب بدلالة n المجموع S حيث: $S = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.
- ب. استنتج بدلالة المجموع S_1 و S_1 حيث: $S_1 = U_0 + U_2 + U_4 + \dots + U_{2n}$ و $S_2 = U_1 + U_3 + U_5 + \dots + U_{2n-1}$.

1. نعتبر المعادلة: $(E) \dots 13x - 7y = -1$ حيث x و y عدنان صحيحان.
حل المعادلة (E) .
2. عيّن الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث: $\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$.
3. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي بقية الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13.
4. ليكن العدد الطبيعي b المكتوب في نظام التعداد ذي الأساس 9 كما يلي: $\overline{\alpha 00 \beta 086}$ حيث $\alpha \in N^*$ و $\beta \in N$.
عيّن α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91.

- من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.
1. تحقق أن: $4 \equiv -3[7]$ ثم بين أن: $A_3 \equiv 6[7]$.
2. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي بقية الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 7.
3. بين أنه إذا كان n فرديا فإن $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7، واستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7.
4. ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7؟

1. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^{3n} - 1$ يقبل القسمة على 13.
2. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يقبل كل من العددين $3^{3n+1} - 3$ و $3^{3n+2} - 9$ القسمة على 13.
3. عيّن حسب قيم n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13 واستنتج باقي قسمة 2010^{2005} على 13.
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي p : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$.
- أ. من أجل $p = 3n$ ، عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13.
- ب. برهن أنه إذا كان $p = 3n + 1$ فإن A_p يقبل القسمة على 13.
- ج. عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p = 3n + 2$.
5. يكتب العدنان a و b في نظام العد ذي الأساس 3 كما يلي: $a = \overline{1001001000}$ و $b = \overline{100010001000}$.
- أ. تحقق أن العددين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري.
- ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13.

التمرين 29: ر 2010

1. نعتبر المعادلة: (1) $7x + 65y = 2009$ حيث x و y عدنان صحيحان.
أ. بَيِّن أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حل للمعادلة (1) فإن: y مضاعف للعدد 7.
ب. حل المعادلة (1).
2. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9.
3. عَيِّن العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على 9.
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^{6n} - 1$.
أ. تحقق أن u_n يقبل القسمة على 9.
- ب. حل المعادلة: (2) $(7u_1)x + (u_2)y = 126567$ ذات المجهول (x, y) حيث x و y عدنان صحيحان.
- ج. عَيِّن الثنائية (x_0, y_0) حل (2) حيث: حيث x_0 و y_0 عدنان طبيعيين مع $y_0 \geq 25$.

التمرين 30: ت 2010

- نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس 7 كما يلي: $n = \overline{11\alpha 00}$ حيث α عدد طبيعي.
1. عَيِّن العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3.
 2. عَيِّن العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5.
 - استنتج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15.
 3. نأخذ $\alpha = 4$ أكتب العدد n في النظام العشري.

التمرين 31: ت 2010

1. عَيِّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 10^n على 13.
2. تحقق أن: $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0 [13]$.
3. عَيِّن قيم العدد الطبيعي n ، بحيث: $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0 [13]$.

التمرين 32: ر 2009

- x عدد طبيعي أكبر من 1 و y عدد طبيعي.
- A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل: $A = \overline{5566}$.
1. أ. أنشر العبارة $(5x^2 + 6)(x + 1)$ ثم أجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أن: $A = (5x^2 + 6)(2 + 2y)$.
ب. أحسب x و y إذا علمت أن x عدد أولي أصغر من 12، ثم أكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري.
 2. أ. عَيِّن الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584.

ب. عَيِّن الأعداد الطبيعية a و b حيث: $a > b$ والتي تحقق:

$$\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases}$$

التمرين 33: ت 2009

1. حل المعادلة التفاضلية: $y' = (\ln 2)y$.
2. نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق: $f(0) = 1$ ، عَيِّن عبارة $f(x)$.
3. n عدد طبيعي.
- أ. أدرس بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n .
- ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009) - 4$.
4. أ. أحسب بدلالة n ، المجموع S_n حيث: $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$.
ب. عَيِّن قيم العدد الطبيعي n ، التي يقبل من أجلها S_n القسمة على 7.

