

كل تمارين الاعداد المركبة في الباك الجزائري محلولة بالتفصيل

التمرين بكالوريا 2008 علوم تجريبية م2

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$.
- (2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحتقائهما z_A و z_B على الترتيب حيث: $z_A = 2 + i$ و $z_B = -2 - i$.
- عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.
- (3) لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_C حيث: $z_C = \frac{4-i}{1+i}$.
- أكتب z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) .
- (4) (أ) برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ ونسبته k ($k > 0$) و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي: $z' - z_0 = k^{ei} (z - z_0)$.
- (ب) تطبيق: عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعروف بـ: $z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \left(z + \frac{1}{2}i \right)$.

حل التمرين باك ع ت 2008 م 2 :

- (1) حل المعادلة: $\Delta = (i)^2 - 4 \times (-2 - 6i) = -1 + 8 + 24i = 7 + 24i$.
- حساب جذر تربيعي لـ Δ : نبحث عن عددين حقيقيين x و y حيث: $(x + iy)^2 = 7 + 24i$.
- المعادلة $(x + iy)^2 = 7 + 24i$ تكافئ: $x^2 - y^2 + 2ixy = 7 + 24i$ بالإضافة إلى ذلك نستنتج من هذه المعادلة

$$\text{أن: } |x + iy|^2 = |7 + 24i| \text{ أي } x^2 + y^2 = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25$$

$$\text{نستنتج أن } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 7 \\ 2xy = 24 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} x^2 = \frac{25+7}{2} = 16 \\ y^2 = \frac{25-7}{2} = 9 \\ 2xy = 24 \end{cases}$$

ومنه نأخذ $x = 4$ و $y = 3$

$$\text{جذر تربيعي لـ } \Delta: 4 + 3i \text{ و } z_2 = \frac{-i + 4 + 3i}{2} = 2 + i \text{ و } z_1 = \frac{-i - 4 - 3i}{2} = -2 - 2i$$

$$(2) \text{ المركز } \omega \text{ للدائرة } (\Gamma) \text{ منتصف القطعة } [AB]. z_\omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-2 - 2i + 2 + i}{2} = -\frac{1}{2}i$$

$$(3) * \text{ كتابة } z_C \text{ على شكله الجبري: } z_C = \frac{4-i}{1+i} = \frac{(4-i)(1-i)}{2} = \frac{4-i-4i-1}{2} = \frac{3-5i}{2}$$

$$* \text{ إثبات أن النقطة } C \text{ تنتمي إلى الدائرة } (\Gamma) : \text{ يكفي أن نثبت أن } C = \frac{AB}{2}$$

$$\frac{AB}{2} = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|-2 - 2i - 2 - i|}{2} = \frac{|-4 - 3i|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\omega C = |z_C - z_\omega| = \left| \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i + \frac{1}{2}i \right| = \left| \frac{3}{2} - 2i \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

نستنتج أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

(4) أ) تكون نقطة M' صورة لنقطة M تختلف عن M₀ بالتشابه المباشر S الذي مركزه M₀ إذا تحقق ما يلي :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z'-z_0}{z-z_0} \right| = k \\ \arg \left(\frac{z'-z_0}{z-z_0} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{array} \right. \text{ تكافئ } \left\{ \begin{array}{l} |z'-z_0| = k |z-z_0| \\ \arg \left(\frac{z'-z_0}{z-z_0} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{array} \right. \text{ تكافئ } \left\{ \begin{array}{l} M_0 M' = k \times M_0 M \\ \left(\overrightarrow{M_0 M}, \overrightarrow{M_0 M'} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{array} \right.$$

نستنتج أن العددين المركبين $\frac{z'-z_0}{z-z_0}$ و $k(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ متساويين .

ومنه : $\frac{z'-z_0}{z-z_0} = k \times e^{i\theta}$ أي $z'-z_0 = k \times e^{i\theta} (z-z_0)$. نلاحظ أن لاحقة M₀ كذلك تحقق هذه العلاقة .

ب) التحويل S هو التشابه المباشر الذي مركزه النقطة التي لاحقتها $-\frac{1}{2}i$ أي ω ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

التمرين باك 2008 ش رياضيات الموضوع الاول

المستوي منسوب الى م م م . نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتهما $\sqrt{3}-i$ و $\sqrt{3}+3i$ على الترتيب

(1) أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول A الى B ثم عين زاويته ونسبته

(2) نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يأتي $A_0 = A$: ومن اجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1} = s(A_n)$.

نرمز الى لاحقة A_n بالرمز z_n

(أ) أنشئ في المستوي المركب النقط : A₀ و A₁ و A₂

(ب) برهن أن : $z_n = 2(\sqrt{3})^n \times e^{i\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$

(ج) عين مجموعة العداد الطبيعية n التي تنتمي من اجلها النقطة A_n الى المستقيم (OA₁)

(3) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = A_0 A_1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = A_n A_{n+1}$

(أ) بين ان المتتالية (u_n) هندسية يطلب تحديد حدها الاول u₀ واساسها q

(ب) استنتج عبارة بدلالة n

(ج) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

حل التمرين باك 2008 ش رياضيات م 1

A و B نقطتان من المستوي حيث : $z_A = \sqrt{3}-i$ و $z_B = \sqrt{3}+3i$

$S : M(Z) \rightarrow M'(Z')$

(1) $z'-z_0 = k e^{i\theta} (z-z_0)$

و هي العبارة المركبة للتشابه المباشر الذي مركزه المبدأ O و زاويته θ ونسبته k . حيث $z_0 = 0$

ولدينا : $(z_A) \xrightarrow{s} (z_B)$ و منه $z_B = k e^{i\theta} z_A$ و منه $k e^{i\theta} = \frac{z_B}{z_A} = \sqrt{3}i$

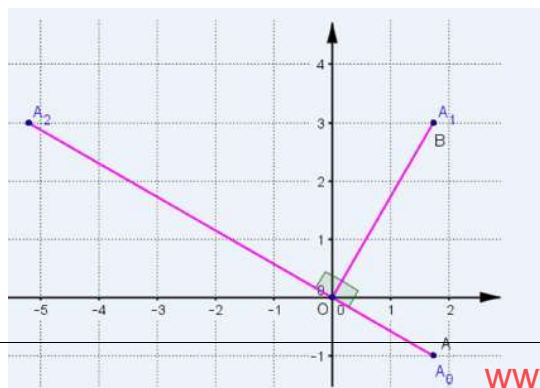
إذن العبارة المركبة للتشابه المباشر S هي $z' = \sqrt{3}i . z$

نسبة التشابه المباشر هي : $k = |\sqrt{3}i| = \sqrt{3}$ و زاويته هي

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

(2) لدينا $A_0 = A$ و $A_{n+1} = s(A_n)$

(أ) انشاء النقط A₀ و A₁ و A₂ التي لواحقها z₀ و z₁ و z₂



$$z_1 = i\sqrt{3} \times z_0 = i\sqrt{3}(\sqrt{3} - i) = 3i + \sqrt{3} \text{ ومنه } A_1 = s(A_0)$$

$$z_2 = i\sqrt{3} \times z_1 = i\sqrt{3}(3i + \sqrt{3}) = 3i - 3\sqrt{3} \text{ ومنه } A_2 = s(A_1)$$

$$z_n = 2(\sqrt{3})^n \times e^{i\left(n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} : \text{ (ب) إثبات أن من أجل كل عدد طبيعي :}$$

باستخدام مبدأ التراجع :

من أجل $n = 0$ الخاصية صحيحة لأن الطرف الأول $z_0 = \sqrt{3} - i$ لاحقة النقطة $A_0 = A$ والطرف الثاني

$$2(\sqrt{3})^0 \times e^{i\left(0\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{3} - i$$

$$z_{n+1} = 2(\sqrt{3})^{n+1} \times e^{i\left((n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} : \text{ نفرض أن } z_n = 2(\sqrt{3})^n \times e^{i\left(n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} \text{ ونثبت :}$$

$$z_{n+1} = \sqrt{3}i \times z_n = \sqrt{3}i \times 2(\sqrt{3})^n \times e^{i\left(n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} \text{ لدينا}$$

$$z_{n+1} = 2(\sqrt{3})^{n+1} \times e^{i\left((n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} \text{ ومنه } z_{n+1} = 2(\sqrt{3})^{n+1} \times e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\left(n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} = 2(\sqrt{3})^{n+1} \times e^{i\left(\frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$$

(ج) النقطة A_n تنتمي إلى المستقيم (OA_1) تعني أن النقاط O و A_1 و A_n في استقامة، أي أن $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_n}) = 0 + k\pi$

$$\text{و منه } \text{Arg}\left(\frac{z_n - z_0}{z_1 - z_0}\right) = k\pi \text{ أي } \text{Arg}\frac{z_n}{z_1} = k\pi \text{ ومنه } \text{Arg}z_n - \text{Arg}z_1 = k\pi \text{ إذن } \left(n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{\pi}{3}\right) = k\pi$$

$$\text{منه : } 3n - 1 - 2 = 6k \text{ إذن } n = 2k + 1$$

(3) لدينا المتتالية (u_n) حيث : $u_0 = A_0A_1$ و $u_n = A_nA_{n+1}$

(أ) من تعريف هذه المتتالية نكتب

$$u_{n+1} = A_{n+1}A_{n+2} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = |i\sqrt{3}z_{n+1} - i\sqrt{3}z_n| = |i\sqrt{3}(z_{n+1} - z_n)|$$

$$= |i\sqrt{3}||z_{n+1} - z_n| = \sqrt{3}(z_{n+1} - z_n) = \sqrt{3} \times A_nA_{n+1} = \sqrt{3} \times u_n$$

$$u_{n+1} = \sqrt{3} \times u_n \text{ ومنه } u_{n+1} = \sqrt{3} \times A_nA_{n+1} \text{ إذن}$$

و منه (u_n) متتالية هندسية حدها الأول

$$q = \sqrt{3} \text{ أساسها } u_0 = A_0A_1 = |z_1 - z_0| = |i\sqrt{3}z_0 - z_0| = |(i\sqrt{3} - 1)z_0| = |z_0||i\sqrt{3} - 1| = 2 \times 2 = 4$$

$$(ب) \text{ لدينا } u_n = u_0 \times q^n \text{ ومنه } u_n = 4(\sqrt{3})^n$$

$$(ج) \text{ حساب المجموع : } S_n = u_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{4}{\sqrt{3} - 1} ((\sqrt{3})^{n+1} - 1) = 2(\sqrt{3} + 1)((\sqrt{3})^{n+1} - 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{3})^{n+1} = +\infty \text{ (} \sqrt{3} > 1 \text{)}$$

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $z^2 - 6z + 18 = 0$

(2) ليكن العدد المركب $z_1 = 3 - 3i$

(أ) أكتب العدد z_1 على الشكل الأسّي

(ب) نعتبر العدد المركب z_3 حيث : $z_1 z_3 = 6(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$

استنتج قيمتي العددين $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$

(3) في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقاط $A; B; C$ لوحدها على الترتيب :

$$z_C = 6 ; z_B = 3 - 3i ; z_A = 3 + 3i$$

(أ) عين زاوية الدوران الذي مركزه O ويحول النقطة A إلى النقطة B

(ب) ما طبيعة الرباعي $OACB$

حل التمرين باك 2009 ت ر م 2:

(1) حل المعادلة : $z^2 - 6z + 18 = 0$

$$\Delta = 36 - 72 = -36 = 36i^2 \quad \text{ومنه الحلان : } z_2 = 3 + 3i ; z_1 = \frac{6 - 6i}{2} = 3 - 3i$$

(2) (أ) الشكل الاسي : $|z_1| = 3\sqrt{2}$ و $\sin \theta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \theta_1 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ اذن $\theta = -\frac{\pi}{4}$

وبالتالي الشكل الاسي : $z_1 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

(ب) استنتاج $\sin \frac{\pi}{12}$ و $\cos \frac{\pi}{12}$ حيث $z_1 z_3 = 6(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$

$$\text{ومنه } |z_1 z_3| = \left| 6(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}) \right| = 6 \quad \text{اذن } r_1 r_3 = 6 \quad \text{ومنه } r_3 \cdot 3\sqrt{2} = 6 \quad \text{اذن } r_3 = \sqrt{2}$$

وينتج ايضا ان : $\arg(z_1 z_3) = \arg 6(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}) = \frac{\pi}{12}$ اذن $\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ أي $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\begin{aligned} z_1 z_3 &= (3 - 3i)(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2}i - \frac{3\sqrt{2}}{2}i + \frac{3\sqrt{6}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{2} + i \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{وبالمطابقة نجد : } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \quad \text{و} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(3) (أ) الدوران r مركزه O و $r(A) = B$ ومنه $a = \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}$ أي $z_B - z_O = a(z_A - z_O)$

$$a = \frac{z_B}{z_A} = \frac{3 - 3i}{3 + 3i} = \frac{(3 - 3i)(3 - 3i)}{(3 + 3i)(3 - 3i)} = -i \quad \text{ومنه زاوية الدوران هي } -\frac{\pi}{2}$$

(ب) طبيعة الرباعي $OACB$: $z_{\overline{BC}} = z_C - z_B = 3 + 3i$ و $z_{\overline{OA}} = 3 + 3i$

اذن $\overline{OA} = \overline{BC}$ وبما أن $\arg(a) = \arg \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \arg \frac{z_B}{z_A} = -\frac{\pi}{2}$ اي $(\overline{OA}, \overline{OB}) = -\frac{\pi}{2}$

التمرين باك 2010 شعبة العلوم . الموضوع الأول

نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ النقطتين A, B لاحتقاهما على الترتيب :

$$z_B = 3i, z_A = 1 + i$$

(1) أكتب على الشكل الأسّي: z_A, z_B .

(2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحتقتها z النقطة M' لاحتقتها z' بحيث : $z' = 2iz + 6 + 3i$

(أ) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

(ب) عين z_C لاحتقتها C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

(ج) استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; -2), (C; 2)\}$

(أ) عين z_D لاحتقتها D .

(ب) عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

(4) لتكن M نقطة من المستوى تختلف عن B وعن D لاحتقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي

يكون من أجلها : $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

(أ) تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ) .

(ب) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ ، عين حينئذ المجموعة (Δ) .

حل التمرين باك 2010 شعبة العلوم . الموضوع 1 :

$$z_B = 3i, z_A = 1 + i \quad (1)$$

كتابة الشكل الأسّي: $|z_A| = |1 + i| = \sqrt{2}$ و $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$z_A = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{ومنه} \quad |z_B| = 3 \quad \text{ومنه} \quad z_B = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

(2) (أ) تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S : $z' = 2iz + 6 + 3i$ و $a = 2i$ و $b = 6 + 3i$

$|a| = 2$ ومنه S تشابه نسبته 2 وزاويته $\arg(a) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة :

$$z_0 = \frac{b}{1-a} = \frac{6+3i}{1-2i} = \frac{(6+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{15i}{5} = 3i$$

(ب) تعيين z_C لاحتقتها C صورة النقطة A بالتشابه S :

$$z_C = 2iz_A + 6 + 3i = 2i(1+i) + 6 + 3i = 4 + 5i \quad \text{ومنه} \quad z_C = 2iz_A + 6 + 3i$$

(ج) استنتج طبيعة المثلث ABC :

بما ان C صورة النقطة A بالتشابه S الذي مركزه B ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{2}$ فان $BC = 2BA$ و

$$B \text{ ومنه المثلث قائم في } B \quad (\overline{BA}, \overline{BC}) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$(3) \text{ النقطة } D \text{ مرجح الجملة } \{(A; 2), (B; -2), (C; 2)\}$$

$$(أ) \text{ تعيين } z_D \text{ لاحقة النقطة } D : z = \frac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2 - 2 + 2} = \frac{2(1+i) - 2(3i) + 2(4+5i)}{2} = 5 + 3i$$

(ب) طبيعة الرباعي ABCD .

$$\text{لدينا من السؤال (2) } (\overline{BA}, \overline{BC}) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ وبحساب الشعاعين : } \overline{AB} \text{ و } \overline{DC} \text{ نجد :}$$

$$\overline{AB} = \overline{DC} \text{ ومنه } z_{\overline{DC}} = 4 + 5i - (5 + 3i) = -1 + 2i \text{ و } z_{\overline{AB}} = 3i - (1 + i) = -1 + 2i$$

وبالتالي الرباعي ABCD متوازي اضلاع واحد زواياه قائمة اذن فهو مستطيل

$$(4) (\Delta) \text{ مجموعة النقط } M(z) \text{ التي يكون من أجلها : } \frac{z_B - z}{z_D - z} \text{ عددا حقيقيا موجبا تماما.}$$

$$(أ) \text{ النقطة } E \text{ حيث } z_E = 6 + 3i \text{ تنتمي إلى } (\Delta) \text{ معناه } \frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} \text{ عددا حقيقيا موجبا تماما}$$

$$\text{بالحساب نجد : } \frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} = \frac{3i - (6 + 3i)}{5 + 3i - (6 + 3i)} = \frac{-6}{-1} = 6 \text{ اذن النقطة } E \text{ تنتمي إلى } (\Delta)$$

$$(ب) \text{ التفسير الهندسي لعمدة } \frac{z_B - z}{z_D - z} : \text{ لدينا } \arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = (\overline{MD}, \overline{MB}) \text{ وبما ان } \frac{z_B - z}{z_D - z} \text{ عددا حقيقيا موجبا تماما}$$

$$\text{فان } \arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z} \text{ أي ان الزاوية } (\overline{MD}, \overline{MB}) = 0 + 2k\pi \text{ أي معدومة}$$

وبالتالي المجموعة (\Delta) للنقط M(z) هي المستقيم (BD) باستثناء القطعة [BD]

التمرين بكالوريا 2011 علوم تجريبية الموضوع الأول

نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، النقاط A, B, C لواحقتها على الترتيب:

$$z_A = -i ; z_B = 2 + 3i ; z_C = -4 + i$$

$$(1) (أ) \text{ أكتب على الشكل الجبري العدد المركب : } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$

$$(ب) \text{ عين طويلة العدد المركب } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \text{ و عمدة له ، و استنتج طبيعة المثلث ABC .}$$

$$(2) \text{ نعتبر التحويل } T \text{ في المستوى الذي يرفق بكل نقطة } M \text{ ذات اللاحقة } z \text{ النقطة } M' \text{ ذات اللاحقة } z' \text{ بحيث :}$$

$$z' = iz - 1 - i$$

(أ) عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة.

(ب) ما هي صورة النقطة B بالتحويل T .

$$(3) \text{ لتكن } D \text{ ذات اللاحقة } z_D = -6 + 2i$$

(أ) بين أن النقاط A, C, D في استقامة.

(ب) عين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى D .

(ج) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

حل التمرين باك 2011 ع ت م 1 :

$$z_A = -i ; z_B = 2 + 3i ; z_C = -4 + i$$

(أ) كتابة العدد المركب: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-4 + i + i}{2 + 3i + i} = \frac{-2 + i}{1 + 2i} = \frac{(-2 + i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{5i}{5} = i$$

(ب). تعيين الطويلة و العمدة :

$$\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = \frac{AC}{AB} = 1 \text{ أي } \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \text{ ومنه } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$$

و $\arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\pi}{2}$ وتعني ان $(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ اذن المثلث ABC قائم في A ومتقايس الساقين

$$(2) \quad z' = iz - 1 - i \quad \text{لدينا} \quad \arg(a) = \arg i = \frac{\pi}{2} \quad \text{ومنه التحويل } T \text{ دوران زاويته } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$z_0 = \frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{-(1+i)^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i = z_A \quad \text{ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة}$$

ومنه : مركز T هو النقطة $A(0; -1)$

(ب) تعيين صورة النقطة B بالدوران T : بفرض صورة B هي B' ذات اللاحقة $z_{B'}$ فيكون : $z_{B'} = iz_B - 1 - i$

ويكون $z_C = i(2 + 3i) - 1 - i = 2i - 3 - 1 - i = 4 + i = z_C$ اذن صورة النقطة B بالتحويل T هي النقطة C

(3) اثبات ان النقاط A, C, D في استقامية : يكفي اثبات ان العدد $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ حقيقي .

$$\left((\overline{AD}; \overline{AC}) = k\pi \right) \text{ و بالتالي } \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} \right) = k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (لأن في هذه الحالة يكون)}$$

$$\text{لدينا : } \frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{(-4 + i) - (-i)}{(-6 + 2i) - (-i)} = \frac{-4 + 2i}{-6 + 3i} = \frac{-2(2 - i)}{-3(2 - i)} = \frac{2}{3}$$

(ب) تعيين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول C الى D :

بفرض نسبة هذا التحاكي هي k : يكون : $\overline{AD} = k\overline{AC}$ و منه يكون : $z_D - z_A = k(z_C - z_A)$

$$\text{اذن : } k = \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} \quad \text{ولقد وجدنا : } \frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{2}{3} \quad \text{اذن : } k = \frac{3}{2}$$

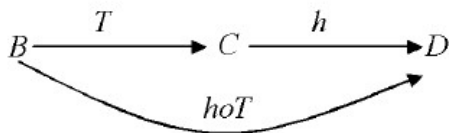
(ج) عناصر التشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B الى D :

$$\text{لدينا } C \text{ هي صورة } B \text{ بالدوران } T \text{ الذي مركزه } A \text{ و زاويته } \theta = \frac{\pi}{2}$$

و D هي صورة C بالتحاكي h الذي مركزه A و نسبته $k = \frac{3}{2}$ اذن D هي صورة B بمركب هذين التحويلين

ونعلم ان مركب دوران و تحاك لهما نفس المركز هو تشابه مباشر له نفس المركز و نسبته هي نسبة التحاكي و زاويته هي

زاوية الدوران . اذن : $S = hoT$



ومنه مركز التشابه المباشر S هو A , نسبته $k = \frac{3}{2}$ و زاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$

التمرين بكالوريا 2011 علوم تجريبية الموضوع الثاني

نعتبر في المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ النقاط A, B, C لواحقتها على الترتيب :

$$z_A = 3 - 2i, \quad z_B = 3 + 2i, \quad z_C = 4i$$

(1) علم النقاط A, B, C

(ب) ما هي طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ إجابتك.

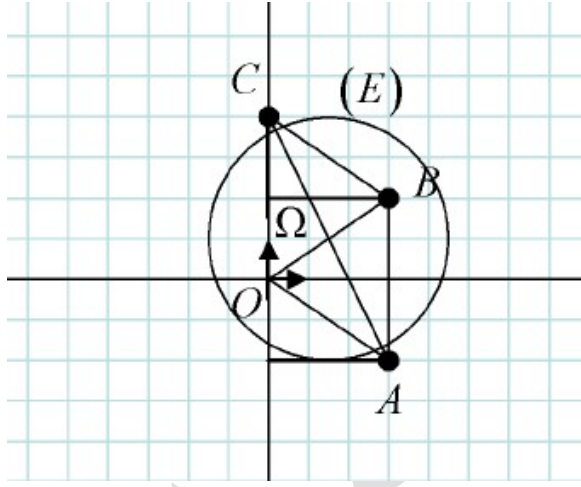
(ج) عين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

(2) عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقاط M من المستوي التي تحقق: $\|\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 12$

(3) (أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 6z + 13 = 0$ نسمي z_0, z_1 حلي هذه المعادلة

(ب) لنكن M نقطة من المستوي لاحتقتها z . عين مجموعة النقاط M من المستوي التي تحقق: $|z - z_0| = |z - z_1|$

حل التمرين باك 2011 علوم تجريبية الموضوع الثاني:



(1) أ) تعلیم النقاط A, B, C :

(ب) طبيعة الرباعي $OABC$:

$$\text{لدينا: } z_B - z_A = (3 + 2i) - (3 - 2i) = 4i = z_C$$

$$\text{إذن: } \vec{AB} = \vec{OC}$$

ومنه الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع

(ج) تعيين لاحقة النقطة Ω مركز $OABC$:

إن Ω هي منتصف $[OB]$

$$\text{ومنه: } z_\Omega = \frac{z_O + z_B}{2} = \frac{0 + 3 + 2i}{2} = \frac{3}{2} + i$$

(2) تعيين و انشاء مجموعة النقاط (E) : لدينا: $\|\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 12$

$$\text{ويكون: } \|\vec{M\Omega} + \vec{\Omega O} + (\vec{M\Omega} + \vec{\Omega A}) + (\vec{M\Omega} + \vec{\Omega B}) + (\vec{M\Omega} + \vec{\Omega C})\| = 12$$

$$\text{ومنه: } \|\vec{M\Omega} + \underbrace{(\vec{\Omega O} + \vec{\Omega A} + \vec{\Omega B} + \vec{\Omega C})}_0\| = 12 \quad \text{اذن } \|4\vec{M\Omega}\| = 12 \quad \text{ومنه: } 4M\Omega = 12 \quad \text{اذن: } M\Omega = 3$$

ومنه المجموعة (E) دائرة مركزها Ω و نصف قطرها $r = 3$

(3) (أ) حل المعادلة: $z^2 - 6z + 13 = 0$

$$\text{لدينا: } \Delta = (-6)^2 - 4(1)(13) = 36 - 52 = -16 = 16i^2 = (4i)^2$$

$$\text{فتقبل المعادلة حلين مترافقين هما: } z_0 = \frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i \quad \text{و } z_1 = 3 + 2i$$

(ب) تعيين مجموعة النقاط M بحيث $|z - z_0| = |z - z_1|$:

نلاحظ ان : $z_0 = z_A$ و $z_1 = z_B$ ومنه $|z - z_0| = |z - z_1|$ يعني أن $AM = BM$ إذن : مجموعة النقط M هي المستقيم محور القطعة $[AB]$

التمرين باك 2011 رياضي م 1

- المستوي مزود بمعلم متعامد متجانس $A(o, \vec{u}, \vec{v})$ ، B و C نقط لواحقها على الترتيب : $z_A = 1 - i$ ، $z_C = \sqrt{3}(1 + i)$ ، $z_B = -1 + i$
- (1) اكتب على الشكل الاسي الاعداد z_A و z_B و z_C
- (2) (أ) احسب الطويلة والعمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ثم فسر النتائج المحصل عليها
- (ب) حدد طبيعة المثلث ABC
- (3) عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معيناً
- (4) T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = (-1 + i)z + 1 - 3i$
- (أ) عين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة
- (ب) استنتج طبيعة التحويل ToT وعناصره المميزة

حل التمرين باك 2011 رياضي

- (1) كتابة على الشكل الاسي الاعداد $z_A = 1 - i$ ، $z_B = -1 + i$ ، $z_C = \sqrt{3}(1 + i)$
- $z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ومنه $\arg(z_A) = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ و $|z_A| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
- $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ومنه $\arg(z_B) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ و $|z_B| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $z_C = \sqrt{6}.e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه $\arg(z_C) = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ و $|z_C| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{6}$ ومنه $z_C = \sqrt{3} + \sqrt{3}i$
- (2) (أ) حساب طويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$:
- نلاحظ أن $z_B = i(i+1)$ و $z_A = -i(i+1)$ ومنه
- $$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{i(i+1) + i(i+1)}{\sqrt{3}(i+1) + i(i+1)} = \frac{2i(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$
- ومنه $\left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{3}$
- التفسير الهندسي : $AB = AC = 1$ و $(\overline{AC}, \overline{AB}) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$
- (ب) طبيعة المثلث ABC :
- مما سبق $AB = AC$ و $(\overline{AC}, \overline{AB}) = \frac{\pi}{3}$ نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.
- (3) إيجاد لاحقة النقطة D :

حتى يكون الرباعي $ACBD$ متوازي اضلاع يجب أن يكون $AC = BC$ و وجدناها سابقا لان المثلث

$$ABC \text{ متقايس الأضلاع } \vec{AC} = \vec{DB} \text{ أي } z_C - z_A = z_B - z_D \text{ ومنه } z_D = z_A + z_B - z_C$$

$$\text{ومنه } z_D = -\sqrt{3} - i\sqrt{3} \text{ ومنه } z_D = 1 - i - 1 + i - (\sqrt{3}(1+i)) = -\sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

$$(4) \text{ (أ) طبيعة التحويل } T : \text{ حيث } z' = (-1+i)z + 1 - 3i$$

$$\text{بما أن } |-1+i| = \sqrt{2} \neq 1 \text{ فإن } T \text{ تشابه مباشر نسبته } \sqrt{2} \text{ وزاويته } \arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4} \text{ ومركزه}$$

$$\text{النقطة الصامدة ذات اللاحقة : } \frac{b}{1-a} = \frac{1-3i}{1-(-1+i)} = \frac{(1-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{5-5i}{5} = 1-i = z_A$$

$$\text{ومنه } T \text{ تشابه مركزه } A \text{ ونسبته } \sqrt{2} \text{ وزاويته } \frac{3\pi}{4}$$

(ب) استنتاج طبيعة التحويل ToT :

$$\text{بما أن } T \text{ تشابه مركزه } A \text{ ونسبته } \sqrt{2} \text{ وزاويته } \frac{3\pi}{4} \text{ فإن } ToT \text{ تشابه مركزه } A \text{ ونسبته } (\sqrt{2})^2 = 2 \text{ وزاويته}$$

$$2 \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \text{ أي } ToT \text{ تشابه مركزه } A \text{ ونسبته } 2 \text{ وزاويته } -\frac{\pi}{2}$$

التمرين : باك 2012 علوم تحريية الموضوع الأول:

$$(1) \text{ نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة } \mathbb{C} \text{ المعادلة ذات المجهول } z \text{ التالية: } z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i} \text{ (حيث } z \neq 2-3i \text{)}$$

حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

(2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. A و B نقطتان لاحتقاهما على الترتيب :

$$z_B = 1 - i\sqrt{5} \text{ و } z_A = 1 + i\sqrt{5} \text{ حيث:}$$

- تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

$$(3) \text{ نرفق بكل نقطة } M \text{ من المستوي لاحتقتها } z \text{ ، النقطة } M' \text{ لاحتقتها } z' \text{ حيث: } z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$$

النقط C ، D ، E لواحقتها على الترتيب: $z_c = -2i$ ، $z_D = 2-3i$ و $z_c = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$

(أ) عبر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM .

(ب) استنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف

قطرها . تحقق أن E تنتمي إلى (γ) .

حل التمرين باك 2012 ع ت الموضوع 1:

(1) - حل المعادلة :

$$z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i} \text{ ومنه } z(z-2+3i) = 3i(z+2i) \text{ ومنه } z^2 - 2z + 3iz = 3iz - 6 \text{ أي } z^2 - 2z + 6 = 0$$

$$\text{حل المعادلة } z^2 - 2z + 6 = 0 \text{ بالميز : } \Delta = (-2)^2 - 4(1)(6) = -20 = (2\sqrt{5}i)^2$$

وعليه المعادلة تقبل حلين مترافقين هما : $z' = 1 - \sqrt{5}i$ و $z'' = 1 + \sqrt{5}i$

(2) - التحقق أن A ، B تنتميان إلى دائرة واحدة مركزها O :

لدينا : $|z_A| = |z_B| = \sqrt{6}$ أي $OA = OB = \sqrt{6}$ ومنه A ، B تنتميان إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{6}$

(3) (أ) - التعبير عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM :

$$|z'| = \left| \frac{3i(z - (-2i))}{z - (2 - 3i)} \right| \text{ أي } z' = \frac{3i(z - (-2i))}{z - (2 - 3i)} \text{ ومنه } |z'| = \frac{3i(z - (-2i))}{z - (2 - 3i)}$$

$$OM' = \frac{3CM}{DM} \text{ ومنه } |z'| = OM' \text{ و } \frac{|3i(z - (-2i))|}{|z - (2 - 3i)|} = \frac{|3i| |z - (-2i)|}{|z - (2 - 3i)|} = \frac{3CM}{DM}$$

(ب) - استنتاج أن $M \in (\Delta)$ تكافئ M' تنتمي لدائرة (γ) :

لدينا $OM' = \frac{3CM}{DM}$ وبما أن (Δ) محور القطعة $[CD]$ فإن من أجل $M \in (\Delta)$ فإن $CM = DM$ و $OM' = 3$ ومنه

و من العلاقة $OM' = 3$ نستنتج أن M' تنتمي للدائرة (γ) مركزها O ونصف قطرها 3 .

- التحقق أن النقطة E تنتمي إلى (γ) :

E تنتمي إلى (γ) معناه $OE = 3$ ولدينا $OE = |z_E| = |3i| = 3$ محققة

التمرين: باك 2012 علوم تجريبية الموضوع الثاني:

(1) $p(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث:

(أ) تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $p(z)$.

(ب) حدد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $p(z) = (z - 6)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

(ج) - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$. المعادلة $p(z) = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. A ، B ، C نقط من المستوي المركب

لواحقها على الترتيب: $z_A = 6$ ، $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 3 - i\sqrt{3}$

(أ) أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.

(ب) أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسّي.

(ج) إستنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C و نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

(أ) جد الكتابة المركبة للتشابه S .

(ب) عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

(ج) بين أن النقط A ، B ، A' في استقامة.

حل التمرين باك 2012 ع ت م 2

(1) (أ) التحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $p(z)$:

$$p(6) = 6^3 - 12 \times 6^2 + 48 \times 6 - 72 = 0$$

(ب) تحديد العددين الحقيقيين α و β

$$p(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72:$$

بالنشر والمطابقة نجد $\alpha = -6$ و $\beta = 12$

$$(ج) - \text{حل المعادلة } p(z) = 0 \text{ معناه } (z-6)(z^2 - 6z + 12) = 0$$

$$\text{ومنه } z = 6 \text{ أو } z = 3 + i\sqrt{3} \text{ أو } z = 3 - i\sqrt{3}$$

$$(2) \quad Z_C = 3 - i\sqrt{3}, Z_B = 3 + i\sqrt{3}, Z_A = 6$$

(أ) كتابة كلا من Z_C, Z_B, Z_A على الشكل الأسّي.

$$Z_C = 3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ و } Z_B = 3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}, Z_A = 6 = 6e^{i0}$$

(ب) كتابة العدد المركب $\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C}$ على الشكل الجبري:

$$\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} = \frac{6 - 3 - i\sqrt{3}}{6 - 3 + i\sqrt{3}} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} \times \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{9 - 3 - 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه } \arg\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\pi}{3} \text{ و } \left|\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$$

(ج) استنتاج طبيعة المثلث ABC .

$$\text{لدينا من السؤال (ب): } \left|\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C}\right| = 1 \text{ تعني } AB = AC \text{ و } \frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ أي } (\overline{CA}, \overline{CB}) = -\frac{\pi}{3}$$

وهذا يعني أن ABC مثلث متقايس الاضلاع.

$$(3) \quad S \text{ التشابه المباشر الذي مركزه } C \text{ و نسبته } \sqrt{3} \text{ و زاويته } \frac{\pi}{2}$$

$$(أ) \text{ الكتابة المركبة للتشابه } S: (z' - z_C) = \sqrt{3} \times e^{i\frac{\pi}{2}} (z - z_C) \text{ ومنه } z' = i\sqrt{3}z - 4i\sqrt{3}$$

(ب) تعيين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S :

$$z' = i\sqrt{3}z - 4i\sqrt{3} \text{ ومنه } z_{A'} = i\sqrt{3}z_A - 4i\sqrt{3} \text{ أي } z_{A'} = i\sqrt{3}(6) - 4i\sqrt{3} \text{ ومنه } z_{A'} = 2i\sqrt{3}$$

(ج) تبيان أن النقط A, B, A' في استقامية:

$$\overrightarrow{AA'} = -2\overrightarrow{AB} \text{ ومنه } (z_{A'} - z_A) = -2(z_A - z_B) \text{ ومنه النقط } A, B, A' \text{ في استقامية.}$$

التمرين: بابك 2013 علوم تجريبية الموضوع الأول:

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (1) ذات المجهول z : (1) $z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0$ حيث α حقيقي.

$$(2) \text{ من أجل } \alpha = \frac{\pi}{3}, \text{ نرسم إلى حلي المعادلة (1) } z_1 \text{ و } z_2. \text{ بين أن: } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$$

(3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A, B, C التي لواحقتها:

$$z_A = 1 + i\sqrt{3}, z_B = 1 - i\sqrt{3} \text{ و } z_C = 4 + i\sqrt{3} \text{ على الترتيب.}$$

(أ) انشئ النقط A, B, C .

(ب) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و

يطلب تعيين نسبته و زاويته.

(ج) عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1), (B;-1), (C;2)\}$. ثم أنشئ G .

(د) أحسب لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

حل التمرين باك 2013 ع ت . م 1:

$$(1) \text{ حل المعادلة: } (1) \dots z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0$$

$$\Delta' = b^2 - ac = (2\cos\alpha)^2 - 4 = 4\cos^2\alpha - 4$$

$$\Delta = 16\cos^2\alpha - 16 = -16(1 - \cos^2\alpha) = -16\sin^2\alpha = (4i\sin\alpha)^2$$

ومنه المعادلة تقبل حلين مترافقين هما : $z_1 = 2\cos\alpha + 2i\sin\alpha$ و $z_2 = 2\cos\alpha - 2i\sin\alpha$

$$(2) \text{ تبيان أن } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$$

$$\text{من أجل } \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ يكون } z_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3}$$

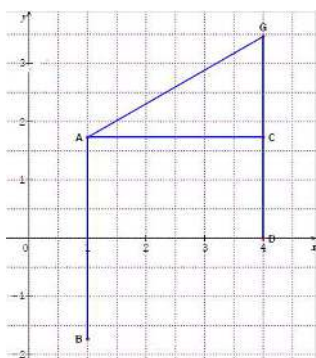
$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ و } z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{2013} = e^{\frac{4026\pi i}{3}} = e^{671(2\pi i)} = \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k) = 1$$

(2) (أ) إنشاء النقط A, B و C لإنشاء النقطتين A, B نستعمل

الإحداثيات القطبية

$$\text{حيث } z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_B = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}, \quad z_C = 4 + i\operatorname{Im}(z_A)$$



(ب) كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{3}{-2i\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

استنتاج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و تعيين نسبته و زاويته.

$$\text{من الجواب السابق لدينا : } (*) \dots \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ تكافئ } (z_C - z_A) = \frac{i\sqrt{3}}{2}(z_B - z_A)$$

المساواة الأخيرة تعني أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

(ج) تعيين لاحقة النقطة G و إنشاءها

$$z_G = \frac{z_A - z_B + 2z_C}{1 - 1 + 2} = 4 + 2i\sqrt{3} \text{ ومنه } \{(A;1), (B;-1), (C;2)\}$$

$$z_G = 4 + i 2 \operatorname{Im}(z_A) \text{ ومنه}$$

(د) - تعيين لاحقة z_D بحيث يكون $ABDG$ متوازي أضلاع .

$$ABDG \text{ متوازي أضلاع معناه } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GD} \text{ معناه } z_D - z_G = z_B - z_A \text{ معناه } z_D = z_G + z_B - z_A = 4$$

التمرين : باك 2013 علوم تجريبية الموضوع الثاني:

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية: $z^2 + 4z + 13 = 0$

تحقق أن العدد المركب $z_1 = -2 - 3i$ حل للمعادلة (E)، ثم جد الحل الآخر .

(2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحتقاهما $z_A = -2 - 3i$ و $z_B = i$ على الترتيب . S التشابه المباشر الذي

مركزه A و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

$$(أ) \text{ بين أن } z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$$

(ب) أحسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

(3) لتكن النقطة D حيث: $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

(أ) بين أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما .

(ب) أحسب z_D لاحقة النقطة D .

(ج) - بين أن: $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

حل التمرين باك 2013 ع 2 م 2

(1) - التحقق أن $z_1 = -2 - 3i$ هو حل للمعادلة $z^2 + 4z + 13 = 0$ معناه $z_1^2 + 4z_1 + 13 = 0$

$$\text{لدينا } (-2 - 3i)^2 + 4(-2 - 3i) + 13 = 4 - 9 + 12i - 8 - 12i + 13 = 0$$

المعادلة (E) معاملات حقيقية و $\Delta' = -9$ أي $\Delta' < 0$ ومنه تقبل حلين مترافقين $z_2 = \overline{z_1} = -2 + 3i$

$$(2) \text{ أ) - تبين أن } z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$$

لدينا S تشابه مركزه A ويحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ أي $M'(z') = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}(z - z_A)$ و $z_A = -2 - 3i$ و $z' - z_A = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}(z - z_A)$

$$\text{ومنه العبارة المركبة للتشابه } S \text{ هي : } z' = \frac{1}{2}iz + \left(1 - \frac{1}{2}i\right)(-2 - 3i) = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$$

(ب) - حساب z_C لاحقة النقطة C :

$$\text{لدينا } C \text{ صورة النقطة } B \text{ بالتشابه } S \text{ وهذا يعني } z_C = \frac{1}{2}i \times z_B - \frac{7}{2} - 2i$$

$$\text{ومنه } z_C = \frac{1}{2}i(i) - \frac{7}{2} - 2i = -4 - 2i$$

(3) (أ) - تبين أن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب حسابهما :

D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين معناه $\alpha \overrightarrow{DA} + \beta \overrightarrow{DB} = \vec{0}$

النقطة D تحقق العلاقة الشعاعية (1)..... $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

ومنه (1) تكافئ $\vec{0} = -2\overrightarrow{DA} + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB})$ تكافئ $-2\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$

تكافئ $\vec{0} = -3\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ أي أن $\alpha = -3$ و $\beta = 1$.

الخلاصة: D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين -3 و 1 على الترتيب.

(ب) - حساب z_D لاحقة النقطة D

$$z_D = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta} = \frac{-3(-2-3i) + 1(i)}{-3+1} = -3-5i \text{ ومنه } \{(A; -3), (B; 1)\} \text{ لدينا } D \text{ مرجح الجملة}$$

(ج) - تبيان أن: $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$ واستنتاج طبيعة المثلث ACD

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{(-3-5i) - (-2-3i)}{(-4-2i) - (-2-3i)} = \frac{-1-2i}{-2+i} = i \text{ لدينا}$$

$$\left| \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1 \text{ لدينا } \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ (1) وتعني } AD = AC \text{ وتعني } \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ (2)}$$

من (1) و (2) نجد: المثلث ACD قائم في A ومتساوي الساقين.

التمرين باك علوم تجريبية 2014 الموضوع الأول:

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، لتكن النقط A, B, C و D التي لاحقاتها على

$$\text{الترتيب: } z_A = 3\sqrt{2}(1+i), z_B = \overline{z_A}, z_C = 6\sqrt{2} \text{ و } z_D = \frac{z_C}{2}$$

(أ) أكتب z_A, z_B, z_C و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي.

$$(ب) أحسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$$$

(ج) - بين أن النقط O, A, B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها.

(د) - أحسب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم جد قياسا للزاوية $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$. ما هي طبيعة الرباعي $OACE$ ؟

(3) ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

(أ) أكتب العبارة المركبة للدوران R .

(ب) عين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط C', C و A في استقامة.

(ج) - عين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

حل التمرين باك 2014 ع ت . م 1

(1) - حل المعادلة: $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$

$$\Delta = -72 = -36 \times 2 = (6i\sqrt{2})^2$$

ومنه أو الحلان $z = 3\sqrt{2}(1+i)$ أو $z = 3\sqrt{2}(1-i)$

(2) (أ) كتابة $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B = 3\sqrt{2}(1-i)$ و $z_A(1+i)$ على الشكل الأسّي :

$$\text{لدينا } z_B = \overline{z_A} \text{ لأن } z_B = 6e^{-\frac{\pi}{4}i} \text{ و } z_A = 3\sqrt{2}(1+i) = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 6e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$\text{و } (1+i)z_A = 3\sqrt{2}(1+i)^2 = 6\sqrt{2}i = 6\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$\text{ب) - حساب } \left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}} \right)^{2014}$$

$$\text{لدينا من الجواب السابق } (1+i)z_A = 6\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i} \text{ وعليه } \frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}} = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}} \right)^{2014} = \left(e^{\frac{\pi}{2}i} \right)^{2014} = e^{\frac{2014\pi}{2}i} = e^{1007\pi i} = \cos(\pi + 503 \cdot (2\pi)) + i \sin(\pi + 503 \cdot (2\pi)) = \text{اذن}$$

$$= \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

(ج) - تبين أن النقط O, A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D وتعيين نصف قطرها

$$\text{نبين أن } DO = DA = DB = DC$$

$$\text{لدينا : } DO = |z_D - z_O| = |3\sqrt{2}i| = 3\sqrt{2} \text{ ، } DA = |z_D - z_A| = |-3\sqrt{2}i| = 3\sqrt{2}$$

$$DB = |z_D - z_B| = |3\sqrt{2}i| = 3\sqrt{2} \text{ ، } DC = |z_D - z_C| = |-3\sqrt{2}i| = 3\sqrt{2}$$

ومنه النقط O, A, B, C تنتمي لنفس الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $3\sqrt{2}$

$$\text{(د) - حساب } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \text{ لدينا : } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{3\sqrt{2}(1-i) - 6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}(1+i) - 6\sqrt{2}} = \frac{-(1+i)}{(-1+i)} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$$

$$\text{العلاقة } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i \text{ تعني } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{\frac{\pi}{2}i} \text{ أي قياس الزاوية } (\overline{CA}; \overline{CB}) \text{ هو } \frac{\pi}{2} \text{ و } CA = CB.$$

من الجواب (ج) و (د) السابقين نستنتج أن الرباعي $OACB$ مربعاً لأن $CA = CB$ و $(\overline{CA}; \overline{CB})$ الزاوية $\frac{\pi}{2}$ هو

اذن المثلث ACB قائم في C ومن النتائج $DO = DA = DB = DC$ تعني القطران $[OC]$ و $[AB]$ متناصفان

$$(3) \text{ أ) - كتابة العبارة المركبة للدوران } R \text{ الذي مركزه } O \text{ و زاويته } \frac{\pi}{2}$$

$$\text{العبارة المركبة للدوران هي } z' - z_O = 1e^{\frac{\pi}{2}i}(z - z_O) \text{ وعليه } z' = e^{\frac{\pi}{2}i}z$$

ب) - تعيين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R :

$$\text{لدينا : } z' = e^{\frac{\pi}{2}i}z \text{ ومنه } z_{C'} = e^{\frac{\pi}{2}i}z_C = 6\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i} = 6\sqrt{2}i \text{ اذن } z_{C'} = 6\sqrt{2}i$$

$$\text{لدينا } \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC'} \text{ اذن } z_{\overline{AC}} = 3\sqrt{2}(1-i) = -3\sqrt{2}(1-i) = -z_{\overline{AC'}}$$

ومنه النقط C, A و C' في استقامة .

ج) - تعيين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R وتحديد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R :

$$\text{لدينا } z' = e^{\frac{\pi}{2}i}z \text{ ومنه } z_{A'} = e^{\frac{\pi}{2}i}z_A = e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot 6\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = 6\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} = -z_B \text{ اذن } z_{A'} = 6\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} = -z_B$$

$$\text{لدينا } R(O) = O \text{ ، } R(A) = A' \text{ ، } R(C) = C' \text{ و } R(B) = A$$

ومنه صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R هي المربع $OA'C'A$.

التمرين باك 2014 علوم تجريبية الموضوع الثاني:

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث: $(z-i)(z^2-2z+5)=0$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (وحدة الطول $1cm$)

تعطى النقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$ و $z_C=1-2i$ على الترتيب.

(أ) أنشئ النقط A ، B و C .

(ب) جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC)

(ج) - أحسب مساحة المثلث ABC .

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

(أ) عين الكتابة المركبة للتشابه S .

(ب) بين أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$.

(4) M نقطة لاحقتها z . عين مجموعة النقط M حيث: $|z|=|iz+1+2i|$

حل التمرين باك 2014 ع ت . م 2 :

(1) - حل المعادلة: $(z-i)(z^2-2z+5)=0$ تكافئ $z=i$ أو $z^2-2z+5=0$

$\Delta = -16 = (4i)^2$ ومنه الحلان: $z=1+2i$ أو $z=1-2i$

الخلاصة: الحلول هي: $z=i$ أو $z=1-2i$ أو $z=1+2i$

(2) (أ) - إنشاء النقطة A ، B و C : لدينا $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$ و $z_C=1-2i$

. النقطتان B و C متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل .

(ب) - إيجاد z_H لاحقة النقطة H :

لدينا : النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC)

اذن H لها نفس الفاصلة مع B ونفس الترتيب مع A ومنه $z_H=1+i$

(ج) - حساب مساحة المثلث ABC :

مساحة المثلث ABC هي : $S_{ABC} = \frac{AH \cdot BC}{2}$

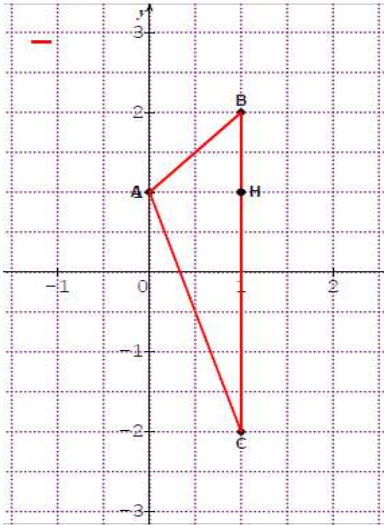
لدينا $AH = |z_H - z_A| = 1$ و $BC = |z_C - z_B| = |-4i| = 4$

ومنه $S_{ABC} = \frac{1 \times 4}{2} = 2cm^2$

(3) (أ) - تعيين الكتابة المركبة للتشابه S :

العبارة المركبة للتشابه الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ هي : $z' - z_A = \frac{1}{2} \times e^{i\frac{\pi}{2}} (z - z_A)$ ومنه

$z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1}{2} + i$: ومنه $z' = \frac{1}{2} \cdot i \cdot z + \left(1 - \frac{1}{2} \cdot i\right)i$ اي $z' = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}z + \left(1 - \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}\right)z_A$



(ب) - تبين أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2} cm^2$:

بما أن نسبة التشابه المباشر S هي $\frac{1}{2}$ فإن مساحة صورة المثلث ABC هي : $S' = \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2} cm^2$

(4) - تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $|z| = |iz + 1 + 2i|$

$|z| = |iz + 1 + 2i|$ تكافئ $|z| = |i(z - i + 2)|$ اي $|z| = |i| |z - (-2 + i)|$ ومنه $|z| = |z - (-2 + i)|$ وبوضع

$M(z)$ و $O(0)$ و $D(-2 + i)$ فإن العبارة الاخيرة تكتب على الشكل $OM = DM$

وعليه مجموعة النقط $M(z)$ هي محور القطعة المستقيمة $[OD]$

التمرين بكالوريا 2014 رياضيات :م 1

(1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(z - 1 - 2i)(z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3}) = 0$

(2) نعتبر في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A, B, C, D لاحقتاهما على الترتيب

$z_D = 1 - 2i$, $z_C = 1 + \sqrt{3} - i$; $z_B = 1 + \sqrt{3} + i$; $z_A = 1 + 2i$

(أ) بين أن $AB = CD$ و (AD) يوازي (BC) .