التمرين 34: ت ر 2009

1. أ. عيّن الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2009.
 u_0 و a عدنان طبيعيان غير معدومين، (u_n) متتالية هندسية أساسها a وحدّها الأول u_0 بحيث: $u_1^2 + u_2 + 35a^2 = 2009$.
 ب. أحسب u_0 و a .
 2. نضع $a = 7$ و $u_0 = 2$ ، أحسب u_n بدلالة n .
 3. نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
 أ. عبّر عن S_n بدلالة n .
 ب. عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون: $S_n = 800$.

التمرين 35: ر 2008

- نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $3x - 21y = 78$.
1. أ. بيّن أن (E) تقبل حولا في Z^2 .
 ب. أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x, y) من Z^2 حلا للمعادلة (E) فإن: $x \equiv 5[7]$.
 استنتج حلول المعادلة (E) .
 2. أ. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.
 ب. عيّن الثنائيات (x, y) من N^2 التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق: $5^x + 5^y \equiv 3[7]$.

التمرين 36: ت ر 2008

- n عدد طبيعي أكبر من 5.
1. a و b عدنان طبيعيان حيث: $a = n - 2$ و $b = 2n + 3$.
 أ. ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟
 ب. بيّن أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n + 5$ مضاعفا للعدد 7.
 ج. عيّن قيم n التي من أجلها $PGCD(a, b) = 7$.
 2. نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث: $p = 2n^2 - 7n - 15$ و $q = n^2 - 7n + 10$.
 أ. بيّن أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n - 5$.
 ب. عيّن تبعا لقيم n وبدلالة n ، $PGCD(p, q)$.

التمرين 37: ت ر 2008

- نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : (I) $4x - 9y = 319$.
1. تأكد أن الثنائية $(82, 1)$ حل للمعادلة (I).
 أ. حل المعادلة (I).
 2. عيّن الثنائيات (a, b) الصحيحة حلول المعادلة (II) $4a^2 - 9b^2 = 319$.
 3. استنتج الثنائيات (x_0, y_0) حلول المعادلة (I) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.

التمرين 39: العلوم الدقيقة 2007

- n عدد طبيعي أكبر من 2، نعتبر الأعداد الطبيعية: $a = 2n + 1$ ، $b = 4n + 3$ ، $c = 2n + 3$.
1. أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما واستنتج أن الأعداد a ، b و c أولية فيما بينها.
 2. عيّن تبعاً لقيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين b و c
 3. عيّن قيمة n بحيث يكون: $PGCD(b, c) = 3$ و $PPCM(b, c) = 1305$.
 3. أكتب b^2 في نظام أساسه a .
 4. نفرض أن a ، b ، c هي إحداثيات النقطة ω من الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- أ. بين أن النقطة $\omega(a, b, c)$ تنتمي إلى مستقيم (Δ) يطلب تعيينه.
- ب. جد معادلة للمستوي (π) الذي يشمل المبدأ $O(0, 0, 0)$ ويحوي المستقيم (Δ) .

التمرين 38: العلوم الدقيقة 2005

- n عدد طبيعي ليكن العددين α و β حيث: $\alpha = n^2 + n$ و $\beta = n + 2$.
1. برهن أن $PGCD(\alpha, \beta) = PGCD(\beta, n)$.
 - استنتج القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha, \beta)$.
 2. a و b عددين طبيعيين يكتبان في نظام التعداد ذي الأساس n كما يلي: $a = \overline{3520}$ و $b = \overline{384}$.
 - أ. برهن أن العدد $(3n + 2)$ هو قاسم مشترك للعددين a و b .
 - ب. استنتج تبعاً لقيم n أن $PGCD(a, b) = 3n + 2$ أو $PGCD(a, b) = 2(3n + 2)$.
 - ج. عيّن α و β إذا علمت أن $PGCD(a, b) = 41$.