(ب) تحقق أن $\frac{z_B + z_D}{2} \neq \frac{z_A + z_C}{2}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

(3) (أ) - بين أن $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{3} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$. استنتج أن D هو صورة A بتشابه مباشر مركزه B يطلب تعيين نسبته و زاويته

(ب) - بين أن المثلث ADB قائم و أن النقط $A; B; C; D$ تنتمي إلى دائرة يطلب تحديد مركزها و نصف قطرها .
استنتج إنشاء الرباعي $ABCD$.

حل التمرين باك 2014 ش رياضيات :م 1

(1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(z - 1 - 2i)(z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3}) = 0$

لدينا $(z - 1 - 2i)(z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3}) = 0$ يكافئ $z - 1 - 2i = 0$ أي $z = 1 + 2i$

أو $z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$ ومميزها $\Delta = -4$ فنجد : $z = 1 + \sqrt{3} + i$ أو $z = 1 + \sqrt{3} - i$

إذن ، حلول المعادلة هي $1 + 2i$ ، $1 + \sqrt{3} + i$ ، $1 + \sqrt{3} - i$

(2) (أ) - تبين أن : $AB = CD$ و (AD) يوازي (BC) :

لدينا : $z_D = 1 - 2i$, $z_C = 1 + \sqrt{3} - i$; $z_B = 1 + \sqrt{3} + i$; $z_A = 1 + 2i$

$DC = |1 - 2i - 1 - \sqrt{3} + i| = |-\sqrt{3} - i| = 2$ و $AB = |z_B - z_A| = |1 + \sqrt{3} + i - 1 - 2i| = |\sqrt{3} - i| = 2$

ولدينا : $z_D - z_A = \bar{z}_A - z_A = -4i$ و $z_C - z_B = z_C - \bar{z}_C = -2i$ ومنه $\overline{AD} = 2\overline{BC}$ مرتبطان خطيا

ومنه (AD) يوازي (BC)

(ب) - التحقق أن $\frac{z_B + z_D}{2} \neq \frac{z_A + z_C}{2}$ واستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

$z_B + z_D = 2 + \sqrt{3} - i$ و $z_A + z_C = 2 + \sqrt{3} + i$ ومنه $\frac{z_B + z_D}{2} \neq \frac{z_A + z_C}{2}$

الاستنتاج : بما ان $\frac{z_B + z_D}{2} \neq \frac{z_A + z_C}{2}$ فان القطرين $[AC]$ و $[BD]$ غير متتافين و $AB = CD$

ومنه $ABCD$ شبه منحرف متقايس السابقين .

$$(3) \text{ (أ) } - \text{ تبيان أن } \frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ لدينا : } z_D - z_B = -\sqrt{3}(1+i\sqrt{3}) \text{ و } z_A - z_B = -(\sqrt{3}-i)$$

$$\text{ومنه } \frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ إذن } \frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-\sqrt{3}(1+i\sqrt{3})}{-(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)}{4} = \frac{4\sqrt{3}i}{4} = \sqrt{3}i$$

$$\text{الاستنتاج : لدينا } (z_D - z_B) = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}} (z_A - z_B) \text{ أي } \begin{cases} BD = BA\sqrt{3} \\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$$

إذن : D هي صورة A بالتشابه المباشر الذي مركزه B ونسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

(ب) - تبيان أن المثلث ADB قائم :

مما سبق $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD} \right) = \frac{\pi}{2}$ أي $(BA) \perp (BD)$ ومنه المثلث ADB قائم في B .

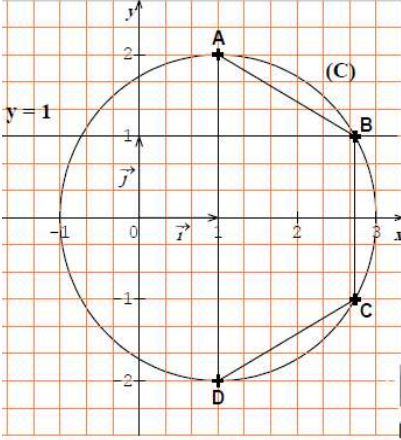
اذن النقط A, B و D تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[AD]$ ومركزها $I(1;0)$.

بما أن النقطتين B و C متناظرتان بالنسبة إلى محور الفاصل فإن $IB = IC$.

اذن النقط A, B, C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $I(1;0)$ ونصف قطرها $IA = 2$.

(ج) - استنتاج إنشاء الرباعي $ABCD$:

نمكن (C) الدائرة التي مركزها $I(1;0)$ وتمر بالنقطة $A(1,2)$. وبما أن ترتيب النقطة B هو 1 فإن B هي نقطة تقاطع الدائرة (C) والمستقيم الذي معادلته $y=1$ وفاصلتها موجبة و C هي نظيرة B بالنسبة لمحور الفواصل.



التمرين بكالوريا 2014 ش رياضيات م 2

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ النقطتان $A; B$; لاحقتهما على الترتيب :

$$b = -1 + 2i; a = 2 + 6i$$

(1) أكتب العدد المركب $1+i$ على شكل أسّي

(2) S التحويل النقطي الذي يرفق بكل M نقطة لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث $z' = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z + 2$.

(أ) D النقطة ذات اللاحقة d حيث $d = 2i$ جد لاحقة النقطة D' صورة D بالتحويل S ماذا تستنتج ؟

(ب) بين أن $z' - d = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (z - d)$ واستنتج طبيعة و عناصر التحويل S

$$(3) (\Delta) \text{ المستقيم ذو المعادلة } 3x + 5y = 11$$

(أ) تحقق أن النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي إلى (Δ) ثم عين نقط (Δ) التي إحداثياتها أعدادا صحيحة.

(ب) M_0' صورة M_0 بالتحويل S بين أن المستقيمين (BM_0') و (BM_0) متعامدان.

x, y عدنان صحيحان من المجال $[-5; 5]$ عين مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي بحيث يكون المستقيمان (BA) ; (BM') متعامدين حيث M' هي صورة M بالتحويل S

حل التمرين باك 2014 رياضي م 2 :

(1) كتابة العدد المركب $1+i$ على شكل أسّي : لدينا $|1+i| = \sqrt{2}$ و $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$

ومنه الشكل الأسّي للعدد المركب $1+i$ هو $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

(2) أ- ايجاد لاحقة النقطة D' صورة D بالتحويل $S: z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2$

لدينا : النقطة D' صورة D بالتحويل S حيث لاحقة D هي $d = 2i$ ومنه

$$z_{D'} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_D + 2 = (1+i)(2i) + 2 = 2i$$

(ب) تبين أن $z' - d = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - d)$ واستنتاج طبيعة وعناصر التحويل S .

لدينا $z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2$ تكافئ $z' - 2i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2 - 2i$ ومنه $z' - 2i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$z' - 2i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + 2 \times \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{4}}}\right) \text{ اي } z' - 2i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + 2 \times e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$$

وتكافئ $z' - d = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - d)$ وتكافئ $z' - 2i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - 2i)$

من العبارة $z' - d = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - d)$ نستنتج أن التحويل S هو تشابه مباشر لأن $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \neq 1$

مركزه D لأنها نقطة صامدة ونسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$ $\arg\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{4}$

(3) أ- التحقق أن النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي إلى (Δ)

النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي إلى (Δ) لأن : الثنائية $(-3;4)$ تحقق معادلة $(\Delta): 3(-3) + 5(4) = 11$

- تعيين نقط (Δ) التي إحداثياتها أعداد صحيحة :

نقط (Δ) التي إحداثياتها أعداد صحيحة هي النقط التي إحداثياتها حلول المعادلة $3x + 5y = 11$

البحث عن حلول المعادلة :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 3(-3) + 5(4) = 11 \end{cases} \dots (S) \text{ فإن } 3x + 5y = 11$$

الجملة (S) تكافئ $3(x+3) + 5(y-4) = 0$ وتكافئ $3(x+3) = 5(y-4) = 0$

من المعادلة $3(x+3) = 5(y-4) = 0$ نستنتج أن :

$$y = -3k + 4 \text{ (حسب مبرهنة غوص) ومنه } 3/(4-y) \text{ أولي مع } 5 \text{ فإن } 3/(4-y) = 5$$

$$x = 5k - 3 \text{ (حسب مبرهنة غوص) ومنه } 5/(x+3) = 3 \text{ فإن } 5/(x+3) = 3$$

وعليه نقط (Δ) التي إحداثياتها أعداد صحيحة هي النقط التي إحداثياتها

$(x; y) = (5k - 3; -3k + 4)$ حيث k عدد صحيح.

(ب) - تبيان أن المستقيمين (BM'_0) و (BA) متعامدان .

لدينا : صورة M'_0 بالتحويل S ومنه لاحقة النقطة M'_0 هي :

$$z_{M'_0} = \sqrt{2}^{i\frac{\pi}{4}} z_{M_0} + 2 = (1+i)(-3+4i) + 2 = -5+i$$

المستقيمان (BM'_0) و (BA) متعامدان معناه $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BM'_0} = 0$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BM'_0} = 0 \text{ ومنه } \overrightarrow{BA}(-1; 4), \overrightarrow{BM'_0}(-4; -1) = -1 \cdot (-4) + 4 \cdot (-1) = 0 \text{ لدينا}$$

(4) - تعيين مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي بحيث يكون المستقيمان (BA) و (BM') متعامدان

(BA) و (BM') متعامدان معناه $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BM'} = 0$ و $\overrightarrow{BA}(-1; 4)$ و $\overrightarrow{BM'}(x - y + 3; x + y - 2)$

اذن $-1(x - y + 3) + 4(x + y - 2) = 0$ ومنه $3x + 5y = 11$ حيث $-5 \leq x \leq 5$ و $-5 \leq y \leq 5$

لدينا : حلول المعادلة $3x + 5y = 11$ هي $(x; y) = (5k - 3; -3k + 4)$

$$\text{ومنه } \begin{cases} -5 \leq y \leq 5 \\ -5 \leq x \leq 5 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} -5 \leq 5k - 3 \leq 5 \\ -5 \leq -3k + 4 \leq 5 \end{cases} \text{ وتكافئ } \begin{cases} -\frac{2}{5} \leq k \leq \frac{8}{5} \\ -\frac{1}{3} \leq k \leq 3 \end{cases} \text{ ومنه } k \in \{0; 1\}$$

ومنه توجد نقطتان إحداثياتهما : $(-3; 4)$ و $(2; 1)$.

التمرين باك 2015 علوم تجريبية الموضوع الأول:

(I) عين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$ مع $\bar{\alpha}$ مرافق α و $\bar{\beta}$ مرافق β

(II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. A, B, C و النقط التي لاحقاتها على الترتيب :

$$z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_B = \bar{z}_A \text{ و } z_C = z_A \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$$

(1) (أ) أكتب كلا من z_C و z_A على الشكل الأسّي ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ عددا حقيقيا سالبا

(ب) تحقق أن العدد : $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي.

(2) نقطة ذات اللاحقة : $z_D = 1 + i$

(أ) حدد النسبة و الزاوية للتشابه المباشر S الذي مركزه O و يحول D إلى A .

(ب) اكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

(3) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $z = k(i+1)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يسمح $\mathbb{R}^+$.

حل التمرين باك 2015 ع تم 1:

(1) تعيين العددين المركبين α و β :

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\alpha + \beta = -3 + 2i\sqrt{3} \end{cases} \dots (2) \text{ تكافئ } \begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\alpha + \beta = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases} \dots (*) \text{ تكافئ } \begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\alpha + \beta = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) طرف لطرف نجد : $4\alpha = -6 + 2i\sqrt{3}$

$$\text{ومنه } \alpha = -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ وبالتعويض في المعادلة (1) نجد } \beta = 2\alpha + 3 \text{ وعليه } \beta = i\sqrt{3}$$

$$(2) \text{ (أ) كتابة } z_A \text{ و } z_C \text{ على الشكل الأسّي : } |z_A| = \sqrt{3} \text{ و } |z_B| = |\overline{z_A}| = \sqrt{3}$$

$$, z_A = -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

$$\text{و } z_A = z_C \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه } |z_A| = |z_C| \cdot \left| e^{i\frac{\pi}{3}} \right| \text{ ومنه } |z_C| = |z_A| = \sqrt{3}$$

$$\text{ومنه الشكل الاسي للعدد } z_C : z_C = z_A \cdot e^{-\frac{\pi}{3}i} = \sqrt{3} e^{\frac{5\pi}{6}i} \cdot e^{-\frac{\pi}{3}i} = \sqrt{3} e^{\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)i} = \sqrt{3} e^{\left(\frac{\pi}{2}\right)i}$$

- تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا :

$$\text{لدينا } z_A = z_C \cdot e^{\frac{\pi}{3}i} \text{ أي } \left(\frac{z_A}{z_C}\right) = e^{\frac{\pi}{3}i} \text{ ومنه } \left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n = e^{\frac{n\pi}{3}i}$$

$$\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n \text{ حقيقيا سالبا معناه } \frac{n\pi}{3} = (2k+1)\pi \text{ أي } n = 6k+3 \text{ و } k \in \mathbb{N}$$

$$(ب) - \text{التحقق أن العدد المركب } 2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435} \text{ حقيقي}$$

$$\begin{aligned} & 2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435} = 2\left(e^{\frac{5\pi}{6}i}\right)^{2015} + \left(e^{-\frac{5\pi}{6}i}\right)^{1962} - \left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{1435} = \\ & = 2\left(e^{2015 \times \frac{5\pi}{6}i}\right) + \left(e^{-1962 \times \frac{5\pi}{6}i}\right) - \left(e^{1435 \times \frac{\pi}{2}i}\right) = 2e^{i\left(1679\pi + \frac{\pi}{6}\right)} + e^{-i \cdot 1635\pi} - e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = \\ & = 2e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)} + (e^{\pi i}) - \left(e^{\left(\frac{-\pi}{2}\right)i}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right) - 1 - (-i) = -\sqrt{3} - i - 1 + i = -\sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

$$(2) \text{ (أ) - تحديد نسبة وزاوية التشابه المباشر } S : \text{ لدينا } z_D = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$\text{العبارة المركبة للتشابه المباشر } S \text{ هي من الشكل : } z' - z_O = k e^{i\theta} (z - z_O)$$

$$\text{لدينا المركز هو } O \text{ و } S \text{ يحول } D \text{ إلى } A \text{ وعليه تكون العبارة المركبة لـ } S \text{ من الشكل } z_A = k e^{\theta} z_D$$

$$\text{ومنه } k e^{i\theta} = \frac{z_A}{z_D} = \frac{\sqrt{3} e^{\frac{5\pi}{6}i}}{\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{\sqrt{3} e^{\frac{5\pi}{6}i} e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} e^{\frac{7\pi}{12}i} \text{ وعليه النسبة } k = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ والزاوية } \theta = \frac{7\pi}{12}$$

$$(ب) - \text{كتابة العدد } \frac{z_A}{z_D} \text{ على الشكل الجبري ، استنتاج القيمة المضبوطة}$$

$$\frac{z_A}{z_D} = \frac{-\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}}{1+i} = \frac{\left(-\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{3}+i)(1-i)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}[(1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})]$$

استنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$$\frac{z_A}{z_D} = \sqrt{\frac{3}{2}} e^{\frac{7\pi}{12}i} \quad \text{و} \quad \frac{z_A}{z_D} = \frac{\sqrt{3}}{4}[(1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})]$$

بالمطابقة بين الشكلين نستنتج أن :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad \text{وعليه} \quad \sqrt{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-\sqrt{3})$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \quad \text{وعليه} \quad \sqrt{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{3})$$

(3) - تعيين مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق : $z = k(1+i)e^{\frac{7\pi}{12}i}$ حيث $k \in \mathbb{R}^+$

$$z_A = \sqrt{\frac{3}{2}} z_D \times e^{\frac{7\pi}{12}i} \quad \text{و} \quad z = k(1+i)e^{\frac{7\pi}{12}i} \quad \text{تكافئ} \quad z = k(1+i)e^{\frac{7\pi}{12}i} \quad \text{و} \quad z_D \times e^{\frac{7\pi}{12}i} = \frac{z}{k}$$

$$\text{اذن } z = k \sqrt{\frac{2}{3}} \times z_A \quad \text{و} \quad z = k \sqrt{\frac{2}{3}} \times z_A \quad \text{نكتب : } z - z_O = k \sqrt{\frac{2}{3}} (z_A - z_O) \quad \text{أي} \quad \overline{OM} = k' \times \overline{OA} \quad \text{حيث}$$

$$k' \in \mathbb{R}^+ \quad \text{وعليه مجموعة النقط } M(z) \text{ هي نصف المستقيم } [OA) - \{O\}$$

التمرين بكالوريا 2015 علوم تجريبية الموضوع الثاني:

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A, B و C التي لاحتقاتها على الترتيب : Z_A ,

$$Z_B \text{ و } Z_C \text{ حيث: } z_A = 2.e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{و} \quad z_B = -\overline{z_A} \quad \text{و} \quad z_C = -(z_A + z_B) \quad \text{حيث } \overline{z_A} \text{ هو مرافق } z_A$$

(1) أ) أكتب كلا من العددين المركبين: z_B و z_C على الشكل الأسّي.

(ب) استنتج أن النقط A, B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

(ج) انشيء الدائرة (γ) و النقط: A, B و C .

$$(2) \quad \text{أ) تحقق أن: } \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

(ب) استنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع و أن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث.

(ج) عين و أنشيء (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$.

(3) أ) عين زاوية الدوران r الذي مركزه O و يحول C إلى A .

(ب) اثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

حل التمرين باك 2015 ع ت م 2 :

(1) كتابة كلا من z_C, z_B على الشكل الأسّي : $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ أي $z_A = \sqrt{3} + i$

$$z_B = \overline{z_A} = -2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\pi} \times e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i(\pi-\frac{\pi}{6})} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

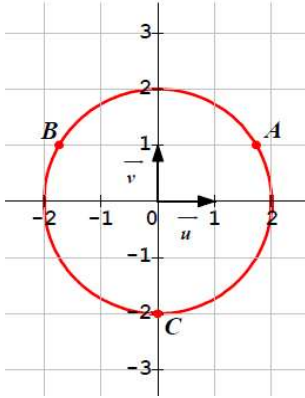
$$z_C = -(z_A + z_B) = -(z_A - \overline{z_A}) = -(2i \operatorname{Im}(z_A)) = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

(ب) - استنتاج أن النقط A, B, C تنتمي إلى دائرة (γ) : $|z_A| = 2$ و $|z_B| = |\overline{z_A}| = 2$ و منه

$$|z_B| = |z_A| = |z_C| = 2 \text{ وهذا معناه } OA = OB = OC$$

اذن النقط A, B, C تنتمي إلى دائرة (γ) مركزها O ونصف

قطرها 2



(ج) - إنشاء الدائرة (γ) والنقط A, B, C .

لإنشاء النقط A, B, C نستعمل الإحداثيات القطبية $A(2; \frac{\pi}{6})$

$$B(2; \frac{5\pi}{6}) \text{ و } C(2; \frac{-\pi}{2})$$

$$(2) \text{ (أ) - التحقق أن : } \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$\text{لدينا } z_A = \sqrt{3} + i, z_B = -\sqrt{3} + i \text{ و } z_C = -2i$$

$$\arg\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\pi}{3} \text{ لأن } \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + i - (-2i)}{-\sqrt{3} + i - (\sqrt{3} + i)} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

(ب) - استنتاج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع وأن O مركز ثقل هذا المثلث

$$\text{العلاقة } \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{\frac{\pi}{3}i} \text{ تعني أن : } \left|\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right| = 1 \text{ و } \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

أي أن $AB = BC$ وقيس الزاوية $(\overline{BC}; \overline{BA})$ هو $\frac{\pi}{3}$ ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع

$$\text{ولدينا } \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0} \text{ معناه } \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i - 2i}{3} = 0 = z_O$$

و هذا يعني النقطه O مركز ثقل هذا المثلث

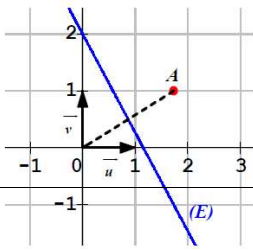
(ج) تعيين و إنشاء مجموعة النقط (E) :

$$|z| = |z - \sqrt{3} - i| \text{ تكافئ } |z_M - z_O| = |z_M - z_A| \text{ وتكافئ } MO = MA$$

اذن (E) مجموعة النقط $M(z)$ هي محور القطعة $[OA]$

(3) (أ) - تعيين زاوية الدوران r : مركزه O و يحول C إلى A .

العبارة المركبة للدوران r هي من الشكل : $z' - z_O = e^{i\theta}(z - z_O)$ أي $z_A = e^{i\theta} z_C$



$$\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ومن زاوية الدوران هي } e^{i\theta} = \frac{z_A}{z_C} = \frac{2e^{\frac{\pi i}{6}}}{2e^{-\frac{\pi i}{2}}} = e^{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)i} = e^{\left(\frac{2\pi}{3}\right)i} \text{ ومنه}$$

(ب) - إثبات أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$:

حيث (E) هي محور القطعة $[OA]$

العبارة المركبة للدوران هي : $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$ و صورة المركز O بالدوران r هي O لأن المركز نقطة صامدة .

وصورة النقطة A بالدوران r هي B لأن $z_B = e^{\frac{2\pi i}{3}} z_A = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{\frac{\pi i}{6}} = 2e^{\frac{5\pi i}{6}}$ وعليه صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

التمرين بكالوريا 2015 تقني رياضي الموضوع الثاني

(1) حل في المجموعة C المعادلة ذات المجهول z التالية : (1) $z^2 - 4(\sin \theta)z + 4 = 0$ حيث θ عدد حقيقي

(2) من أجل $\theta = \frac{\pi}{3}$ نرسم إلى حلي المعادلة (1). بـ z_1 و z_2 أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي .

(3) نعتبر في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط $A; B; C$ لاحقتاهما على الترتيب

$$z_C = 3\sqrt{3} + i; z_B = \sqrt{3} - i; z_A = \sqrt{3} + i$$

(أ) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي و أستنتج طبيعة المثلث ABC .

(ب) استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A يطلب تعيين نسبته و زاوية له

(ج) عين لاحقة النقطة D صورة B بالانسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ ثم حدد طبيعة الرباعي $ABDC$

(4) (أ) عين (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ تخيلي صرف مع $z \neq z_B$.

(ب) عين (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ حقيقي مع $z \neq z_B$

حل التمرين باك 2015 ت . ر . م 2 :

(1) حل المعادلة (1) $z^2 - (4\sin \theta)z + 4 = 0$

$$\Delta = (4\sin \theta)^2 - 16 = 16\sin^2 \theta - 16 = 16(-\cos^2 \theta) = (i4\cos \theta)^2$$

ومن المعادلة تقبل حلين مترافقين هما : $z_1 = 2(\sin \theta + i\cos \theta)$ ، $z_2 = 2(\sin \theta - i\cos \theta)$

(2) كتابة z_1 و z_2 على الشكل الأسّي :

$$z_2 = 2\left(\sin \frac{\pi}{3} - i\cos \frac{\pi}{3}\right) \text{ و } z_1 = 2\left(\sin \frac{\pi}{3} + i\cos \frac{\pi}{3}\right) \text{ يكون } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2e^{\frac{\pi i}{6}} \text{ ومنه}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 2e^{-\frac{\pi i}{6}} \text{ و}$$

(3) (أ) - كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - i} = \frac{\sqrt{3}}{-i} = i\sqrt{3} \text{ ومنه } z_C = \sqrt{3}i \text{ و } z_B = \sqrt{3} - i \text{ و } z_A = \sqrt{3} + i \text{ لدينا}$$

كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي واستنتاج طبيعة المثلث ABC .

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i} \text{ و من الجواب السابق لدينا : } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i} \text{ لدينا}$$

ومنه : $\frac{\pi}{2}$ هو قياسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ و عليه المثلث ABC قائم في A

(ب) استنتاج ان النقطة C صورة النقطة B بالتشابه المباشر S :

$$\text{من العبارة } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i} \text{ نجد : } z_C - z_A = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i} (z_B - z_A)$$

نستنتج ان C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

(ج) تعيين لاحقة D صورة B بالانسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$:

النقطة D صورة النقطة B بالانسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ تعني $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$

$$\text{ومنه : } z_{BD} = z_D - z_B \text{ و } z_{AC} = z_C - z_A = 2\sqrt{3} \text{ حيث } z' = z + z_{AC}$$

$$\text{ومنه لاحقة النقطة } D \text{ هي : } z_D = z_B + 2\sqrt{3} = \sqrt{3} - i + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - i \text{ ان } z_D = 3\sqrt{3} - i$$

- تحديد طبيعة الرباعي $ABDC$:

لدينا : (1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ لان D صورة B بالانسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$.

و لدينا : (2) $\frac{\pi}{2}$ قياسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

من (1) و (2) نستنتج أن الرباعي $ABDC$ مستطيل.

(4) (أ) تعيين مجموعة النقط (Γ_1) :

$$\arg \frac{z - z_C}{z - z_B} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ العدد } \frac{z - z_C}{z - z_B} \text{ تخيلي صرف معناه}$$

$$M \in (\Gamma_1) \text{ معناه } M = C \text{ أو } \arg \frac{z - z_C}{z - z_B} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ومنه } (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ هي الدائرة التي قطرها } [BC] \text{ باستثناء النقطة } B$$

(ب) تعيين مجموعة النقط (Γ_2) :

$$\arg \left(\frac{z - z_C}{z - z_B} \right) = k\pi \text{ أو } \frac{z - z_C}{z - z_B} = 0 \text{ معناه حقيقي معناه } \frac{z - z_C}{z - z_B}$$

$$M \in (\Gamma_2) \text{ معناه } M = C \text{ أو } \arg \left(\frac{z - z_C}{z - z_B} \right) = k\pi \text{ ومنه } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}) = k\pi \text{ هي المستقيم } (BC) \text{ باستثناء النقطة } B$$

التمرين (بكالوريا 2015 شعبة الرياضيات) م 1

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ نعتبر النقط A, B, C, H, I التي لواحقتها على الترتيب

$$z_A = i, z_B = -2 + i, z_C = -3, z_H = 3 + 4i, z_I = -1 - i$$

(1) أمثل النقط A, B, C, H, I في معلم.

ب- عين النسبة و زاوية التشابه المباشر الذي مركزه B ويحول النقطة A إلى النقطة C .

(2) عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

(3) أ- أكتب على الشكل الجبري العدد $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$

ب- استنتج أن المستقيمين (AH) ; (BC) متعامدان

ج- بين أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

(4) بين أن النقط G, H, I في استقامية .

(5) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $z + 1 + i = \sqrt{5}e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

أ- بين أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (Γ) .

ب- عين طبيعة المجموعة (Γ) مع تحديد عناصرها المميزة .

ج- أنشئ المجموعة (Γ) .

د- تحقق أن النقطتين $B ; C$ تنتميان إلى المجموعة (Γ)

حل التمرين باك 2015 شعبة رياضيات م 1 :

(1) (أ)- تمثيل النقط A, B, C, H, I في معلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

(ب)- تعيين النسبة و زاوية التشابه المباشر :

العبارة المركبة للتشابه المباشر هي : $z' - z_o = ke^{\theta}(z - z_o)$

ولدينا التشابه مركزه B و يحول النقطة A إلى النقطة C

وعليه العبارة هي : $z_C - z_B = ke^{\theta}(z_A - z_B)$ ومنه $ke^{\theta} = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$

تطبيق عددي : $ke^{\theta} = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-3 + 2 - i}{i + 2 - i} = \frac{-1 - i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{5\pi}{4}i}$

وعليه : نسبة التشابه هي $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\theta = \frac{5\pi}{4}$ زاوية له .

(2) تعيين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{i + (-2 + i) + (-3)}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}i$ معناه ABC مركز ثقل المثلث

(3) (أ)- كتابة العدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$ على الشكل الجبري

لدينا $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A} = \frac{-2 + i + 3}{-3 + 4i - i} = \frac{1 + i}{-3(1 - i)} = \frac{(1 + i)^2}{-3(1 - i)(1 + i)} = -\frac{1}{3}i$

(ب)- استنتج أن المستقيمين (AH) ; (BC) متعامدان

من الجواب السابق لدينا : $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A} = -\frac{1}{3}i$ معناه $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$ تخيلي صرف

ومنه : المستقيمين (AH) ; (BC) متعامدان .

(ج)- تبيان أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

من الجواب السابق لدينا : $(AH) \perp (BC)$ معناه (AH) الإرتفاع المتعلق بالضلوع

ولدينا : $(BH) \perp (AC)$ معناه (BH) الإرتفاع المتعلق بالضلع $[AC]$.

لأن : $\frac{z_B - z_H}{z_C - z_A} = i$ تخيلي صرف ومنه H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC .

(4) تبيان أن النقط G, H, I في استقامية .

النقط G, H, I في استقامية معناه العدد المركب $\frac{z_G - z_H}{z_I - z_H}$ حقيقي .

$$\frac{z_G - z_H}{z_I - z_H} = \frac{-\frac{5}{3} + \frac{2}{3}i - 3 - 4i}{-1 - i - 3 - 4i} = \frac{2}{3}$$

بعد الحساب والتبسيط نجد

(5) (أ) تبيان أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (Γ) :

لدينا (Γ) مجموعة النقط من المستوي $M(z)$ حيث : $z + 1 + i = \sqrt{5}e^{i\theta}$

A تنتمي إلى المجموعة (Γ) معناه $z_A + 1 + i = \sqrt{5}e^{i\theta}$

لدينا $z_A + 1 + i = i + 1 + i = 1 + 2i$ ومنه $|z_A + 1 + i| = |1 + 2i| = \sqrt{5}$ لأن $|e^{i\theta}| = 1$

ب- تعيين طبيعة المجموعة (Γ) :

لدينا $z + 1 + i = \sqrt{5}e^{i\theta}$ تكافئ $|z - z_I| = \sqrt{5}$ أي $IM = \sqrt{5}$.

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي دائرة مركزها I ونصف قطرها $\sqrt{5}$.

ج- إنشاء المجموعة (Γ) (أنظر 1-أ)

د- التحقق أن النقطتين B, C تنتميان إلى المجموعة (Γ)

B و C تنتميان إلى المجموعة (Γ) لأن : $IB = \sqrt{5}$ و $IC = \sqrt{5}$.

التمرين بكالوريا 2015 شعبية الرياضيات :م2

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية : $z^2 - 2(1 - \sqrt{3})z + 8 = 0$ (لاحظ أن

$$(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$$

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ نعتبر النقطتان A, B لاحقتهما على الترتيب

$$z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$$

$$(2) \text{ أ-بين أن } \frac{z_B}{z_A} = e^{-\frac{7\pi i}{6}}$$

ب- استنتج عمدة للعدد المركب z_A .

ج- استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

(3)(أ)- حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية $7x - 2y = 1$

(ب) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من الأعداد الصحيحة حلا للمعادلة $7x - 24y = 12$ فإن x يكون مضاعفا للعدد 12

ج- استنتج كل الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الصحيحة حلولا للمعادلة $7x - 24y = 12$.

د- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما .

حل التمرين باك 2015 شعبة الرياضيات : 2م :

(1) حل المعادلة في المجموعة $\mathbb{C}$: لدينا $z^2 - 2(1 - \sqrt{3})z + 8 = 0$

$$\Delta' = b'^2 - a.c = (1 - \sqrt{3})^2 - 8 = -4 - 2\sqrt{3} = -(4 + 2\sqrt{3}) = [i(1 + \sqrt{3})]^2$$

المعادلة تقبل حلين مترافقين هما :

$$z' = \frac{-b' - \delta}{a} = (1 - \sqrt{3}) - i(1 + \sqrt{3}) \quad \text{و} \quad z'' = \frac{-b' + \delta}{a} = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$$

$$(2) \text{ (أ) - تبيان أن: } \frac{z_B}{z_A} = e^{-\frac{7\pi}{6}i}$$

$$\text{لدينا : } \frac{z_B}{z_A} = \frac{z_B \cdot \overline{z_A}}{z_A \cdot \overline{z_A}} = \frac{(z_B)^2}{|z_A|^2} = \frac{[(1 - \sqrt{3}) - i(1 + \sqrt{3})]^2}{(1 - \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2} = \frac{-4\sqrt{3} + 4i}{8}$$

$$\text{ومنه } \frac{z_B}{z_A} = \frac{-4\sqrt{3} + 4i}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{\frac{5\pi}{6}i} = e^{-\frac{7\pi}{6}i} \quad \text{لاحظ أن } \frac{-7\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} - 2\pi$$

(ب) استنتاج عمدة للعدد المركب z_A :

$$\text{لدينا } \frac{z_B}{z_A} = e^{-\frac{7\pi}{6}i} \quad \text{ومنه } z_A = z_B \cdot e^{\frac{7\pi}{6}i} \quad \text{ومنه } z_A = \overline{z_A} \cdot e^{\frac{7\pi}{6}i} \quad \text{لأن } z_B = \overline{z_A}$$

$$\text{وعليه } \arg(z_A) = -\arg(z_A) + \frac{7\pi}{6} \quad \text{لأن } \arg(\overline{z_A}) = -\arg(z_A) \quad \text{خاصية}$$

$$\text{لدينا : } \arg(z_A) = \frac{7\pi}{12} \quad \text{تكافئ } \arg(z_A) = -\arg(z_A) + \frac{7\pi}{6}$$

ج - استنتاج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

$$\text{لدينا من الجواب (2 - أ) أن } |z_A|^2 = 8 \quad \text{ومنه } |z_A| = 2\sqrt{2}$$

$$\text{ولدينا } \arg(z_A) = \frac{7\pi}{12} \quad \text{وعليه (1) } |z_A| = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$\text{ولدينا أيضا من جهة أخرى (2) } z_A = (1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i$$

بالمطابقة بين الشكلين (1) و (2) نجد :

$$\begin{cases} \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \\ \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} 2\sqrt{2} \cos \frac{7\pi}{12} = 1 - \sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \sin \frac{7\pi}{12} = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

(3) (أ- حل المعادلة التالية في مجموعة الأعداد الصحيحة : $7x - 2y = 1$)

$$\text{لدينا } 7x - 2y = 1 \quad \text{تكافئ } 7x = 2y + 1 \quad \text{وتكافئ } 7x \equiv 1[2]$$

ومنه $x \equiv 1[2]$ أي $x = 2k + 1$ حيث k عدد صحيح .

$$\text{لدينا } 7x - 2y = 1 \text{ تكافئ } 2y = 7x - 1$$

بعد تعويض قيمة $x = 2k + 1$ في هذه المعادلة نجد : $2y = 7(2k + 1) - 1$

$$\text{ومنه } y = 7k + 3 \text{ أي } 2y = 7.2k + 6$$

حلول المعادلة $7x - 2y = 1$ هي $(x; y) = (2k + 1; 7k + 3)$ حيث k عدد صحيح .

(ب-) تبيان أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة $7x - 24y = 12$ فإن x يكون مضاعفا للعدد 12

$$\text{الثنائية } (x; y) \text{ حلا للمعادلة } 7x - 24y = 12 \text{ معناه } 7x = 12(y + 1)$$

من المعادلة $7x = 12(y + 1)$ نستنتج أن 12 يقسم $7x$ ومنه 12 يقسم x .

أي x مضاعفا للعدد 12 لأن 12 أولي مع 7 وذلك حسب مبرهنة غوص .

$$\text{ج- استنتاج حلول المعادلة } 7x - 24y = 12$$

من الجواب السابق لدينا x مضاعفا للعدد 12 معناه $x = 12k'$ حيث $k' \in \mathbb{Z}$.

بعد تعويض قيمة $x = 12k'$ في المعادلة $7x - 24y = 12$ نجد : $24y = 7(12k') - 12$

$$\text{أي } 2y = 7k' - 1 \text{ أي } 2y = -1[7] \text{ أي } 2y = 6[7]$$

$$\text{ومنه } y = 3[7] \text{ إذن } y = 7k' + 3$$

$$\text{حلول المعادلة } 7x - 24y = 12 \text{ هي } (x; y) = (12k'; 7k' + 3) \text{ حيث } k' \in \mathbb{Z}$$

د - تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما .

$$(z_A)^n \text{ عددا حقيقيا سالبا تماما معناه } \arg(z_A)^n \equiv \pi[2\pi]$$

$$\arg(z_A)^n \equiv \pi[2\pi] \text{ تكافئ } \frac{7n\pi}{12} \equiv \pi[2\pi] \text{ وتكافئ } 7n \equiv 12[24]$$

$$7n \equiv 12[24] \text{ ومنه } n = 12p \text{ حيث } p \in \mathbb{N} \text{ حسب الجواب السابق .}$$

التمرين باك ماي 2016 علوم تجريبية الموضوع 1

المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. من أجل كل نقطة M من المستوى لاحقتها

$$\text{العدد المركب } Z \text{ حيث } (z \neq 1) \text{ نرفق النقطة } M' \text{ لاحقتها العدد المركب } z' \text{ حيث } z' = \frac{z-2}{z-1} .$$

$$(1) \text{ حل في } C \text{ المعادلة ذات المجهول } Z : z' = z .$$

$$(2) \text{ النقطتان } A \text{ و } B \text{ لاحقتهما على الترتيب } z_1 \text{ و } z_2 \text{ حيث } z_1 = 1 - i \text{ و } z_2 = \overline{z_1} .$$

$$(أ) \text{ اكتب } \frac{z_2}{z_1} \text{ على الشكل الأسّي.}$$

$$(ب) \text{ بين أن النقطة } B \text{ هي صورة للنقطة } A \text{ بالدوران } R \text{ الذي مركزه المبدأ } O , \text{ يُطلب تعيين زاوية له.}$$

$$(3) \text{ نضع } z \neq z' . \text{ نعتبر النقطتين } C \text{ و } D \text{ لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب.}$$

$$\text{عين } (\Gamma) \text{ مجموعة النقط } M \text{ حيث } M' \text{ تنتمي إلى محور الترتيب ثم أنشئ } (\Gamma) .$$

$$(4) \text{ } h \text{ التحاكي الذي مركزه المبدأ } O \text{ و نسبته 2.}$$

أ- عيّن طبيعة التحويل النقطي $S = h \circ R$ و عناصره المميزة.

ب- اكتب العبارة المركبة للتحويل S .

ج (عين وأنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل النقطي S

حل التمرين باك 2016 ع 1 الموضوع :

لدينا $z' = \frac{z-2}{z-1}$ حيث $z' \neq 1$ حيث M' لاحقة M' حيث $z \neq 1$.

(1) حل في C المعادلة $z' = z$

أي أن $z = \frac{z-2}{z-1}$ ومنه حل المعادلة $z^2 - 2z + 2 = 0 \dots *$

ومنه (*) معادلة من الدرجة 2 مميزها $\Delta = -4 = 4i^2$ ومنه $\sqrt{\Delta} = 2i$ الحلين هما

$$S = \{1-i; 1+i\} \text{ مجموعة الحلول } z_2 = \frac{2+2i}{2} = 1+i \text{ و } z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

(2) النقط A و B لاحقتاهما على الترتيب $z_2 = 1+i$ و $z_1 = 1-i$

(أ) كتابة $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسّي

لدينا $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+i}{1-i}$ ومنه $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+i}{1-i} \left(\frac{1+i}{1+i} \right) = \frac{2i}{2} = i$ ومنه الشكل الأسّي : $\frac{z_2}{z_1} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

(ب) إثبات أن B هي صورة A بالدوران R الذي مركزه O .

لدينا عبارة الدوران R هي $(z_B - z_O) = e^{i\theta} (z_A - z_O)$ إذن $\frac{(z_B - z_O)}{(z_A - z_O)} = e^{i\theta}$

ولدينا من السؤال السابق $\frac{z_2}{z_1} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ أي ان $\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ بالمطابقة نجد الدوران R الذي مركزه O زاويته $\frac{\pi}{2}$.

(3) نضع $z' \neq z$ ولدينا $z_D = 1$ و $z_C = 2$.

تعيين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث M' تنتمي إلى محور الترتيب

M' تنتمي إلى محور الترتيب يعني أن $z' = re^{i\frac{\pi}{2}} \dots r \in \mathbb{R}_+^*$ أو الجزء الحقيقي لـ z' معدوم أو z' تخيلي صرف

نعلم أن $z \neq z_D$. لدينا $z' = \frac{z-2}{z-1}$ ومنه $z' = \frac{z-2}{z-1} \left(\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}-1} \right)$ أي أن $z' = \frac{(x-2+iy)(x-iy-1)}{(x+iy-1)(x-iy-1)}$

ومنه بعد النشر $z' = \frac{x^2 + y^2 - 3x + 2}{x^2 + y^2 - 2x + 1} + \frac{y}{x^2 + y^2 - 2x + 1}i$

ومنه z' تخيلي صرف يعني أن $\frac{x^2 + y^2 - 3x + 2}{x^2 + y^2 - 2x + 1} = 0$

إذن $x^2 + y^2 - 3x + 2 = 0$ أي $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

و $x^2 + y^2 - 2x + 1 \neq 0$ أي $(x-1)^2 + (y-0)^2 \neq 0$ أي $(x; y) \neq (1; 0)$.

ومنه المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها ω ذو اللاحقة $z_W = \frac{3}{2}$ و نصف قطرها $r = \frac{1}{2}$ باستثناء النقطة $D(1; 0)$

(4) (أ) h التحاكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 2

تعيين طبيعة التحويل $S = h \circ R$

عبارة الدوران R هي : $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot z$ وعبارة التحاكي h هي $z' = 2z$

ومنه $S = h \circ R$ تكافئ $z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot z$ وهذا يعني ان S هو تشابه مباشر مركزه 0 ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

(ب) العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' = 2i \cdot z$

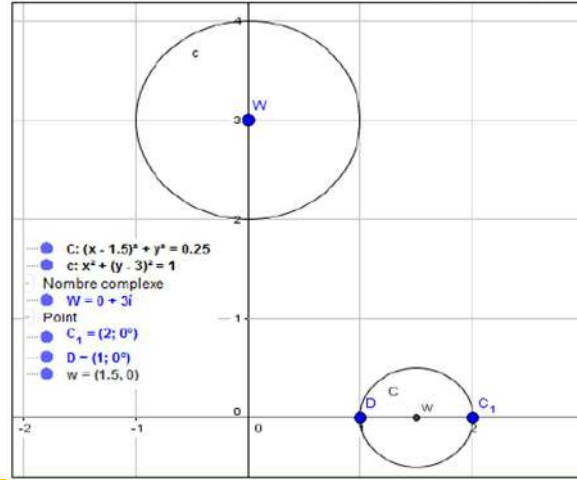
(ج) تعيين وإنشاء المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل النقطي S

لتكن ω' مركز (Γ') صورة المركز ω للدائرة (Γ) بواسطة التحويل S : أي ان $\omega' = S(\omega)$ ومنه $z'_{\omega'} = 2i(z_{\omega})$ ومنه

$$z'_{\omega'} = 2i\left(\frac{3}{2}\right) = 3i$$
 وبالتالي لاحقة ω' هي : $3i$

ونصف قطر الدائرة (Γ) هو $r = \frac{1}{2}$, ومنه نصف قطر (Γ') هو $r' = |2| r = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

ومنه صورة الدائرة (Γ) هي دائرة (Γ') مركزها $\omega(0;3)$ ونصف قطرها 1



التمرين باك ماي 2016 علوم تجريبية الموضوع 2

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$, المعادلة : $\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)(z^2 + \sqrt{3}z + 1) = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$, A , B و C نقط المستوي التي لاحتقاتها على الترتيب

$$: z_C = \overline{z_B} \text{ و } z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i , z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

أ- اكتب z_C , z_B و z_A على الشكل الأسّي .

(ب) بين أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحول النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة .

(3) (أ) عين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع , ثم حدّد بدقة طبيعته.

(ب) عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $|z - z_A| = |\overline{z} - z_B|$ حيث $\overline{z}$ هو مرافق z .

(ج) عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغير على $\mathbb{R}$ ثم تحقّق أنّ

النقطة A تنتمي إلى (Γ) .

حل التمرين باك ماي 2016 علوم تجريبية الموضوع 2

(1) حلول المعادلة $(z^2 + \sqrt{3}z + 1) = 0$ في C :

ومنه إما $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ نجد $\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 0$

أو $\sqrt{\Delta} = i$ و $\Delta = -1$ ومنه معادلة من الدرجة الثانية

نجد $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

الحلول هي $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

(2) النقط A , B , و C لواحقها على الترتيب : $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$,

$z_C = \overline{z_B} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

(أ) كتابة الاعداد z_A و z_B و z_C على الشكل الأسّي :

ومنه $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ومنه $|z_A| = 1$ و $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه الشكل الأسّي هو $z_A = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ومنه $\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$z_B = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

ومنه $z_C = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ومنه $|z_C| = 1$ و $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه الشكل الأسّي هو $z_C = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ ومنه $\theta = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

$z_C = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

(ب) إثبات وجود تشابه مباشر S مركزه B ويحول C إلى A

صيغته هي $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = Ke^{i\theta}$ ومنه لدينا :

$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{\sqrt{3}}{-i} = \sqrt{3} \cdot i = \sqrt{3} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

أي $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $(z_A - z_B) = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_B)$

ومنه يوجد S تشابه مباشر مركزه B ويحول C إلى A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ونسبته $\sqrt{3}$.

(3) أ) تعيين لاحقة النقطة D حتى يكون $ABCD$ متوازي الأضلاع : يعني $\overline{BA} = \overline{CD}$ وهذا يعني ان

$$z_D = z_A - z_B + z_C \quad \text{ومنه} \quad \frac{z_A - z_B}{z_D - z_C} = 1 \quad \text{وتعني} \quad z_A - z_B = z_D - z_C$$

$$z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{نجد} \quad z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

طبيعة الرباعي بدقة .

$$\text{لدينا} \quad \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{ومنه} \quad \left| \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \right| = \left| \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \right| \quad \text{أي أن} \quad \frac{AB}{CB} = \sqrt{3} \quad \text{و} \quad \arg(\overline{BC}; \overline{BA}) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه $ABCD$ قائم في B فهو مستطيل

(ب) تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث : $|z - z_A| = |\overline{z} - z_B|$

$$|z - z_A| = |\overline{z} - z_B| \quad \text{يكافئ أن} \quad |z - z_A| = |\overline{z - z_B}| \quad \text{وبما أن} \quad z_C = \overline{z_B}$$

$$\text{يصبح} \quad |z - z_A| = |\overline{z - z_C}| \quad \text{بما أن} \quad |z| = |\overline{z}| \quad \text{فإن} \quad |z - z_A| = |z - z_C| \quad \text{أي أن} \quad AM = CM$$

وبالتالي (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z هي مستقيم محور القطعة $[AC]$

(ج) تعيين (Γ) مجموعة النقط M : $z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$ أي ان $z - z_B = \sqrt{3}e^{i\theta}$ ومنه $|z - z_B| = \sqrt{3} \cdot |e^{i\theta}|$

أي $BM = \sqrt{3}$ وبالتالي (Γ) هي دائرة مركزها B ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$.

التحقق أن $A \in (\Gamma)$ يعني أن : $BA = R = \sqrt{3}$.

$$\text{لدينا} \quad |z_A - z_B| = AB = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{3} \quad \text{ومنه} \quad A \in (\Gamma)$$

التمرين باك ماي 2016 تقني رياضي الموضوع 1

(1) حل في المجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $9z^2 - 6\sqrt{3}z + 4 = 0$

(2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لنكن النقطتين A و B لاحقتاهما على

$$\text{الترتيب :} \quad z_A = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i \quad \text{و} \quad z_B = \overline{z_A}$$

أ- أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي .

$$\text{ب- بين أن :} \quad \left(\frac{z_A}{z_B} \right)^{2016} + \left(\frac{z_A}{z_B} \right)^{1437} = 0$$

ج- عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B} \right)^n$ عددا حقيقيا .

(3) f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z' = \left(\frac{z_A}{z_B} \right) z$

أ- عيّن طبيعة التحويل النقطي f و عناصره المميزة .

ب- أحسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل f .