التمرين 38: العلوم الدقيقة 2004

- نعتبر في Z^2 المعادلة ذات المجهول (x, y) : (*) $43x - 13y = \lambda$ حيث λ عدد صحيح.
1. تحقق من أن الثنائية $(-3\lambda, -10\lambda)$ حل للمعادلة (*) ثم حل في Z^2 المعادلة.
 2. N عدد طبيعي يكتب $N = \overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ في نظام تعداد أساسه 6 ويكتب $N = \overline{\beta 0 \gamma \gamma \gamma}$ في نظام تعداد أساسه 5.
 - أ. بين أن α ، β و γ تحقق: $43\alpha - 13\beta = \gamma$.
 - ب. عيّن α ، β و γ ثم أكتب N في النظام العشري.

التمرين 41: العلوم الدقيقة 2003

1. α و β عددين طبيعيين أوليان فيما بينهما.
- عيّن α و β حيث: $\alpha(\alpha^2 - 19) = 35\beta$ و $\alpha > \beta$.
2. لتكن u_n متتالية هندسية حدّها الأول u_0 وأساسها r حيث u_0 و r عددين طبيعيين أوليان فيما بينهما و $u_0 < r$.
- أوجد u_0 و r حتى يكون: $35u_0^2 + 19u_1 - u_0r^3 = 0$.
- أ. نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. أحسب S_n بدلالة n .
- ب. أوجد الأعداد الطبيعية n حتى S_n القسمة على 30.

التمرين 40: علوم الطبيعة والحياة 2003

1. أ. عيّن القاسم المشترك الأكبر للأعداد 286 ، 1430 ، 2002 .
ب. نعرّف في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(I) 1430x - 2020y = 286 \dots$
برهن أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (I) فإن $(II) 5x \equiv 1[7] \dots$
2. (u_n) متتالية حسابية أساسها 7 وحدّها الأول $u_0 = 2$
 (v_p) متتالية حسابية أساسها 5 وحدّها الأول $v_0 = 1$
أ. اكتب u_n بدلالة n و v_p بدلالة p .
ب. أثبت أنه يوجد مالا نهاية من الحدود المشتركة بين المتتاليتين (u_n) و (v_p) وأن هذه الحدود تشكل متتالية حسابية يطلب إعطاء حدّها الأول وأساسها.

التمرين 41: العلوم الدقيقة 2002

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7 .
2. n عدد طبيعي غير معدوم.
ليكن $L_n = 9 \times C_{n+1}^2 + 27 \times C_{n+1}^3 + 81 \times C_{n+1}^4 + \dots + 3^{n+1} \times C_{n+1}^{n+1}$.
بيّن أن $L_n = 4^{n+1} - 3n - 4$.
3. عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n حتى يكون L_n من مضاعفات 7 .
4. نضع $S_n = L_1 + L_2 + \dots + L_n$.
احسب بدلالة n المجموع S_n .

التمرين 42: علوم الطبيعة والحياة 2001

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10 .
2. استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $7^{1422} - 63 \times 9^{2001}$ على 10 .
3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $[10] (n-1) \times 3^{2n+1} \equiv 3n \times 9^n + 7^{2n+1}$.
4. عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون: $[10] 3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0$.

التمرين 42: العلوم الدقيقة 2000

1. حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x', y') : $9x' - 14y' = 13$ علما أن $(3, 1)$ حل لها .
2. نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x, y) : $45x - 28y = 130$.
بيّن أنه إذا كان (x, y) حلا لهذه المعادلة فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5 ثم حل هذه المعادلة .
3. n عدد طبيعي يكتب $2\alpha\alpha 3$ في نظام تعداد أساسه 9 ويكتب $5\beta\beta 6$ في نظام تعداد أساسه 7 .
عيّن العددين الطبيعيين α و β ثم اكتب n في النظام العشري .