ج) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

حل التمرين باك ماي 2016 تقني رياضي الموضوع 1

(1) حلول المعادلة $(9z^2 - 6\sqrt{3}z + 4) = 0$ في C : معادلة من الدرجة الثانية ومنه $\Delta = -36$ اي $\Delta = 36 \cdot i^2$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i, \quad z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i \quad \text{ومنهم } z_2 = \frac{6\sqrt{3} + 6i}{18} \text{ و } z_1 = \frac{6\sqrt{3} - 6i}{18}$$

(2) النقط A, B و لواحقتها على الترتيب $z_A = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i, \quad z_B = \overline{z_A} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i$

أ- كتابة العدد z_A و z_B على الشكل الأسّي

$$z_A = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{ومنهم } \arg(z_A) = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{و } |z_A| = \frac{2}{3} \quad \text{ومنهم } z_A = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$$

$$z_B = \frac{2}{3}e^{-i\frac{\pi}{6}} \quad \text{ومنهم } \arg(z_B) = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{و } |z_B| = \frac{2}{3} \quad \text{ومنهم } z_B = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i$$

(ب) اثبات أن $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016} + \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437} = 0$

لدينا $\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$ أي $\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

ومنهم $\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2016} + \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{1437} = e^{i\frac{2016\pi}{3}} + e^{i\frac{1437\pi}{3}} = e^{i2\pi(336)} + e^{i(\pi+2\pi(239))}$

القياس الرئيسي لـ $\frac{1437\pi}{3}$ هو $\pi + 2\pi k$

القياس الرئيسي لـ $\frac{2016\pi}{3}$ هو $0 + 2\pi k$

ومنهم $e^{i\frac{2016\pi}{3}} + e^{i\frac{1437\pi}{3}} = e^0 + e^\pi = 1 - 1 = 0$ لأن $e^\pi = -1$ إذن $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016} + \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437} = 0$

(ج) تعيين العدد الطبيعي n حيث $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n \in \mathbb{R}$

لدينا $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = e^{i \cdot n \frac{\pi}{3}}$ ومنهم يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقيا اذا كان $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{N}$ ومنهم $n \frac{\pi}{3} = k\pi$

حيث $n = 3k \quad k \in \mathbb{N}$

(3) f التحويل النقطي حيث $z' = \left(\frac{z_A}{z_B}\right)z$

وبالتالي

(أ) طبيعة التحويل f : لدينا $z' = \left(\frac{z_A}{z_B} \right) z$ أي $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot z$ هي صيغة مركبة لدوران مركزه المبدأ O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

(ب) حساب لاحقة C صورة A بواسطة f

$$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{لدينا } z_C = e^{i\frac{\pi}{3}} z_A \quad \text{ونعلم ان}$$

$$\text{ومنه } z_C = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} i \right) \quad \text{اذن لاحقة النقطة } C \text{ هي } z_C = \frac{2}{3} i$$

(ج) تعيين لاحقة النقطة D حتى يكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$

يعني أن O مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,1)\}$

$$\text{ومنه } z_D = -z_A - z_B - z_C \quad \text{ومنه } \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{1+1+1+1} = z_O$$

$$\text{نجد } z_D = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} i \quad \text{ومنه } z_D = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3} i - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} i - \frac{2}{3} i$$

التمرين باك ماي 2016 تقني رياضي الموضوع 2

$$(I)(1) \text{ حل في المجموعة } \mathbb{C} \text{ المعادلة التالية : } (z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)(2z - \sqrt{2}) = 0$$

(2) أكتب الحلول على الشكل الأسّي .

(II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C, D من المستوي التي لواحقتها على الترتيب :

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad c = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

(1) علم النقط A, B, C في المعلم السابق

(2) نعتبر النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S الذي مركزه A ونسبته 3 وزاويته π .

والنقطة E صورة النقطة C بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$. أحسب اللاحقتين d و e للنقطتين D و E على الترتيب .

$$(III) \text{ نضع : } z = \frac{d-b}{e-b}$$

(1) أكتب العدد المركب z على الشكل المثلي .

(2) نعتبر النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[DE]$ ، نظيرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة I .

ما طبيعة الرباعي $BDFE$ ؟ .

حل التمرين باك ماي 2016 تقني رياضي الموضوع 2

$$(I) \text{ حل المعادلة } (z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)(2z - \sqrt{2}) = 0$$

$$\text{حلول المعادلة } \Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 16 = -8 = (2\sqrt{2}i)^2 \quad \text{و } z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

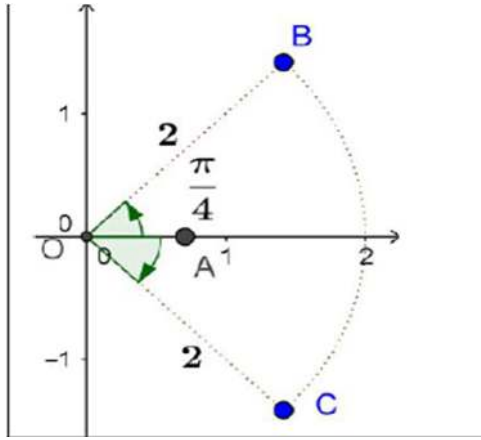
$$\text{ومنه } z_2 = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i, \quad z_1 = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

(2) الأشكال الأساسية : $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i \times 0}$

الشكل الاسي للعدد z_1 و z_2 حيث $|z_1| = 2$ و $|z_2| = 2$

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} : \text{ ومنه الشكل الاسي للعدد } z_1 \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} : \text{ ومنه الشكل الاسي للعدد } z_2 \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ و}$$



(II) (1) تعليم النقط A, B و C

حساب اللاحقتين d و e :

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad b = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad \text{و} \quad c = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

لدينا : النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S الذي

مركزه A و نسبته 3 و زاويته π ومنه :

$$d - a = 3e^{i\pi}(c - a) \quad \text{أي}$$

$$\text{اذن } d - \frac{\sqrt{2}}{2} = 3e^{i\pi} \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$d = 3(-1) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ومنه : } d = -\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$$

والنقطة E صورة النقطة C بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ ومنه :

$$e - 0 = e^{-i\frac{\pi}{2}}(c - 0) \quad \text{ومنه} \quad e - 0 = e^{-i\frac{\pi}{2}}(\sqrt{2} - i\sqrt{2} - 0) \quad \text{أي} \quad e = e^{-i\frac{\pi}{2}}(\sqrt{2} - i\sqrt{2} - 0)$$

$$\text{ومنه لاحقة النقطة } E \text{ هي : } e = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$z = \frac{d - b}{e - b} \quad (\text{III})$$

(1) الشكل المثلثي للعدد z

$$\text{لدينا : } z = \frac{d - b}{e - b} = \frac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i - \sqrt{2} - \sqrt{2}i}{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i - \sqrt{2} - \sqrt{2}i} = \frac{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i}$$

$$\text{ : } z = -i \quad \text{ومنه} \quad z = \frac{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i} = \frac{-2\sqrt{2}(1 - i)}{-2\sqrt{2}(1 + i)} = \frac{(1 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = -i$$

ومنه : $z = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

نتيجة : من $\frac{d-b}{e-b} = -i$ نجد $\left|\frac{d-b}{e-b}\right| = |-i| = \frac{BD}{BE} = 1$

$$\cdot \begin{cases} BE = BD \\ (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(2) تعيين طبيعة الرباعي BDFE

لدينا : I منتصف [DE] وكذلك I منتصف [BF] (القطران متناصفان) إذن الشكل : BDFE متوازي أضلاع .
ولدينا : من النتيجة السابقة : $BE = BD$ و $(BE) \perp (BD)$ ينتج : BDFE مربع .

التمرين باك ماي 2016 رياضي الموضوع 1

(1) (أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة : $z^2 - 4z + 5 = 0$

(ب) استنتج حلول المعادلة ذات المجهول المركب z الأتية : $(z + 1 + i(1 - \sqrt{3}))^2 - 4z + 1 - 4i(1 - \sqrt{3}) = 0$

(2) θ عدد حقيقي حيث : $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ و z_0 عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له .

(أ) أكتب العدد المركب $1 + i\sqrt{3}$ على الشكل الأسّي .

(ب) عيّن θ علما أن : $\frac{z_0(1 + i\sqrt{3})}{z_0} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. (z_0 هو مرافق العدد المركب z_0).

(ج) n عدد طبيعي . من أجل قيمة θ المتحصل عليها , أكتب العدد المركب $\left[\frac{z_0(1 + i\sqrt{3})}{2}\right]^n$ على الشكل المثلثي .

(د) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left[\frac{z_0(1 + i\sqrt{3})}{2}\right]^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

(3) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A, B و C التي لاحقاتها على

الترتيب : z_A, z_B و z_C حيث : $z_A = 2 - i, z_B = 2 + i$ و $z_C = 1 + i\sqrt{3}$

(أ) عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجع الجملة المثقلة $\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$.

(ب) استنتج أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع .

(ج) النقطة E من المستوي المركب ذات اللاحقة z_E حيث :
$$\begin{cases} \arg(z_E - z_A) - \arg(z_E - z_B) = \frac{\pi}{2} \\ \left|\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B}\right| = 2 \end{cases}$$

- بيّن أن : $z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$

- بيّن أن النقطة A هي صورة النقطة B بتشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة .

(4) نقطة M من المستوي المركب لاحقتها z . النقطة I منتصف القطعة المستقيمة [AB] .

(أ) عَيِّن z_I لاحقته النقطة I .

(ب) α عدد حقيقي , نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب التي تحقق : $z - z_I = e^{i\alpha}$

- تحقق أن النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ)

- عَيِّن طبيعة المجموعة (Γ) و عناصرها المميزة عندما يتغير α في R .

حل التمرين باك ماي 2016 رياضي الموضوع 1

(1) (أ) الحل في C للمعادلة : $z^2 - 4z + 5 = 0$

$\Delta = -4$ و الحلين هما : $z' = 2 + i$ و $z'' = 2 - i$; ومنه مجموعة حلول المعادلة المعطاة هي : $S = \{2 - i; 2 + i\}$.

(ب) استنتاج حلول المعادلة :

$$(z + 1 + i(1 - \sqrt{3}))^2 - 4(z + i(1 - \sqrt{3})) + 1 = 0 \quad \text{تكافئ} \quad (z + 1 + i(1 - \sqrt{3}))^2 - 4z + 1 + 4i(1 - \sqrt{3}) = 0 \dots (*)$$

$$\Leftrightarrow (z + 1 + i(1 - \sqrt{3}))^2 - 4(z + i(1 - \sqrt{3})) + 5 = 0$$

$$z + 1 + i(1 - \sqrt{3}) = 2 - i \quad \text{أو} \quad z + 1 + i(1 - \sqrt{3}) = 2 + i$$

$$z = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{أو} \quad z = 1 + i(\sqrt{3} - 2)$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (*) هي : $S = \{1 + i\sqrt{3}; 1 + i(\sqrt{3} - 2)\}$

$$(2) \quad z_0 = e^{i\theta} \quad \text{و} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

(أ) كتابة العدد المركب $(1 + i\sqrt{3})$ على الشكل الأسّي : $|1 + i\sqrt{3}| = 2$ و $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ و $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ أي

$$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{ومنه} \quad \alpha = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$(ب) \quad \text{تعيين } \theta : \quad \frac{z_0(1 + i\sqrt{3})}{z_0} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \dots (1) \quad \text{ومنه} \quad \frac{e^{i\theta} \times e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\theta}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{أي} \quad e^{i2\theta} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{ومنه} \quad 2e^{i(2\theta + \frac{\pi}{3})} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{أي} \quad e^{i(2\theta + \frac{\pi}{3})} = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{ومنه} \quad 2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{اذن} \quad 2\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{و بما أن} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} : \quad \theta = \frac{\pi}{12}$$

$$(ج) \quad \theta = \frac{\pi}{12} \quad \text{و} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{المطلوب : كتابة العدد المركب} \quad \left(\frac{z_0(1 + i\sqrt{3})}{2} \right)^n \quad \text{على الشكل المثلي :}$$

$$= \left(e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} \right)^n = e^{in(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi n}{12}} \left(\frac{z_0(1 + i\sqrt{3})}{2} \right)^n = \left(\frac{e^{i\theta} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} \right)^n$$

$$\text{ومنه} : \quad = e^{i\frac{5\pi n}{12}} = \left[1; \frac{5\pi n}{12} \right] \left(\frac{z_0(1 + i\sqrt{3})}{2} \right)^n \quad \text{أي} : \quad = \cos \frac{5\pi n}{12} + i \sin \frac{5\pi n}{12} \left(\frac{z_0(1 + i\sqrt{3})}{2} \right)^n$$

$$\arg\left(\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right)^n = 2\kappa\pi : \kappa \in \mathbb{Z} \text{ تعني } \in \mathfrak{R}_+^* \left(\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right)^n : n \text{ تعيين قيم}$$

$$\text{اي } \frac{5n\pi}{12} = 2\kappa\pi \text{ ومنه } 5n = 24\kappa \text{ وتعني } 24/5n \text{ وبما ان } 24 \text{ اولي مع } 5 \text{ فان } 24 \text{ يقسم } n$$

$$\boxed{n = 24m ; m \in \mathbb{N}} \text{ ومنه:}$$

$$z_C = 1 + i\sqrt{3}; z_B = 2 + i; z_A = 2 - i \quad (3)$$

$$\cdot \{(A;1);(B;-1);(C;1)\} : D \text{ مرجح الجملة :}$$

$$\text{حساب } z_D : z_D = z_A - z_B + z_C = 2 - i - 2 - i + 1 + i\sqrt{3} \text{ ومنه } z_D = 1 + i(\sqrt{3} - 2)$$

(ب) استنتاج أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع . يكفي إثبات أن قطريه [AC] و [BD] متناصفان..

$$\text{لدينا : } \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2} ; \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2} \text{ ومنه الرباعي } ABCD \text{ متوازي أضلاع.}$$

(ج) نقطة E من المستوي :

$$\left\{ \begin{array}{l} \arg(z_E - z_A) - \arg(z_E - z_B) = \frac{\pi}{2} \\ \left| \frac{z_E - z_A}{z_E - z_B} \right| = 2 \end{array} \right. \dots (I) \text{ المطلوب: (1) إثبات أن : } z_E + \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \arg\left(\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} \\ \left| \frac{z_E - z_A}{z_E - z_B} \right| = 2 \end{array} \right. \text{ العلاقة (1) تكافئ وهذا يعني } z_E - z_A = 2i(z_E - z_B)$$

$$\text{اذن } (1-2i)z_E = z_A - 2iz_B \text{ ومنه } (1-2i)z_E = 2 - i - 2i(2+i)$$

$$\text{اي } z_E = \frac{4-5i}{1-2i} \text{ ومنه } (1-2i)z_E = 4-5i$$

$$\text{بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نجد أن : } z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$$

- إثبات أن A هي صورة B بتشابه مباشر..

$$\text{مما سبق لدينا } z_E - z_A = 2i(z_E - z_B) \text{ اي } z_E - z_A = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(z_E - z_B)$$

$$\text{ومنه } z_A - z_E = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_E)$$

وهذا يعني أن A هي صورة B بتشابه مباشر مركزه E ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

(4) نقطة M من المستوي لاحتقتها z و I منتصف [AB] .

$$\text{(أ) تعيين } z_I : z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

.. (ب) $\alpha \in \mathfrak{R}$ و (Γ) مجموعة النقط M من المستوي : $z - z_I = e^{i\alpha}$

المطلوب : التحقق من أن : $E \in (\Gamma)$ ولبرهان ذلك يكفي إثبات أن : $z - z_I = e^{ia}$

و بما أن a يكفي فيكفي إثبات أن : $|z_E - z_I| = 1$

$$E \in (\Gamma) : \text{ومنه} \quad |z_E - z_I| = \left| \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i \right| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$$

- طبيعة (Γ) وتحديد عناصرها لما يسمح α المجموعة $\mathcal{R}$.

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow z - z_I = e^{i\alpha} \Leftrightarrow z_M - z_I = e^{i\alpha}$$

$$\begin{cases} IM = 1 \\ \left(\vec{u}; \overrightarrow{IM} \right) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} |z_M - z_I| = 1 \\ \arg(z_M - z_I) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases}$$

ومنه مجموعة النقط (Γ) لما يسمح α المجموعة $\mathcal{R}$ هي الدائرة ذات المركز I و نصف قطر 1 .

التمرين باك ماي 2016 رياضي الموضوع 2

$$(I) - (1) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة: } z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$(2) \text{ جد العددين المركبين } z_1 \text{ و } z_2 \text{ حيث: } \begin{cases} 2z_1 - 3z_2 = 5i\sqrt{2} \\ z_1 + 3z_2 = -2i\sqrt{2} \end{cases}$$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. النقط A, B, C, D و H لاحتقاتها على الترتيب :

$$\overline{DE} = 2\overline{DO} : \text{حيث } z_H = \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} \text{ و } z_D = 1 - i, \quad z_C = 1 + i, \quad z_B = -i\sqrt{2}, \quad z_A = i\sqrt{2}$$

(1) اكتب z_H على الشكل الأسّي و استنتج نوع المثلث BEC .

(2) S تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M لاحتقتها z النقطة M' لاحتقتها z' حيث $z' = z_A \cdot z + z_B$.

(أ) ما هي طبيعة التحويل S ؟ و ما هي عناصره المميزة ؟

(ب) احسب مساحة الدائرة (γ) التي مركزها C و نصف قطرها CD .

ج) عين (γ') صورة (γ) بالتحويل S و استنتج مساحتها.

(3) عين (δ) مجموعة النقط M من المستوي $(M$ تختلف عن B و $C)$ ذات اللاحقات z التي يكون من أجلها العدد $\frac{z_B - z}{z_C - z}$

حقيقيا سالبا تماما.

حل التمرين باك ماي 2016 رياضي الموضوع 2

$$(I) - (1) \text{ حل المعادلة: } z^2 - 2z + 2 = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية ومنه $\Delta = -4 = (2i)^2$ ومنه نجد $z_2 = 1 - i, \quad z_1 = 1 + i$

$$(2) \text{ إيجاد العددين المركبين } z_1 \text{ و } z_2 \text{ حيث} \quad \begin{cases} 2z_1 - 3z_2 = 5i\sqrt{2} & (1) \\ z_1 + 3z_2 = -2i\sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد $3z_1 = 3i\sqrt{2}$ ومنه $z_1 = i\sqrt{2}$

نعوض في (2) نجد $z_2 = -i\sqrt{2}$

II / النقط A, B, C, D, H لواحقتها على الترتيب $z_A = i\sqrt{2}, \quad z_B = -i\sqrt{2}, \quad z_C = 1 + i, \quad z_D = 1 - i$,

$$\overline{DE} = 2\overline{DO} : \text{حيث } z_H = \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$$

II / ابة (1) z_H على الشكل الأسّي واستنتاج طبيعة المثلث BEC

(3) E تحقق : $\overline{DE} = 2\overline{DO}$ يعني أن : $z_E - z_D = -2z_D$ ومنه $z_E = -z_D$

$$z_H = \frac{1+i(1+\sqrt{2})}{-1+i(1+\sqrt{2})} \text{ أي } z_H = \frac{1+i+i\sqrt{2}}{-1+i+i\sqrt{2}} \text{ ومنه}$$

$$z_H = \frac{1+2i(1+\sqrt{2})-(3+2\sqrt{2})}{4+2\sqrt{2}} \text{ نجد : } z_H = \frac{(1+i(1+\sqrt{2}))}{(-1+i(1+\sqrt{2}))} \left(\frac{-1-i(1+\sqrt{2})}{-1-i(1+\sqrt{2})} \right) \text{ ومنه}$$

$$\boxed{z_H = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ نجد } z_H = \frac{(1-i)(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} \text{ ومنه } z_H = \frac{i(1+\sqrt{2})-(1+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} \text{ ومنه}$$

$$\arg(z_H) \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \theta = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad \text{و} \quad |z_H| = 1 \text{ ومنه } z_H = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ومنه}$$

$$\boxed{z_H = e^{-i\frac{\pi}{4}}} \text{ ومنه الشكل الأسّي هو}$$

$$\boxed{BC = BE} \text{ أي أن } \left| \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} \right| = 1 \text{ ومنه } \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ومنه } z_H = e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ لدينا}$$

ومنه المثلث BEC متساوي الساقين .

(2) S تحويل نقطي يرفق بكل M لاحقتها z بالنقطة M' لاحقتها z' بحيث : $z' = z_A \cdot z + z_B$

(أ) لدينا $z' = z_A \cdot z + z_B$ يكافئ $z' = (i\sqrt{2})z - i\sqrt{2}$ ونعلم أيضا صيغة تحويل مركب هي $z' = az + b$

بما أن $a = (i\sqrt{2})$ أي $a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ فإن S تشابه مباشر مركزه النقطة الصامدة W وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ونسبته $k = \sqrt{2}$

$$z_W = \frac{2}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ أي } z_W = \frac{2-i\sqrt{2}}{3} \text{ ومنه } z_W = \frac{-i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}} = \frac{-i\sqrt{2}(1+i\sqrt{2})}{(1-i\sqrt{2})(1+i\sqrt{2})} \text{ لدينا}$$

(ب) مساحة الدائرة (γ) التي مركزها C ونصف قطرها CD

$$\text{لدينا } CD = |z_D - z_C| \text{ ومنه } CD = |-2i| = 2 \text{ ومنه } CD = 2 \text{ ومنه } S_{(\gamma)} = \pi r^2 \text{ أي } S_{(\gamma)} = 4\pi \text{ us}$$

(ج) تعيين (γ') صورة (γ) بواسطة S التشابه :

لدينا C' لاحقتها $z_{C'}$ صورة C حيث $z_C = 1+i$ وبواسطة S ومنه

$$z_{C'} = (i\sqrt{2})z_C - i\sqrt{2} \text{ ومنه } z_{C'} = (i\sqrt{2})(1+i) - i\sqrt{2} \text{ إذن } z_{C'} = -\sqrt{2} \text{ وبما أن نصف قطر } (\gamma) \text{ هو } r = CD = 2 \text{ فإن}$$

$$r' = 2\sqrt{2} \text{ هو نصف قطر } (\gamma') \text{ حيث : } r' = |k|r \text{ ومنه } r' = 2\sqrt{2}$$

$$\text{ومساحة } (\gamma') \text{ هي } S_{(\gamma')} : \text{ حيث } S_{(\gamma')} = k^2 S_{(\gamma)} \text{ ومنه } S_{(\gamma')} = 8\pi \text{ us}$$

$$(3) \text{ تعيين } (\delta) \text{ مجموعة النقط } M \text{ (} M \text{ تختلف عن } B \text{ و } C \text{) ذات اللاحقة } z \text{ حيث } \frac{z_B - z}{z_C - z} \text{ حقيقي سالب}$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2\pi k \text{ ومنه } \frac{z_B - z}{z_C - z} = re^{i\pi} \text{ حقيقي سالب يعني أن}$$

مجموعة النقط (δ) هي القطعة المستقيمة [BC] عدا النقطتين B و C

التمرين بكالوريا جوان 2016 المكرر علوم تجريبية الموضوع 1

- (1) نضع من أجل كل عدد مركب z : $p(z) = z^3 - 24\sqrt{3}$
- (أ) تحقق أن : $p(2\sqrt{3}) = 0$
- (ب) جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $p(z) = (z - 2\sqrt{3})(z^2 + az + b)$
- (ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة C ، المعادلة $p(z) = 0$
- (2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $A(o; \vec{u}; \vec{v})$ ، B و C نقط من المستوي لواقعها على الترتيب
- $z_C = 2\sqrt{3}$ و $z_B = -\sqrt{3} - 3i$ و $z_A = -\sqrt{3} + 3i$:
- (أ) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$
- (ب) بين أنه يوجد دوران r مركزه A ويحول النقطة B الى النقطة C ، يطلب تعيين زاويته .
- (ج) استنتج طبيعة المثلث ABC
- (د) عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{AB}$ ، ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABDC$
- (3) عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث : $\arg\left(\frac{z}{z}\right) = 2k\pi$ حيث
- (العدد $\bar{z}$ هو مرافق العدد z) $k \in \mathbb{Z}$

حل التمرين باك جوان 2016 المكرر علوم تجريبية الموضوع 1:

- (1) (أ) التحقق : $P(2\sqrt{3}) = (2\sqrt{3})^3 - 24\sqrt{3} = 24\sqrt{3} - 24\sqrt{3} = 0$ $P(2\sqrt{3}) = 0$
- (ب) ايجاد العددين a و b :
- بالنشر والمطابقة مع $P(z) = z^3 - 24\sqrt{3}$ نجد : $\begin{cases} a - 2\sqrt{3} = 0 \\ b - 2a\sqrt{3} = 0 \\ -2\sqrt{3}b = -24\sqrt{3} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = 2\sqrt{3} \\ b = 12 \end{cases}$
- (ج) حل المعادلة $P(z) = 0$ معناه $(z - 2\sqrt{3})(z^2 - 2\sqrt{3}z + 12) = 0$ ومنه $(z - 2\sqrt{3}) = 0$ او $z^2 - 2\sqrt{3}z + 12 = 0$ اي ان $z = 2\sqrt{3}$ وحل المعادلة الاخرى بحساب المميز نجد : $\Delta = -36 = (6i)^2$ ومنه الحلول هي :
- $z_0 = 2\sqrt{3}$ و $z_1 = -\sqrt{3} + 3i$ و $z_2 = -\sqrt{3} - 3i$
- (2) (أ) الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$: حيث : $z_C = 2\sqrt{3}$ و $z_B = -\sqrt{3} - 3i$ و $z_A = -\sqrt{3} + 3i$:
- $$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 3i}{-\sqrt{3} - 3i + \sqrt{3} - 3i} = \frac{3\sqrt{3} - 3i}{-6i} = \frac{\sqrt{3} - i}{-2i} = \frac{(\sqrt{3} - i)2i}{(-2i)2i} = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
- (ب) وجود الدوران الذي مركزه A يحول B الى C :
- لدينا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = 1$

$$A \text{ وهذا معناه يوجد دوران مركزه } A \text{ إذن } \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

يحول B الى C وزاويته $\frac{\pi}{3}$

(ج) طبيعة المثلث :

$$\text{مما سبق ينتج ان } \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = \frac{AC}{AB} = 1 \text{ إذن } AC = AB \text{ و } (\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{3} \text{ ومنه المثلث } ABC$$

متقايس الاضلاع

(د) تعيين Z_D لاحقة D صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overline{AB}$:

$$Z_D = 2\sqrt{3} - 6i \text{ إذن } Z_D = Z_C + Z_B - Z_A \text{ ومنه } Z_D = Z_C + Z_{\overline{AB}}$$

- طبيعة الرباعي $ABDC$:

$$\text{بما ان } AB = AC \text{ و } \overline{AB} = \overline{CD} \text{ و } (\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{3} \text{ فان الرباعي } ABDC \text{ معين}$$

(3) تعيين (Γ) مجموعة النقط :

$$\arg\left(\frac{z}{z}\right) = \arg(z) - \arg(\overline{z}) = 2\pi k \text{ ونعلم } \arg(\overline{z}) = -\arg(z) \text{ إذن } 2\arg(z) = 2\pi k \text{ اي}$$

$$\arg(z) = \pi k \text{ إذن مجموعة النقط هي محور الفواصل باستثناء المبدأ}$$

التمرين باك جوان 2016 ع ت المكرر الموضوع 2

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C ، المعادلة ذات المجهول z : (E) $2\overline{z}^3 + 3\overline{z}^2 - 3\overline{z} + 5 = 0$. .

يشير الرمز $\overline{z}$ إلى مرافق العدد المركب z

$$(1) \text{ (أ) اثبت أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة } (2\overline{z} + 5)(\overline{z}^2 - \overline{z} + 1) = 0$$

(ب) حل في المجموعة C المعادلة (E)

(2) في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o; \overline{u}; \overline{v})$ نعتبر النقط A, B, C و D التي لواحقتها

$$\text{على الترتيب : } z_A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ و } z_B = \overline{z_A} \text{ و } z_C = -1 \text{ و } z_D = -\frac{5}{2}$$

(أ) اكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي

(ب) أنشئ النقط A, B, C و D

$$(ج) \text{ اثبت أن : } z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$$

(د) استنتج طبيعة المثلث ABC

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ونسبته 2 ولتكن F صورة A بالتحويل S

أنشئ النقطة F ثم حدد طبيعة المثلث AFC

(4) عين طبيعة المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $z + 1 = k \cdot z_B$ لما يتغير k في $\mathbb{R}_+$

حل التمرين باك جوان 2016 ع ت المكرر الموضوع 2

(1) (أ) تكافؤ المعادلتين : بالنشر والتبسيط

$$(2 \cdot \bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 2\bar{z}^3 - 2 \cdot \bar{z}^2 + 2 \cdot \bar{z} + 5\bar{z}^2 - 5\bar{z} + 5 = 2\bar{z}^3 + 3\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 5$$

متكافئتان

(ب) حلول (E) :

$$\bar{z}_3 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } \bar{z}_2 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ وبالتالي الحلان } \Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2 z_1 = -\frac{5}{2}$$

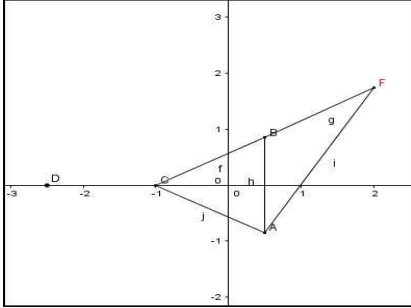
$$z_3 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } z_2 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } z_1 = -\frac{5}{2}$$

(2) (أ) الشكل الاسي للاعداد :

$$z_A = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ و } \arg(z_A) = -\frac{\pi}{3} \text{ و } |z_A| = 1$$

$$z_B = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ و } \arg(z_B) = \frac{\pi}{3} \text{ و } |z_B| = 1 \text{ و } z_B = \bar{z}_A = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ب) انشاء النقط A, B, C, D



(ج) اثبات ان $z_B - z_C = z_B (z_A - z_C)$

$$z_B - z_C = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

و

$$z_B (z_A - z_C) = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(د) طبيعة المثلث ABC :

$$\frac{BC}{AC} = 1 \text{ و } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = z_B = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ يعني } z_B - z_C = z_B (z_A - z_C)$$

$$\text{و } (\overline{CA}, \overline{CB}) = \frac{\pi}{3} \text{ وهذا يعني المثلث } ABC \text{ متقايس الاضلاع}$$

(3) انشاء النقطة F بالتشابه S :

العبارة المركبة للتشابه هي : $z' - z_C = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_C)$ وبما ان F هي صورة A فان :

$$z_F - z_C = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z_A - z_C) \text{ وبالتعويض بالواحد نجد } z_F + 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 \right)$$

$$z_F = 2 + \sqrt{3}i \text{ وبالتالي :}$$

- طبيعة المثلث AFC : لدينا $AF = 3$ و $FC = \sqrt{12}$ و $AC = \sqrt{3}$ وباستعمال فيثاغورس :

$$FC^2 = AC^2 + AF^2 \text{ اي } (\sqrt{12})^2 = \sqrt{3}^2 + 3^2 \text{ و } AFC \text{ قائم في } A$$

(4) طبيعة المجموعة (Γ) :

$$\arg(z - z_C) = \arg\left(k \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \text{ ومنه } z - z_C = k \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ تعني } z + 1 = k \cdot z_B$$

$$\text{اي } (\bar{u}, \overline{CM}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ اذن } (\Gamma) \text{ هي نصف المستقيم الذي بدايته } C \text{ والموجه بزاوية } \frac{\pi}{3}$$

التمرين باك جوان 2017 علوم تجريبية الموضوع 1

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+2)(z^2-4z+8)=0$.

(II) المستوي المركب منسوب إلى معلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحتقاتها : $z_A = 2-2i$ ، $z_B = \bar{z}_A$ و $z_C = -2$

(1) أكتب كلا من z_B و z_A على الشكل الأسّي .

(2) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD .

(3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) حيث $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2}$

تحقق أن مبدا المعلم O هو نقطة من (Γ) ثم عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها .

(4) ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C ونسبته 2 ، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h

عيّن طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة .

حل التمرين باك جوان 2017 علوم تجريبية الموضوع 1

(I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+2)(z^2-4z+8)=0$.

$(z+2)=0$ ومنه $z_0 = -2$ او $z^2-4z+8=0$ وتحل بالمميز : $\Delta = -16 = (4i)^2$

$$\text{ومنه } z_2 = \frac{4+4i}{2} = 2+2i \text{ و } z_1 = \frac{4-4i}{2} = 2-2i$$

(II) (1) $z_A = 2-2i$ ، $z_B = \bar{z}_A$ و $z_C = -2$:

كتابة كلا من z_B و z_A على الشكل الأسّي :

$$z_A = 2\sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ومنه } z_A = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \text{ و } |z_A| = |2-2i| = 2\sqrt{2}$$

$$z_B = 2\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ومنه } z_B = \bar{z}_A = 2+2i$$

(2) تعيين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD :

$$B \text{ مركز ثقل المثلث } ACD \text{ معناه : } z_B = \frac{z_A + z_C + z_D}{3} \text{ ومنه } 3z_B = z_A + z_C + z_D$$

$$\text{وبالتالي } z_D = 6+8i \text{ اذن } z_D = 3z_B - z_A - z_C = 6+6i - 2+2i + 2 = 6+8i$$

(3) (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2}$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \arg\frac{z_B}{z_A} = \arg\frac{2\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

$$= \arg\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \arg e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

التحقق أن مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) : هذا يعني

ومنه النقطة O هي نقطة من (Γ)

$$(\overline{MA}, \overline{MB}) = \frac{\pi}{2} \text{ تعني } \arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2}$$

وهذا يعني $\overline{MA}$ و $\overline{MB}$ متعامدان ومنه مجموعة النقط (Γ) هي القوس $\widehat{BA}$ من الدائرة

ذات القطر $[BA]$ باستثناء النقطتين A و B

(4) h التحاكي الذي مركزه النقطة C ونسبته 2: عبارته المركبة هي:

$$z' - z_C = 2(z - z_C)$$

ومنه: $z' = 2z - z_C = 2z + 2$ وصورة (Γ) بالتحاكي h هي (Γ') وهي القوس $\widehat{B'A'}$ من الدائرة ذات القطر $[A'B']$

باستثناء A' و B' حيث A' و B' هما صورتا A و B بهذا التحاكي

$$z_{B'} = 2z_B + 2 = 2(2 + 2i) + 2 = 6 + 4i \text{ هي لائحة } B'$$

$$z_{A'} = 2z_A + 2 = 2(2 - 2i) + 2 = 6 - 4i \text{ هي لائحة } A'$$

التمرين باك جوان 2017 علوم تجريبية الموضوع 2

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي:

$$(1) \text{ مجموعة حلول المعادلة } \left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2 = 1 \text{ في المجموعة } \mathbb{C} \text{ هي } S = \left\{-\frac{1}{2} + i\right\}.$$

$$(2) \text{ من أجل كل عدد مركب } z, (z+2) \times (\bar{z}+2) = |z+2|^2,$$

$$(3) \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n, \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = 1,$$

$$(4) S \text{ التشابه المباشر الذي مركزه النقطة } \Omega \text{ ذات اللائحة 1 ونسبته 3 وزاويته } \frac{\pi}{2}$$

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C')

ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ ونصف القطر 9

$$(5) \text{ من أجل كل عدد حقيقي } \alpha: \text{ إذا كان } Z = (\sin \alpha + i \cos \alpha) \times (\cos \alpha - i \sin \alpha)$$

$$\text{فإن: } \arg(Z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi, \text{ حيث } k \text{ عدد صحيح.}$$

حل التمرين باك جوان 2017 علوم تجريبية الموضوع 2

(1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2 = 1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي : $S = \left\{-\frac{1}{2}+i\right\}$. صحيحة

التبرير : $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2 = 1$ تعني $\frac{z+1-i}{z-i} = 1$ او $\frac{z+1-i}{z-i} = -1$

$\frac{z+1-i}{z-i} = -1$ تعني : $z+1-i = -z+i$ وبالتالي : $2z = -1+2i$ اذن $z = -\frac{1}{2}+i$

$\frac{z+1-i}{z-i} = 1$ تعني : $z+1-i = z-i$ لا تقبل حلا

(2) من اجل كل عدد مركب z ، $(z+2) \times (\bar{z}+2) = |z+2|^2$ ، صحيحة لان :

من خواص الطويلة والمرافق : $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ و $\overline{z+2} = \bar{z}+2$

اذن $(z+2) \cdot (\overline{z+2}) = (z+2)(\bar{z}+2) = |z+2|^2$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = 1$ ، خاطئة لان : $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

و $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n} = e^{in\pi} = (e^{i\pi})^n = (\cos \pi + i \sin \pi)^n = (-1)^n$

في حالة n فردي فان $(-1)^n = -1$ وفي حالة n زوجي $(-1)^n = 1$

(4) القضية صحيحة : S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ ونصف القطر 9

العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' - 1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1)$ اي : $z' = 3iz - 3i + 1$ اذن صورة الدائرة (C) هي دائرة (C')

مركزها ω' صورة ω بالتشابه S لاحقتها $z_{\omega'} = 3iz_{\omega} - 3i + 1 = 3i(i) - 3i + 1 = -2 - 3i$

ونصف قطر الدائرة (C') هو $r' = 3 \cdot r = 3 \cdot 3 = 9$

(5) α عدد حقيقي : إذا كان $Z = (\sin \alpha + i \cos \alpha) \times (\cos \alpha - i \sin \alpha)$ فإن : $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi$ ، حيث

k صحيح .

العبارة صحيحة لان : نعلم ان : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ وبالتالي :

$Z = (\sin \alpha + i \cos \alpha) \times (\cos \alpha - i \sin \alpha) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) \cdot (\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha))$

اذن : $\arg(Z) = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + (-\alpha) + 2k\pi = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi$

التمرين باك 2017 تقني رياضي الموضوع 1

المستوي منسوب الى معلم م .و.م . نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها : $z_A = -1$ ، $z_B = 2+i$ ، $z_C = -i$

(1) اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الاسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

(2) عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه C و يحول B الى A .

(3) نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة الى C و النقطة E صورة D بالتشابه S .

(أ) عين z_D لاحقة D ثم تحقق ان : $z_E = 1 - 2i$ حيث z_E لاحقة E .

(ب) حدد طبيعة الرباعي $ADEB$.

(4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z . (M تختلف عن A و B)

$$\arg(z - z_A) - \arg(z - z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

تحقق ان النقطة C تنتمي الى (Γ) ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) و انشئها.

حل التمرين باك 2017 تقني رياضي الموضوع 1:

A, B و C لواحقتها على الترتيب : $z_A = -1, z_B = 2 + i, z_C = -i$

(1) كتابة العدد $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الاسي ثم استنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-1 + i}{2 + 2i} = \frac{(-1 + i)(2 - 2i)}{(2 + 2i)(2 - 2i)} = \frac{(-1 + i)(2 - 2i)}{2^2 + 2^2} = \frac{4i}{8} = \frac{1}{2}i$$

$$\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \arg\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \quad \text{و} \quad \left|\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right| = \left|\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$$

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{إذن}$$

طبيعة المثلث ABC :

$$(\overline{CB}, \overline{CA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \quad \text{معناه} \quad \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

وعليه المثلث ABC قائم في C .

$$\left|\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}\right| = \frac{1}{2} \quad \text{نسبته هي : } \frac{1}{2}$$

$$\arg\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

ومنه من أجل كل نقطة $M(z)$ صورتها $M'(z)$ بالتشابه S فإن :

$$z' - z_C = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_C)$$

$$z' = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}z + \left(1 - \frac{1}{2}i\right)(-i) \quad \text{اذن} \quad z' = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}z - \frac{1}{2} - i \quad \text{أي ان : } z' = \frac{1}{2}i \cdot z - \frac{1}{2} - i$$

وهي العبارة المركبة للتشابه S .

(3) نظيرة D بالنسبة الى C و E صورة D بالتشابه S .

(أ) تعيين z_D لاحقة D ثم التحقق ان : $z_E = 1 - 2i$

$$D \text{ نظيرة } B \text{ بالنسبة الى } C \text{ معناه } \frac{z_D + z_B}{2} = z_C \quad \text{ومنه} \quad z_D = 2z_C - z_B \quad \text{أي} \quad z_D = 2(-i) - 2 - i$$

$$z_D = -2 - 3i$$

$$\bullet \text{ التحقق أن } z_E = 1 - 2i \quad \text{لدينا} \quad z' = \frac{1}{2}iz - \frac{1}{2} - i$$

$$S(D) = E \quad \text{معناه} \quad z_E = \frac{1}{2}iz_D - \frac{1}{2} - i \quad \text{ومنه} \quad z_E = \frac{1}{2}i(-2 - 3i) - \frac{1}{2} - i \quad \text{أي} \quad z_E = -i + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - i$$

$$z_E = 1 - 2i \quad \text{ومنه}$$

(ب) طبيعة الرباعي $ADEB$:

$$\frac{z_E - z_A}{z_B - z_D} = \frac{1-2i+1}{2+i+2+3i} = \frac{2-2i}{4+4i} = \frac{1-i}{2+2i} = \frac{(1-i)(2-2i)}{2^2+2^2} = -\frac{1}{2}i$$

أي $\frac{z_E - z_A}{z_B - z_D} = -\frac{1}{2}i$ ومنه $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{DB}$ متعامدان (1)

$$(2) \dots\dots \frac{z_A + z_E}{2} = \frac{z_D + z_B}{2} = z_C \text{ أي } \frac{z_A + z_E}{2} = \frac{-1+1-2i}{2} = -i = z_C \text{ وبما أن } \frac{z_D + z_B}{2} = z_C$$

من (1) و (2) القطران متعامدان ومتناصفان إذن الرباعي $ADEB$ معين.

$$(4) \quad (\Gamma) \text{ مجموعة النقط } M \text{ من المستوي ذات اللاحقة } z \quad \arg(z - z_A) - \arg(z - z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

التحقق ان النقطة C تنتمي الى (Γ) :

$$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{تكافئ} \quad \arg(z - z_A) - \arg(z - z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ولدينا } \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \arg\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \quad \text{إذن } C \in (\Gamma)$$

• تحديد طبيعة المجموعة (Γ) :

$$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{تكافئ} \quad \arg(z - z_A) - \arg(z - z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

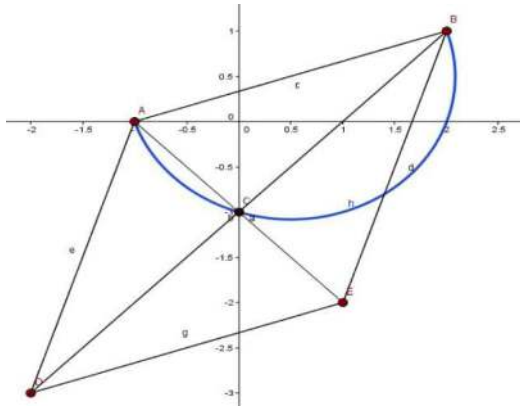
$$\text{معناه } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{تكافئ}$$

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

ومنه (Γ) هي نصف القوس من الدائرة التي مركزها Ω ذات

اللاحقة $\frac{z_A + z_B}{2}$ وقطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B .

الإنشاء :



التمرين 2017 تقني رياضي الموضوع 2

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A, B, C, D التي لواحقتها : $z_A = 1+i, z_B = \bar{z}_A, z_C = \frac{1}{2}(1-i), z_D = \bar{z}_C$.

(1) (أ) - أكتب z_C و z_A على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل الأسّي للعددين z_D و z_B .

(ب) - عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $(z_A)^n = (z_B)^n$.

(2) (أ) - أوجد نسبة ومركز التحاكي h الذي يحول D إلى A ويحول C إلى B .

(ب) - أحسب طولية العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ADCB$.

(3) جد z_G للاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; 2), (C; -1), (D; -1)\}$.

(4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\| = \sqrt{5}$

بين أن A نقطة من (Γ) ، ثم حدّد طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة وأنشئها.

حل التمرين باك 2017 تقني رياضي الموضوع 2:

$$A, B, C, D \text{ لواحقتها على الترتيب : } z_A = 1+i, z_B = \bar{z}_A, z_C = \frac{1}{2}(1-i), z_D = \bar{z}_C$$

(1) أ- أكتابة z_A و z_C على الشكل الأسّي ثم استنتاج الشكل الأسّي للعددين z_B و z_D :

• كتابة z_A على الشكل الأسّي : طويّة z_A : $|z_A| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta_1 = \frac{x}{|z_A|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{y}{|z_A|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \text{ ومثله } \theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \text{ ولتكن } \theta_1 \text{ ومثله}$$

$$\text{وعليه } z_A = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

• كتابة z_C على الشكل الأسّي : $|z_C| = \left| \frac{1}{2}(1-i) \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \text{ ومثله } \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \text{ وعليه } z_C = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

• استنتاج z_D و z_B على الشكل الأسّي :

$$z_B = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ أي } z_B = \overline{z_A} = \overline{\left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)} = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_D = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ أي } z_D = \overline{z_C} = \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

ب- تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $(z_A)^n = (z_B)^n$

$$\left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n \text{ تكافئ } \sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}} = \sqrt{2}^n e^{-i\frac{n\pi}{4}} \text{ ومثله } e^{i\frac{n\pi}{4}} = e^{-i\frac{n\pi}{4}} \text{ ومثله } \sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}} = \sqrt{2}^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}$$

$$\text{وعليه } \frac{n\pi}{4} = -\frac{n\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \text{ ومثله } n\pi = -n\pi + 8k\pi \text{ ومثله } 2n = 8k\pi / k \in \mathbb{Z} \text{ وعليه فإن } n = 4k$$

(2) أ- إيجاد نسبة ومركز التحاكي h الذي يحول D إلى A ويحول C إلى B :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_A = az_D + b \\ z_B = az_C + b \end{array} \right. \text{ وبالمطرح نجد } z_A - z_B = a(z_D - z_C) \text{ والنسبة : } \left\{ \begin{array}{l} h(D) = A \\ h(C) = B \end{array} \right. \text{ ومثله}$$

$$a = \frac{z_A - z_B}{z_D - z_C}$$

$$\text{أي } a = \frac{1+i-1-i}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{2i}{i} = 2 \text{ وبالتعويض بقيمة } a \text{ في المعادلة (1) نجد } 1+i = 1+i+b \text{ ومثله}$$

$$b = 0 \text{ . ومثله عبارة التحاكي } h \text{ هي } z' = 2z$$

مركز التحاكي h : لتكن النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة z_Ω وعليه $h(\Omega) = \Omega$ ومثله $z_\Omega = 2z_\Omega$

$$\Omega(0,0) \text{ أي } z_{\Omega} = \frac{0}{1-2} = 0 \quad \text{إذن}$$

(ب) - حساب العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}$ ثم استنتاج طبيعة الرباعي ADCB :

$$\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A} = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) - (1-i)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) - (1-i)} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{-1+i}{-1-i} = \frac{-i(-i-1)}{-1-i} = -i$$

• طبيعة الرباعي ADCB :

$$\text{لدينا } \begin{cases} \frac{z_C - z_B}{z_D - z_A} = -i \\ h(D) = A \\ h(C) = B \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} BC = AD \\ AB = 2DC \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \left| \frac{z_C - z_B}{z_D - z_A} \right| = |-i| = 1 \\ AB = 2DC \end{cases}$$

لدينا التحاكي يحافظ على التوازي . أي $(DC) // (AB)$ وبالتالي نستنتج ان الرباعي ADCB هو شبه منحرف متساوي الساقين

(3) إيجاد z_G لاحقة G مرجح الجملة $\{(A;2), (B;2), (C;-1), (D;-1)\}$:

$$z_G = \frac{2z_A + 2z_B - z_C - z_D}{2+2-1-1} = \frac{2(1+i) + 2(1-i) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{2} = \frac{2+2i+2-2i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$$

ومنه $G\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

$$\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\| + \sqrt{5} \quad (4)$$

تبيان أن A نقطة من (Γ) : لدينا $\|2\overrightarrow{AA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\| = \|2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\|$

$$\text{وعليه } 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \left(0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}; -4 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) \text{ فإن } \begin{cases} 2\overrightarrow{AB}(0, -4) \\ -\overrightarrow{AC}\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \\ -\overrightarrow{AD}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{cases} \text{ بما أن : } \begin{cases} \overrightarrow{AB}(0, -4) \\ \overrightarrow{AC}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \\ \overrightarrow{AD}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

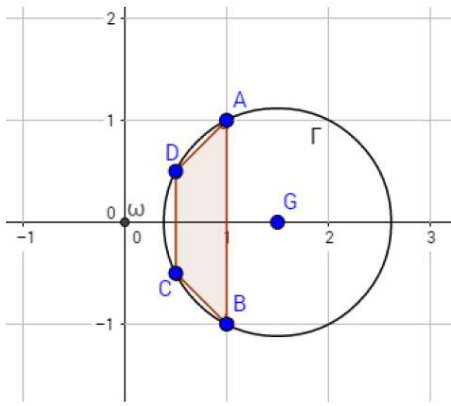
أي $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}(1; -2)$

$$\text{ومنه } A \in (\Gamma) \text{ وعليه } \|2\overrightarrow{AA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\| = \|2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

• طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة :

$$\text{تكافئ } \|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\| = \sqrt{5}$$

$$\|2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GD}\| = \sqrt{5}$$



$$GM = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ أي } \|2\overline{GM}\| = \sqrt{5} \text{ ومنه}$$

ومنه (Γ) هي دائرة ذات المركز G ونصف القطر $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

• الإنشاء :

التمرين باك 2017 رياضي الموضوع 1

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z : $(z-2+2i)(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$
- (2) المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = 2(1-i)$
- (أ) اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الاسي ثم استنتج ان النقط A ، B و C تنتمي الى دائرة (Ω) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

(ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخليا صرفا

(ج) نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z = z_C - k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ مع k يسمح $\mathbb{R}_+$

تحقق ان النقطة C تنتمي الى (Γ) ، ثم عين و انشئ (Γ)

(3) Υ الدوران الذي مركزه النقطة O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ ، h التحاكي الذي مركزه النقطة O و نسبته -2

عين طبيعة التحويل $h \circ r$ و عناصره المميزة ، ثم استنتج ثورة الدائرة (Ω) بالتحويل $h \circ r$

حل التمرين باك 2017 رياضي الموضوع 1 :

(1) حل المعادلة $(z-2+2i)(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$ في $\mathbb{C}$ ، المعادلة تكافئ : أي $\begin{cases} z-2+2i=0... (1) \\ z^2-2\sqrt{2}z+8=0... (2) \end{cases}$

$$\begin{cases} z_0 = 2-2i \\ z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6} \\ z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{6} \end{cases} \text{ حلول المعادلة هي } \begin{cases} z = 2-2i \\ z^2 - 2\sqrt{2}z + 8 = 0... (1) \end{cases}$$

(2) أ- كتابة z_A ، z_B و z_C على الشكل الاسي $|z_A| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ومنه $z_A = 2\sqrt{2}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$

$$z_C = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} \text{ ومنه } |z_C| = 2\sqrt{2} \text{ ومنه } z_C = 2(1-i) \text{ و } z_B = \overline{z_A} = 2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

بما أن $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2\sqrt{2}$ ومنه النقط A ، B و C تنتمي الى الدائرة (Ω) التي مركزها O و نصف قطرها $2\sqrt{2}$.

(ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيلي صرفا

لدينا $\left(\frac{z_A}{z_C}\right) = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{7\pi}{12}}$ ومنه $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n = e^{i\frac{7n\pi}{12}}$ عدد تخيلي صرف يعني أن $\frac{7n\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ و k عدد صحيح ومنه بالضرب في $\frac{12}{\pi}$ نجد $7n = 6 + 12k$ أي أن $7n \equiv 6[12]$ ومنه بالضرب في 5 نجد $35n \equiv 30[12]$

أي $n \equiv 6[12]$ ومنه $n = 6 + 12k'$ إذن $n = 6 + 12k'$ و k' عدد طبيعي .

(ج) التحقق ان C تنتمي إلى (Γ) : $z_C = z_C - k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ يعني $-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = 0$ ومنه $k = 0$ بما أنه عدد من $\mathbb{R}_+$

فان C تنتمي إلى (Γ)

$z - z_C = -k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ اي $z - z_C = -k \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ومنه

$$\text{ومنه } \begin{cases} \arg(z - z_C) = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k'' & k'' \in \mathbb{Z} \\ |z - z_C| = k & k \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \text{ اي } z - z_C = k \cdot e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

ومنه مجموعة النقط (Γ) لما يسمح k المجموعة $\mathbb{R}_+^*$ هي نصف مستقيم مبدؤه C وشعاع توجيهه $\bar{w}$ حيث $(\bar{u}, \bar{w}) \equiv \frac{5\pi}{3}[2\pi]$ و $CM = k$ $k \in \mathbb{R}_+^*$

(3) الدوران الذي مركزه النقطة O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ ، h التحاكي الذي مركزه النقطة O و نسبته -2 تعيين طبيعة التحويل $h \circ r$:

العبارة المركبة للدوران r هي : $z' - z_O = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_O)$ اي $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot z$

و العبارة المركبة للتحاكي h هي : $z' - z_O = -2(z - z_O)$ اي $z' = -2z$ و باستعمال مخطط تركيب التحويلين h و r

نجد : $M(z) \xrightarrow{r} M_1(z_1) \xrightarrow{h} M'(z')$ من هذا نجد :

$r(M) = M_1$ تعني : $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot z$ و $h(M_1) = M'$ تعني : $z' = -2z_1$ وبالتالي : $hor(M) = M'$ اي :

$$z' = -2\left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot z\right)$$

ومنه العبارة المركبة للتحويل $h \circ r$: $z' = 2 \cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right)} \cdot z$

اذن $h \circ r$ هو تشابه مباشر نسبته 2 و زاويته $\frac{5\pi}{3}$ و مركزه O

صورة الدائرة (Ω) بالتحويل $h \circ r$: بما ان (Ω) دائرة مركزها O و نصف قطرها $R = 2\sqrt{2}$ فان صورتها بالتحويل $h \circ r$ هي دائرة (Ω')

مركزها هو صورة O بالتحويل $h \circ r$ اي $h \circ r(O) = O$ و نصف قطرها $2R = 4\sqrt{2}$

التمرين :باك 2017 رياضي الموضوع 2

(I) اكتب العدد $\left(\frac{5}{2} + i\right)^2$ على الشكل الجبري ثم استنتج الجذرين التربيعين للعدد المركب $\frac{21}{4} + 5i$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و I ذات اللواحق

$$z_I = i \text{ و } z_C = -\bar{z}_A \text{ ، } z_B = -\frac{3}{2}i \text{ ، } z_A = \frac{3}{2} + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

(1) أكتب z_B و z_A على الشكل الجبري .

(2) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسّي مستنتجا طبيعة المثلث ABC .

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه B و يحول A إلى I .

أ- اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S ثم عين نسبته و زاويته .

ب- نعرف من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ التحويل النقطي T_n كما يلي : $T_n = \underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_n$

عين قيم n حتى يكون T_n تحاكيا ، عين عندئذ عناصره المميزة .

حل التمرين باك 2017 رياضي الموضوع 2 :

(I) (أ) كتابة العدد $\left(\frac{5}{2} + i\right)^2$ على الشكل الجبري: $\left(\frac{5}{2} + i\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (i)^2 + 2 \times \frac{5}{2}i = \frac{21}{4} + 5i$

(ب) نستنتج ان الجذرين التربيعيين للعدد $\frac{21}{4} + 5i$ هما : $\frac{5}{2} + i$ و $-\frac{5}{2} - i$

(II) النقط A ، B ، C و I لواحقتها : $z_A = \frac{3}{2} + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B = -\frac{3}{2}i$ ، $z_C = -\bar{z}_A$ و $z_I = i$.

(1) كتابة z_C و z_A على الشكل الجبري .

$$z_A = \frac{3}{2} + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2} + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{2} + i$$

$$z_C = -\bar{z}_A = -\overline{\left(\frac{5}{2} + i\right)} = -\left(\frac{5}{2} - i\right) = -\frac{5}{2} + i$$

(2) كتاب العدد $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسّي:

$$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{ومنه} \quad \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-\frac{5}{2} + i + \frac{3}{2}i}{\frac{5}{2} + i + \frac{3}{2}i} = \frac{-5 + 5i}{5 + 5i} = \frac{-1 + i}{1 + i} = \frac{(-1 + i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{2i}{2} = i$$

$$(\overline{BA}, \overline{BC}) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \text{اذن} \quad \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg(i) \quad \text{و} \quad BC = BA \quad \text{اذن} \quad \left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = 1$$

نستنتج ان المثلث ABC قائم في B ومتقايس الساقين .

(3) (أ) كتابة العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه B و يحول A إلى I اي $s(A) = I$
 العبارة المركبة هي من الشكل : $z' = a \cdot z + b$ ومنه (ب) $z_I = a \cdot z_A + b$ وبما ان مركزه B فهي اذن نقطة صامدة

وبالتالي : (ب) $z_B = a \cdot z_B + b$ ومن (أ) و(ب) نجد بالطرح : $z_I - z_B = a \cdot (z_A - z_B)$ ومنه

$$a = \frac{z_I - z_B}{z_A - z_B} = \frac{i + \frac{3}{2}i}{\frac{5}{2} + i + \frac{3}{2}i} = \frac{\frac{5}{2}i}{\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i} = \frac{i}{1 + i} = \frac{i(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - i}{2} = \frac{1}{2} - i \frac{1}{2}$$

$$b = z_B - a \cdot z_B = -\frac{3}{2}i - \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}i\right) = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}i$$

ومنه العبارة المركبة للتشابه S : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right) \cdot z + \left(-\frac{3}{4} - \frac{3}{4}i\right)$

نسبة التشابه هي : $\left|\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته هي $\arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

(ب) - T_n تحويل نقطي حيث : $T_n = \underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_n$ و $n \geq 2$ و $S\left(B, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

تعيين قيم n حتى يكون T_n تحاكيا : T_n هو التشابه الذي مركزه B ونسبته $\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \dots \times \frac{\sqrt{2}}{2}}_n$ وزاويته

$$B \quad \text{ومركزه} \quad n\frac{\pi}{4} \quad \text{وزاويته} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \quad \text{ومنه} \quad T_n \text{ تشابه مباشر نسبته} \quad \underbrace{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \dots + \frac{\pi}{4}}_n$$

وحتى يكون T_n تحاكيا يجب ان يكون $n\frac{\pi}{4} = k\pi$ اي أن $n = 4k$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$ اذن

$$T_n = S\left(B, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{4k}, k\pi\right)$$

ونميز حالتين : - اذا كان k زوجيا اي $k = 2p$ فان T_n هو تحاكيا مركزه B ونسبته $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{8p}$

- اذا كان k فرديا اي $k = 2p + 1$ فان T_n هو تحاكيا مركزه B ونسبته $-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{8p}$

التمرين : باك 2018 علوم تجريبية الموضوع الأول

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول التالية : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$.

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحتقاتها على الترتيب : z_A ، z_B و z_C حيث :

$$(z_B \text{ مرافق } \bar{z}_B) \quad z_C = \bar{z}_B \text{ و } z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \quad z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اكتب z_A و z_B على الشكل الاسي ثم عين عدد قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

(3) أ) تحقق ان : $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ وحدد طبيعة المثلث OBC

ب) استنتج ان : B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة .

(4) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $|z| = \left| \bar{z} - \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right|$

عين طبيعة المجموعة (γ) ثم عين صورتها بالدوران r .

حل التمرين باك 2018 ع تج م 1:

(1) حل المعادلة : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$.

$$\Delta = -1 \text{ و منه للمعادلة حلان مترافقان } z_1 = \frac{\sqrt{3}-i}{2} \text{ و } z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$(2) \quad z_C = \bar{z}_B = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \text{ و } z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ و } z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

كتابة z_A و z_B على الشكل الاسي:

لدينا $z_A = \cos \theta + i \sin \theta$ حيث $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos \theta = \frac{1}{2}$ و منه $\arg(z_A) = \frac{\pi}{3}$

$$\text{و } |z_A| = \left| \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1 \text{ اذن } z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

لدينا $|z_B| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right| = 1$ و $\sin \theta = \frac{1}{2}$ و $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و منه $\arg(z_B) = \frac{\pi}{6}$ اذن $z_B = e^{i\frac{\pi}{6}}$

- تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \text{ و منه } \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{6}}$$

يكافئ $e^{i\frac{n\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ يكافئ $\frac{\pi n}{6} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}$ و منه $\frac{n}{6} = \frac{1}{3} + 2k$ اذن : $n = 12k + 2$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

(3) أ) التحقق ان : $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ حيث $z_C = \bar{z}_B = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$$\left| \frac{z_B}{z_C} \right| = \frac{OB}{OC} = 1 \text{ و هذا يعني ان } \left| \frac{z_B}{z_C} \right| = 1 \text{ و منه } \left(\frac{z_B}{z_C} \right) = \frac{z_B}{z_C} = \frac{e^{\frac{\pi i}{6}}}{e^{-\frac{\pi i}{6}}} = e^{\frac{2\pi i}{6}} = e^{\frac{\pi i}{3}}$$

$$\arg\left(\frac{z_B}{z_C}\right) = \frac{\pi}{3}$$

يعني $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ و منه المثلث OBC متقايس الاضلاع

ب) استنتاج ان B هي صورة C بدوران r

$$z_B - z_O = e^{\frac{\pi i}{3}} (z_C - z_O) \text{ اي } z_B = z_C \cdot e^{\frac{\pi i}{3}} \text{ فان } \frac{z_B}{z_C} = e^{\frac{\pi i}{3}}$$

وهذا يعني ان B هي صورة C بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$

$$(4) \text{ تعيين مجموعة النقط } (\gamma) \text{ التي تحقق: } |z| = \left| z - \frac{\sqrt{3} + i}{2} \right| \dots (*)$$

$$(*) \text{ تكافئ } |z| = \left| z - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \right| \text{ و تكافئ } |z| = \left| z - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right| \text{ و تكافئ } |z| = \left| z - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \right| \text{ و تكافئ } |z| = \left| z - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right|$$

$$|z - z_O| = |z - z_C|$$

ان $OM = CM$ ومنه المجموعة (γ) للنقط M هي محور القطعة المستقيمة $[OC]$

- تعيين صورة (γ) بالدوران r :

بما ان $r(O) = O$ و $r(C) = B$ فان صورة (γ) بالدوران r هي محور القطعة المستقيمة $[OB]$ لان الدوران تقايس يحافظ على المسافات و الزوايا الموجهة

التمرين باك 2018 علوم تجريبية الموضوع الثاني

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\bar{z} - 4 + i)(z^2 - 4z + 5) = 0$ (يرمز $\bar{z}$ لمرافق العدد z).

(II) المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A, B و C التي لاحتقاتها على الترتيب $z_A = 2 + i, z_B = 4 + i, z_C = \bar{z}_A$.

$$(1) \text{ تحقق أن } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i \text{ ثم عين قيم العدد الطبيعي } n \text{ بحيث يكون العدد } \left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right)^n \text{ تخيليا صفرًا.}$$

$$(2) \text{ نقطة من المستوي لاحتقتها } z_D \text{ حيث : } \begin{cases} |z_D - z_A| = |z_B - z_A| \\ \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

بين أن المثلث ABD متقايس الأضلاع وأحسب z_D .

(3) أحسب z_G لاحتقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD ثم عين نسبة و زاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول G إلى D .

$$(4) \text{ عين } (\Gamma) \text{ مجموعة النقط } M \text{ ذات اللاحقة } z \text{ (} M \text{ تختلف عن } z \text{) بحيث : } \arg\left(\frac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

حل التمرين باك 2018 ع تج م 2:

(I) حل المعادلة $(\bar{z} - 4 + i)(z^2 - 4z + 5) = 0$

معناه : $\bar{z} - 4 + i = 0$ أو $z^2 - 4z + 5 = 0$ ، أي : $\bar{z} = 4 - i$ ، ومنه : $z_0 = 4 + i$.

و $\Delta = -4 = (2i)^2$ ، ومنه المعادلة تقبل حلين مترافقين ، أي : $\sqrt{\Delta} = 2i$

إذن : $z_2 = 2 + i$ ، $z_1 = \frac{-(-4) - 2i}{2} = 2 - i$.

(II) (1) التحقق أن $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$: حيث $z_B = 4 + i$ ، $z_A = 2 + i$ و $z_C = \bar{z}_A = 2 - i$.

لدينا : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{4 + i - 2 - i}{2 - i - 2 - i} = \frac{2}{-2i} = \frac{1}{-i} = i$ ، وهو المطلوب .

- تعيين قيم n حتى يكون $\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n = (i)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n$ تخيليا صرفا :

$\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n$ تخيلي صرف معناه $e^{i\frac{n\pi}{2}}$ تخيلي صرف أي $e^{i\frac{n\pi}{2}}$ تخيلي صرف

وهذا معناه : $\arg\left(e^{i\frac{n\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، أي : $\frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، أي : $\frac{n}{2} = \frac{1}{2} + k$ ، ومنه : $n = 2k + 1$ حيث k عدد صحيح

(2) تبين أن المثلث ABD متقايس الأضلاع :

لدينا : $|z_D - z_A| = |z_B - z_A|$ وهذا يعني أي : $AD = AB$ و $\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ وتعني $(\overline{AB}, \overline{AD}) = \frac{\pi}{3}$ ، ومنه المثلث ABD متقايس الأضلاع .

- حساب z_D :

لدينا $|z_D - z_A| = |z_B - z_A|$ ومنه $\left|\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ إذن $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ومنه : $z_D - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$

، $z_D = 3 + (1 + \sqrt{3})i$: أي : $z_D = 1 + \sqrt{3}i + 2 + i$: إذن $z_D - (2 + i) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4 + i - 2 - i)$

(3) حساب z_G : z_G هي لاحقة مركز ثقل المثلث ABD ، إذن : $z_G = \frac{z_A + z_B + z_D}{3}$ ، ومنه :

$z_G = \frac{2 + i + 4 + i + 3 + (1 + \sqrt{3})i}{3} = 3 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)i$

- تعيين نسبة و زاوية التشابه المباشر S الذي مركزه A و $S(G) = D$

لدينا إذن $\begin{cases} z_A = a.z_A + b \\ z_D = a.z_G + b \end{cases}$ بالطرح نجد : $a = \frac{z_D - z_A}{z_G - z_A}$ ومنه

$a = \frac{z_D - z_A}{z_G - z_A} = \frac{3 + (1 + \sqrt{3})i - 2 - i}{3 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)i - 2 - i} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + i3\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{(3 + i3\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})}{12} = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن نسبة التشابه هي : $|a| = \sqrt{3}$ ، و زاويته هي : $\arg(a) = \arg\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

$$(4) \text{ تعيين } (\Gamma) \text{ مجموعة النقط } M(z) \text{ حيث } \operatorname{Arg}\left(\frac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi$$

$\arg\left(\frac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi$ تعني : $(\overline{MC}; \overline{MG}) = \pi + 2k\pi$ ، و منه : (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z هي القطعة المستقيمة $[GC]$ باستثناء النقطتين G و C

التمرين : بكالوريا 2018 تقني رياضي الموضوع الأول

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

(II) المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

لتكن النقطتين A ، B لاحتقائهما : $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $z_B = \overline{z_A}$ ($\overline{z_A}$ هو مرافق z_A)

(1) اكتب على الشكل الاسي كلا من العددين المركبين z_A و $\frac{1}{z_B}$ ثم بين ان العدد $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف

(2) لتكن النقطة C صورة B بالتحاكي h الذي مركزه ω ذات اللاحقة $z_\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ونسبته (-3)

بين ان لاحقة C هي $z_C = -\sqrt{2} + i.3\sqrt{2}$

(3) احسب z_D لاحقة النقطة D صورة B بالدوران الذي مركزه O و زاويته $(-\frac{\pi}{2})$

(4) (أ) بين ان $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = -i$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACD

(ب) اوجد لاحقة النقطة E بحيث يكون الرباعي $ACED$ مربعا .

حل التمرين باك 2018 تقني رياضي الموضوع 1

(I) حل في المعادلة : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{i^2 \times 8} = 2\sqrt{2}i \text{ ومنه } \Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4(1)(4) = -8$$

$$\text{ومنه } z_2 = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \text{ ؛ } z_1 = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

(II) (1) $z_A = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ ؛ $z_B = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ كتابة z_A ؛ $\frac{1}{z_B}$ على الشكل الاسي :

$$\text{- طولية } z_A : |z_A| = |\sqrt{2} + \sqrt{2}i| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\text{عمدة لـ } z_A : \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ ومنه } \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ / } k \in \mathbb{Z} \text{ ومنه } z_A = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{لدينا } z_B = \overline{z_A} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ومنه}$$

$$\text{- الطويلة : } \left|\frac{1}{z_B}\right| = \frac{1}{2} \text{ ؛ و } \arg\left(\frac{1}{z_B}\right) = \arg(1) - \arg(z_B) = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{z_B} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ومنه}$$

اثبات أن $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف:

$$\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2018} = \left(e^{i\left(\frac{2018\pi}{4}\right)}\right) = \left(e^{i\left(\frac{2016\pi+2\pi}{4}\right)}\right) = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi(252)\right)}\right) \text{ لدينا}$$

$$\text{ومنه } \left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i = i \text{ ومنه } \left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018} \text{ تخيلي صرف.}$$

(2) إثبات أن لاحقة C هي : $z_C = -\sqrt{2} + i3\sqrt{2}$

C صورة B بالتحاكي h الذي مركزه ω لاحقها $z_\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ونسبته (-3) معناه

$$z_C = -\sqrt{2} + i3\sqrt{2} \text{ ومنه } z_C = -3z_B + 4z_\omega \text{ ومنه } (z_C - z_\omega) = -3(z_B - z_\omega)$$

(3) حساب z_D لاحقة D صورة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$:

$$\text{لدينا } r(B) = D \text{ معناه } z_D = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_B \text{ تكافيء } z_D = -i(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \text{ ومنه } z_D = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

(4) (أ) - إثبات أن $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = -i$ واستنتاج طبيعة المثلث ACD :

$$\begin{aligned} \frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} &= \frac{(-\sqrt{2} + i3\sqrt{2}) - (\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{(-\sqrt{2} - i\sqrt{2}) - (\sqrt{2} + i\sqrt{2})} = \frac{-2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2} - i2\sqrt{2}} \\ &= \frac{-2\sqrt{2}(1-i)}{-2\sqrt{2}(1+i)} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i \end{aligned}$$

طبيعة المثلث ACD :

$$\left| \frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} \right| = \frac{AC}{AD} = |-i| = 1$$

لدينا

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

ومنه المثلث ACD قائم في A ومتقايس الساقين.

(ب) - تعيين لاحقة E حتى يكون $ACED$ مربع: لدينا $AC = AD$

$ACED$ مربع معناه $z_E + z_A = z_C + z_D$ ومنه $z_E = z_C + z_D - z_A$ ومنه

$$z_E = -3\sqrt{2} + i\sqrt{2} \text{ ومنه } z_E = (-\sqrt{2} + i3\sqrt{2}) + (-\sqrt{2} - i\sqrt{2}) - (\sqrt{2} + i\sqrt{2})$$

التمرين : بكالوريا 2018 تقني رياضي الموضوع الثاني

(I) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $4z^2 - 2z + 1 = 0 \dots (E)$

(ب) - أكتب العددين $\frac{1}{z_1}$ و $\frac{1}{z_2}$ على الشكل الأسّي حيث z_1 و z_2 حلا المعادلة.

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C التي لواحقتها :

$$z_C = 1 - i\sqrt{3}, z_B = 1 + i\sqrt{3}, z_A = 4$$

(1) (أ) - أحسب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ثم حدد طبيعة المثلث ABC .

(ب) - استنتج أن B هي صورة C بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته .

(2) أوجد لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ واستنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.

(3) حدد طبيعة (γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z التي تحقق مايلي : $|iz + \sqrt{3} - i| = |z - 1 + i\sqrt{3}|$

(4) بين أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تنتمي إلى (γ) .

حل التمرين باك 2018 تقنى رياضى الموضوع 2

(1)(أ) حل المعادلة $4z^2 - 2z + 1 = 0$ (E)

$$\sqrt{\Delta} = i2\sqrt{3} ; \Delta = (-2)^2 - 4(4)(1) = -12$$

$$\text{ومنه } z_2 = \frac{2 - i2\sqrt{3}}{8} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{4} ; z_1 = \frac{2 + i2\sqrt{3}}{8} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4}$$

(ب) كتابة الشكل الأسى :

$$\frac{1}{z_1} = \frac{4}{1 + i\sqrt{3}} = 1 - i\sqrt{3} \text{ ومنه } z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} \text{ لدينا}$$

$$\left| \frac{1}{z_1} \right| = |1 - i\sqrt{3}| = 2 : \frac{1}{z_1} \text{ طويلة}$$

$$\frac{1}{z_1} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه } \arg\left(\frac{1}{z_1}\right) = \arg(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} : \frac{1}{z_1} \text{ عمدة للعدد}$$

$$\frac{1}{z_2} = \frac{4}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{4(1 + i\sqrt{3})}{(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})} = 1 + i\sqrt{3} \text{ ومنه } z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} \text{ لدينا : } \frac{1}{z_2} \text{ طويلة العدد}$$

$$\left| \frac{1}{z_2} \right| = \frac{4}{|1 - i\sqrt{3}|} = |1 + i\sqrt{3}| = 2$$

$$\frac{1}{z_2} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه } \arg\left(\frac{1}{z_2}\right) = \arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} : \frac{1}{z_2} \text{ عمدة للعدد}$$

$$z_C = 1 - i\sqrt{3} ; z_B = 1 + i\sqrt{3} ; z_A = 4 \text{ (II)}$$

(1) (أ) حساب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ثم تحديد طبيعة المثلث ABC :

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1 + i\sqrt{3} - 4}{1 - i\sqrt{3} - 4} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{-3 - i\sqrt{3}} = \frac{(-3 + i\sqrt{3})(-3 + i\sqrt{3})}{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ و } \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{AB}{AC} = \left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1 \text{ ومنه}$$

ومن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

(2) إيجاد لاحقة D :

D صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overline{CB}$ معناه $\overline{AD} = \overline{CB}$ ومنه $z_D - z_A = z_B - z_C$ وعليه $z_D = z_B - z_C + z_A$ ومنه $z_D = 1 + i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3} + 4$ ومنه $z_D = 4 + i2\sqrt{3}$ وطبيعة الرباعي $ACBD$:

لدينا $\overline{AD} = \overline{CB}$ ومنه الرباعي $ACBD$ متوازي اضلاع و $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ والمثلث ABC متقايس الاضلاع ومنه الرباعي $ACBD$ معين .

(3) تحديد طبيعة (γ) مجموعة النقط M حيث: $|iz + \sqrt{3} - i| = |z - 1 + i\sqrt{3}|$

$$\left| i \left(z - i\sqrt{3} - 1 \right) \right| = |z - 1 + i\sqrt{3}| \text{ تكافئ } \left| i \left(z + \frac{\sqrt{3}}{i} - 1 \right) \right| = |z - 1 + i\sqrt{3}| \text{ معناه } |iz + \sqrt{3} - i| = |z - 1 + i\sqrt{3}|$$

ومنه $|z - (1 + i\sqrt{3})| = |z - (1 - i\sqrt{3})|$ تكافئ $|z - z_B| = |z - z_C|$ ومنه $MB = MC$ ومنه (γ) هي المستقيم المحوري للقطعة $[BC]$.

(4) تبيان أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تنتمي إلى (γ) :

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{4 + 1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3}}{3} = 2 \text{ ومنه } G \text{ هي مركز ثقل المثلث } ABC$$

$$\text{لدينا } \begin{cases} |z_B - z_G| = |1 + i\sqrt{3} - 2| = |-1 + i\sqrt{3}| = 2 \\ |z_C - z_G| = |1 - i\sqrt{3} - 2| = |-1 - i\sqrt{3}| = 2 \end{cases} \text{ ومنه } GB = GC$$

ومنه G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تنتمي إلى (γ) .

التمرين : باك 2018 رياضى الموضوع الأول

المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، θ عدد حقيقي من المجال $]-\pi; \pi]$

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(z^2 - 2z + 2)(z^2 - 2(\sin \theta)z + 1) = 0$$

(II) A ، B ، C و D نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب

$$z_A = -\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} , z_B = 1 - i , z_C = \sin \theta + i \cos \theta , z_D = \overline{z_C} \text{ (يرمز } \overline{z_C} \text{ إلى مرافق } z_C \text{)}$$

(1) اكتب الأعداد z_A ، z_B و z_C و z_D على الشكل الاسي .

$$(2) E \text{ نقطة من المستوي لاحقتها } z_E \text{ حيث } z_E = \frac{z_A}{z_B} .$$

- بين أن النقط C ، D و E تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A و زاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $(2\sqrt{2} - 2)$.

- عين قيمة θ حتى تكون النقطة B صورة النقطة C بالتشابه المباشر S .

(4) نضع $\theta = \frac{-3\pi}{4}$ ، عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(z_D)^n$ تخيليا صرفا .

حل التمرين باك 2018 رياضى م 1 :

$$(I) \text{ حل المعادلة: } (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 2(\sin \theta)z + 1) = 0 :$$

$$\text{ومنه إما } z^2 - 2z + 2 = 0 \text{ أو } z^2 - 2(\sin \theta)z + 1 = 0$$

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \text{ مميزها : } \Delta = -4 = 4i^2 = (2i)^2 \text{ ومنه الحلول : } z_1 = 1 + i \text{ و } z_2 = 1 - i$$

بحساب المميز : $z^2 - 2(\sin \theta)z + 1 = 0$

$$\Delta = 4 \sin^2 \theta - 4 = 4(\sin^2 \theta - 1) = 4(-\cos^2 \theta) = 4i^2 \cos^2 \theta = (2i \cos \theta)^2$$

$$z_4 = \sin \theta - i \cos \theta \text{ و } z_3 = \sin \theta + i \cos \theta \text{ ومنه } \sqrt{\Delta} = 2i \cos \theta$$

إذن المعادلة تقبل أربعة حلول وهي : $\{1+i; 1-i; \sin \theta + i \cos \theta; \sin \theta - i \cos \theta\}$.

(II) 1) كتابة الأعداد على الشكل الأسّي:

$$z_A = -\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\pi}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i(\pi+\frac{5\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i(\pi+\pi+\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i(2\pi+\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_B = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_D = \overline{z_C} = e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})} \text{ و } z_C = \sin \theta + i \cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$$

2) تبيان أن النقط C ، D و E تنتمي إلى دائرة وتعيين مركزها ونصف قطرها:

$$\text{لدينا } z_E = \frac{z_A}{z_B} \text{ ومنه } |z_E| = \frac{|z_A|}{|z_B|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \text{ ومنه } OE = 1$$

ولدينا أيضا $|z_D| = |z_C|$ ومنه $OD = OC = 1$ إذن نجد : $OE = OD = OC = 1$ وهذا يعني أن النقط

C ، D و E تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $r = 1$.

3) S هو التشابه المباشر الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $2\sqrt{2} - 2$:

تعيين قيمة θ حتى تكون النقطة B صورة النقطة C بالتشابه S :

$$z_B - z_A = (z_C - z_A)(2\sqrt{2} - 2)e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ أي } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = (2\sqrt{2} - 2)e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ معناه : } S(C) = B$$

$$\text{ومنه } \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = (2\sqrt{2} - 2)e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)} - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\text{اذن } e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{4}} = (2 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)} - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$-i - 1 = (2 - \sqrt{2})\left(e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)} - 1 - i\right) \text{ وينتج } e^{-i\frac{\pi}{2}} - 1 = (2 - \sqrt{2})\left(e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)} - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\text{أي } -i - 1 = (2 - \sqrt{2})e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)} - (2 - \sqrt{2})(1 + i)$$

$$(2 - \sqrt{2})e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)} = -i - 1 + (2 - \sqrt{2})(1 + i)$$

$$(2 - \sqrt{2})e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)} = (\sqrt{2} - 2)e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ اذن } (2 - \sqrt{2})e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)} = (1 - \sqrt{2})(1 + i)$$

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ أي } e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)} = e^{i\frac{5\pi}{4}} \text{ ومنه } (2 - \sqrt{2})e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)} = (2 - \sqrt{2})e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\theta = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ واخيرا}$$

$$(4) \quad \theta = \frac{-3\pi}{4} \text{ تعيين قيم العدد الطبيعي } n \text{ التي من أجلها يكون العدد } (z_D)^n \text{ تخيليا صرfa :}$$

$$\cos\left(-n\frac{5\pi}{4}\right) = 0 \text{ ويكون تخيليا صرfa إذا كان } (z_D)^n = \left[e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}\right]^n = e^{in\left(\frac{-3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} = e^{-i\left(\frac{5\pi}{4}\right)n}$$

$$\text{أي } -n\frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ وبالتالي : } -5n = 2 + 4k \text{ حيث } k \in \mathbb{N} \text{ أي } -5n \equiv 2[4] \text{ أي } n \equiv 2[4] \\ \text{ومنه } n = 4k + 2 \text{ حيث } k \in \mathbb{N}$$

التمرين: باك 2018 رياضي الموضوع الثاني

(1) m عدد حقيقي ، نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$z^2 + (m+1)z + (2m-1) = 0 \dots (E)$$

- عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين مركبين غير حقيقيين .

(2) نضع $m = 3$ ، حل المعادلة (E) .

(3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A ، B ، C و E

التي لاحتقاتها $z_A = -2 + i$ ، $z_B = -2 - i$ ، $z_C = \alpha$ و $z_E = \sqrt{3}$ حيث α عدد حقيقي و $\alpha > -2$.

- بيّن أن قيمة α التي يكون من أجلها المثلث ABC متقايس الأضلاع هي $(-2 + \sqrt{3})$.

- نضع في كل ما يأتي $z_C = -2 + \sqrt{3}$.

(4) أكتب العدد المركب : $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج أن :

(أ) - المستقيمان (AB) و (EC) متعامدان .

(ب) - النقط A ، B و E تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

(5) ليكن r الدوران الذي يحول النقطة B إلى C ويحول C إلى A ، عبارته المركبة هي :

$$z' = az + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right) \text{ حيث } a \text{ عدد مركب .}$$

(أ) - أحسب العدد المركب a ثم استنتج زاوية الدوران r .

(ب) - تحقق أن النقطة G مركز ثقل المثلث ABC هي مركز الدوران r .

حل التمرين باك 2018 رياضي م 2 :

$$z^2 + (m+1)z + (2m-1) = 0 \dots (E)$$

(1) تعيين قيم العدد الحقيقي m : تقبل المعادلة (E) حلين غير حقيقيين إذا كان $\Delta < 0$

$$\Delta = (m+1)^2 - 4(2m-1) = m^2 - 6m + 5$$

$$\text{جزرا المميز هما : } m_1 = \frac{6+4}{2} = 5 \text{ و } m_2 = \frac{6-4}{2} = 1$$

وبالتالي يكون $m^2 - 6m + 5 < 0$ إذا كان $m \in]1; 5[$

(2) نضع $m = 3$ ، تصبح المعادلة (E) : $z^2 + 4z + 5 = 0 \dots$

$$z_2 = \frac{-4-2i}{2} = \boxed{-2-i}, z_1 = \frac{-4+2i}{2} = \boxed{-2+i} \text{ ومنه } \Delta = -4 = (2i)^2$$

$$\alpha > -2 \text{ حيث } z_C = \alpha, z_B = -2-i, z_A = -2+i \quad (3)$$

المثلث ABC متقايس الأضلاع معناه: $AB = AC = BC$

$$AC = |z_C - z_A| = |\alpha + 2 - i| = \sqrt{(\alpha+2)^2 + 1}, AB = |z_B - z_A| = |-2-i+2-i| = |-2i| = 2$$

$$BC = |z_C - z_B| = |\alpha + 2 + i| = \sqrt{(\alpha+2)^2 + 1}$$

$$AB = AC \text{ أي } \sqrt{(\alpha+2)^2 + 1} = 2 \text{ ومنه } (\alpha+2)^2 + 1 = 4 \text{ ومنه } (\alpha+2)^2 - 3 = 0$$

$$\text{أي } (\alpha+2+\sqrt{3})(\alpha+2-\sqrt{3}) = 0 \text{ ومنه إما } \alpha = -2+\sqrt{3} \text{ أو } \alpha = -2-\sqrt{3}$$

$$\text{وبما أن } \alpha > -2 \text{ فإن القيمة } \alpha = -2-\sqrt{3} \text{ فهي مرفوض ومنه } \alpha = -2+\sqrt{3}$$

إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع إذا كان $\boxed{\alpha = -2+\sqrt{3}}$.

$$(4) \text{ نضع } z_C = -2+\sqrt{3} \text{ الشكل الاسي للعدد } \frac{z_C - z_E}{z_A - z_B}$$

$$\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B} = \frac{-2+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-2+i+2+i} = \frac{-2}{2i} = \frac{-1}{i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

(أ)- استنتاج ان المستقيمين (AB) و (EC) متعامدان :

$$\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ ومنه } \frac{z_C - z_E}{z_A - z_B} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \text{ أي المستقيمان } (BA) \text{ و } (EC) \text{ متعامدان.}$$

(ب) النقطة A, B, E تنتمي إلى نفس الدائرة (γ)

المثلث ABC متقايس الأضلاع معناه: $AB = AC = BC$

$$\text{ومن جهة أخرى وجدنا } \frac{z_C - z_E}{z_A - z_B} = i \text{ أي } \left| \frac{z_C - z_E}{z_A - z_B} \right| = |i| = 1 \text{ أي } AB = CE$$

اذن نستنتج ان: $EC = AC = BC$ أي ان النقطة A, B, E تنتمي إلى الدائرة التي مركزها النقطة C ونصف قطرها $EC = BC = 2$

$$(5) \text{ حساب } a: \text{ العبارة المركبة لهذا الدوران هي } z' = az + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2} \right) + i \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2} \right)$$

$$\text{لدينا } r(B) = C \text{ و } r(C) = A$$

$$\text{ومنه } z_C = az_B + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2} \right) + i \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2} \right)$$

$$\text{ومنه } -2+\sqrt{3} = a(-2-i) + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2} \right) + i \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2} \right)$$

$$a(4+2i) = -\sqrt{3} - 2 + i(2\sqrt{3} - 1) \text{ ومنه } -4 + 2\sqrt{3} = -4a - 2ai + \sqrt{3} - 6 + 2\sqrt{3}i - i$$

$$a = \frac{-\sqrt{3} - 2 + i(2\sqrt{3} - 1)}{4 + 2i} = \frac{[-\sqrt{3} - 2 + i(2\sqrt{3} - 1)](4 - 2i)}{(4 + 2i)(4 - 2i)}$$

$$= \frac{-4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}i - 8 + 4i + 8\sqrt{3}i - 4i + 4\sqrt{3} - 2}{16 + 4} =$$

$$= \frac{-10 + 10\sqrt{3}i}{20} = \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right]$$

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ زاوية هذا الدوران هي } \theta \text{ عمدة للعدد } a \text{ ومنه}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ إذن}$$

(ب) اثبات ان النقطة G مركز ثقل المثلث هي مركز الدوران r :
مركز الدوران هي النقطة الصامدة أي :

$$z_G = \frac{b}{1-a} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)}{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{\sqrt{3}-6 + i(2\sqrt{3}-1)}{3 - \sqrt{3}i} =$$

$$= \frac{[\sqrt{3}-6 + i(2\sqrt{3}-1)](3 + \sqrt{3}i)}{(3 - \sqrt{3}i)(3 + \sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{3\sqrt{3} - 18 + 6\sqrt{3}i - 3i + 3i - 6\sqrt{3}i - 6 + \sqrt{3}}{12} = \frac{4\sqrt{3} - 24}{12} = -2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

و لاحقة مركز ثقل المثلث ABC المتقايس الأضلاع : هي $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{-2+i-2-i-2+\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}-6}{3} = -2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$. إذن.
نستنتج أن مركز هذا الدوران هو فعلا مركز ثقل المثلث ABC .

التمرين باك 2019 علوم تجريبية م 1

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(z-i)(z^2-4z+5)=0$

(II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B, C التي لاحقاتها i ، $2-i$ و $2+i$ على الترتيب .

(1) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$ على الشكل الاسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

(2) من اجل كل عدد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع $f(z) = \frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$

(أ) عين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $|f(z)| = \frac{1}{2}$

(ب) بين ان العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب .

(3) نعتبر الدوران r الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

(أ) عين لاحقة D صورة B بالدوران r و بين ان النقط A, D, C في استقامية.

(ب) استنتج ان D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تحديد طبيعته و عناصره

حل التمرين :باك 2019 ع ت م 1

$$(z-i)(z^2-4z+5)=0 \text{ (I) ومنه إما } z-i=0 \text{ أي } \boxed{z=i} \text{ أو } z^2-4z+5=0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4 < 0 \text{ ومنه للمعادلة } z^2 - 4z + 5 = 0 \text{ حلان مترافقان هما}$$

$$z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4+i\sqrt{4}}{2} = \boxed{2+i} \text{ و } z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4-i\sqrt{4}}{2} = \boxed{2-i}$$

$$(z-i)(z^2-4z+5)=0 \text{ هي } S = \{i; 2-i; 2+i\}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{2+i-i}{2+i-2+i} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = -i = \boxed{e^{-i\frac{\pi}{2}}} \text{ (II)}$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \text{ و } \left|\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right| = \frac{AC}{BC} = |-i| = 1$$

$$\text{اذن } AC = BC \text{ و } (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} \text{ اذن المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين.}$$

$$f(z) = \frac{iz - 1 - 2i}{2z - 4 - 2i} \text{ (2)}$$

$$\left|\frac{i}{2} \times \frac{(z-(2-i))}{(z-(2+i))}\right| = \frac{1}{2} \text{ ومنه } \left|\frac{i(z-\frac{1}{i}-2)}{2(z-2-i)}\right| = \frac{1}{2} \text{ ومنه } \left|\frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}\right| = \frac{1}{2} \text{ ومنه } |f(z)| = \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{i}{2} \times \frac{(z-(2-i))}{(z-(2+i))}\right| = \frac{1}{2} \text{ ومنه نجد } \left|\frac{z-z_B}{z-z_C}\right| = \frac{1}{2} \text{ أي } \frac{BM}{CM} = 1 \text{ ومنه } BM = CM \text{ ومنه المجموعة (E) للنقط M هي نقط محور القطعة المستقيمة [BC].}$$

$$f(i) = \frac{-1-1-2i}{2i-4-2i} = \frac{-2-2i}{-4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ (ب) تبيان ان العدد } [f(i)]^{1440} \text{ حقيقي موجب :}$$

$$[f(i)]^{1440} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{1440} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440} e^{i\frac{1440\pi}{4}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440} e^{i360\pi} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440} (\cos 360\pi + i \sin 360\pi) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440} (1 + 0.i) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440}$$

$$\text{اذن } (f(i))^{1440} \text{ عدد حقيقي موجب.}$$

$$(3) \text{ D هي صورة B بالدوران } r \text{ الذي مركزه C وزاويته } \frac{\pi}{2} \text{ معناه } z_D - z_C = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_C) \text{ ومنه}$$

$$z_D = i(2-i-2-i) + 2+i = \boxed{4+i}$$

$$\text{وجدنا سابقا } (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ (1).....}$$

ولدينا $(\overline{BC}; \overline{DC}) = \frac{\pi}{2} + 2k'\pi$ أي $\frac{z_C - z_D}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ أي $z_D - z_C = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_C)$

$$(2) \dots\dots\dots (\overline{DC}; \overline{BC}) = -\frac{\pi}{2} + 2k''\pi$$

من (1) و (2) وحسب علاقة شال نجد $(\overline{DC}; \overline{AC}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 2k''\pi = \boxed{-\pi + 2k_1\pi}$

والنقط D, A, C في استقامية.

طريقة ثانية : $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = -1$ أي $z_D - z_C = -1(z_A - z_C)$ ومنه $\overline{CD} = -\overline{CA}$ أي ان النقط في استقامية

(ب) وجدنا $(\overline{DC}; \overline{AC}) = -\pi + 2k_1\pi$ ولدينا حسب ما سبق $AC = BC$ وأيضا $CD = BC$

اذن $\boxed{CD = AC}$ وعليه نستنتج $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_D} = e^{-\pi i}$ ومنه $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = e^{-\pi i} = -1$ ومنه $\boxed{z_A - z_C = (-1)(z_D - z_C)}$

ينتج ان A هي صورة D بالتحاكي الذي مركزه C ونسبته $k = -1$

التمرين باك 2019 علوم تجريبية م 2

المستوى المركب منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \bar{u}, \bar{v})$

نعتبر النقط A, B, C التي لاحقتها على الترتيب : $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ و $z_B = \bar{z}_A$ و $z_C = -2z_A$

(1) أ) اكتب العدد المركب z_A على الشكل الأسّي

(ب) أحسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$

(2) أ) T الانسحاب الذي يحول A الى C ، عين z_D لاحقة النقطة D صورة B بالانسحاب T

(ب) استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$

(3) اكتب العدد المركب $z_C - z_A$ على الشكل الاسي

(4) جد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا

(5) لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z حيث M تختلف عن A وتختلف عن C

عين (E) مجموعة النقط M التي من اجلها يكون $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما

حل التمرين باك 2019 ع ت م 2:

$$z_C = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{6} \text{ و } z_B = \sqrt{2} - i\sqrt{6} \text{ و } z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$$

(1) أ) كتابة $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ على الشكل الأسّي:

$$|z_A| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

$$\boxed{z_A = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}} \text{ اذن } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}}$$

(ب) حساب : $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$ لدينا $z_B = \overline{z_A} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه نعوض فنجد:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} &= \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019} + \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019} = e^{\frac{2019\pi}{3}} + e^{-\frac{2019\pi}{3}} \\ &= e^{i673\pi} + e^{-i673\pi} = \cos 673\pi + i \sin 673\pi + \cos(-673\pi) + \sin(-673\pi) = \\ &= \cos \pi + i \sin \pi + \cos(-\pi) + \sin(-\pi) = -1 + 0 - 1 + 0 = \boxed{-2} \end{aligned}$$

(2) أ) T الانسحاب الذي يحول A الى C اذن شعاعه $\overrightarrow{AC}$ و D صورة B معناه $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ ومنه $z_{\overrightarrow{BD}} = z_{\overrightarrow{AC}}$ أي $z_D - z_B = z_C - z_A$ ومنه :

$$\begin{aligned} z_D - z_B = z_C - z_A \quad \text{اذن :} \quad z_D = z_C - z_A + z_B = -2(\sqrt{2} + i\sqrt{6}) - \sqrt{2} - i\sqrt{6} + \sqrt{2} - i\sqrt{6} \\ z_D = \boxed{-2\sqrt{2} - 4\sqrt{6}i} \end{aligned}$$

(ب) استنتاج طبيعة الرباعي : حسب ما سبق وجدنا $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ وعليه فان الرباعي $ABDC$ متوازي اضلاع. (3) كتابة العدد $z_C - z_A$ على الشكل الاسي

$$\begin{aligned} z_C - z_A &= -2z_A - z_A = -3z_A = -6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = 6\sqrt{2}(-1)e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= 6\sqrt{2}(e^{i\pi})e^{i\frac{\pi}{3}} = 6\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}+\pi)} = \boxed{6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}} \end{aligned}$$

(4) تعيين قيم العدد الطبيعي n :

$$\left(\frac{-6\sqrt{2}}{6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}}\right)^n = \left(\frac{-6\sqrt{2}}{6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}}\right)^n = \left(-e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^n = (-1)^n e^{i\frac{4\pi}{3}n}$$

حقيقيا معناه $\frac{4\pi n}{3} = k\pi / k \in \mathbb{Z}$ ومنه $4n = 3k$ ومنه $n = \frac{3}{4}k$ وبما ان n عدد طبيعي اذن يجب ان يكون $n = 3k'$ حيث $k' \in \mathbb{Z}$ عدد طبيعي. $k = 4k'$ فنجد $n = 3k'$ حيث $k' \in \mathbb{Z}$ عدد طبيعي.

(5) تعيين مجموعة النقط : $\arg \frac{z_A - z}{z_C - z} = 2k\pi$ حقيقي موجب تماما معناه $\arg \frac{z_A - z}{z_C - z} = 2k\pi$ حيث $(k \in \mathbb{Z})$

أي $(\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MA}) = 2k\pi$ وهذا يعني ان النقط A و C و M تقع في استقامة بحيث M لا تقع بينهما ومنه فان المجموعة (E) هي نقط المستقيم (CA) باستثناء القطعة المستقيمة $[CA]$.

التمرين باك 2019 تقني رياضي م 1

المستوي منسوب الى المعلم م . م $(O, \vec{u}, \vec{v})$ و A و B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب :

$$z_C = \frac{3}{2} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ و } z_A = 1 + i \text{ و } z_B = 2 + i$$

(1) أ) تحقق ان النقطة C من الدائرة (Γ)

(ب) عين قيسا بالراديان للزاوية $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ ثم استنتج أن C هي صورة B بالدوران r الذي مركزه A يطلب تعيين زاويته

(2) S التشابه المباشر الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z الى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

(أ) حدد العناصر المميزة للتشابه S

(ب) عين z_D لاحقة D صورة B بالتشابه S

(3) ماهي نسبة التحاكي h الذي مركزه A حيث $S = h \circ r$ ؟ استنتج ان النقط A و C و D في استقامية

(4) (E) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحتقتها z حيث : $z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{3}}$ مع $k \in \mathbb{R}_+^*$

. تحقق ان النقطة C من المجموعة (E) . ثم حدد طبيعة (E)

حل التمرين باك 2019 ت ر م 1

$z_C = \frac{3}{2} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و $z_A = 1 + i$ و $z_B = 2 + i$ و (Γ) الدائرة ذات المركز A و نصف القطر 1

(1) (أ). التحقق $C \in (\Gamma)$ يعني أن $AC = 1$ أي أن $|z_C - z_A| = 1$ أي $\left|\frac{3}{2} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 - i\right| = 1$ يعني أن

$$\left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1 \text{ محققة .}$$

(ب) - تعيين قيس الزاوية $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ نحسب عمدة العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\frac{3}{2} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 - i}{2 + i - 1 - i}$ أي أن

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ إذن } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \text{ و } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

يعني $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ و منه نستنتج أن C صورة B بالدوران الذي

مركزه A و زاويته $\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

(2) لدينا $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$

(أ) S هو تشابه مباشر نسبته $\left|1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$ و زاويته $\arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ (لان

$$z_0 = \frac{\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{1 - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} \text{ و } \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} ; \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$z_0 = 1 + i$ إذن $z_0 = 1 + i$ و منه A مركز التشابه المباشر S

(ب) تعيين لاحقة D : $z_D = (1 + i\sqrt{3})z_B + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$ أي $z_D = (1 + i\sqrt{3})(2 + i) + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$ بالحساب

$$z_D = 2 + i(1 + \sqrt{3}) \text{ و } z_D = 2 + i + 2i\sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

(3) تعيين نسبة التحاكي h : $S = h \circ r$ نسبة التحاكي هي نسبة التشابه المباشر و هي 2 و الذي مركزه A

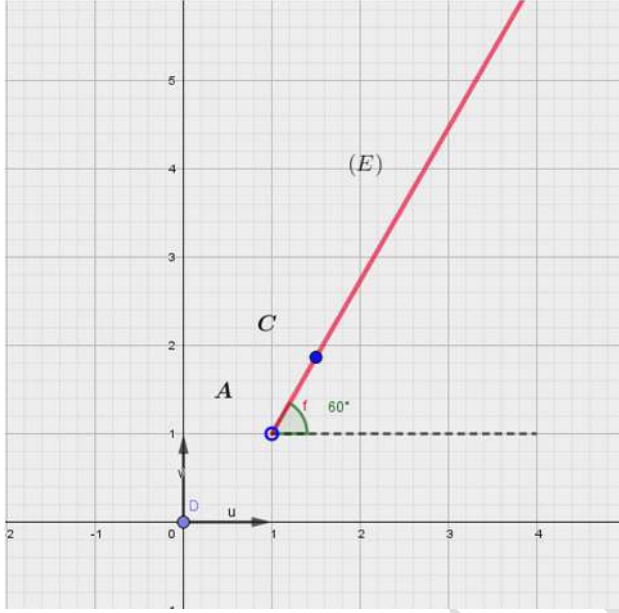
$$r(B) = C \text{ و } S(B) = D \text{ أي أن } S(B) = h \circ r(B) = h(C) \text{ منه } h(C) = D \text{ و مركز التحاكي}$$

إذن النقط A ; C ; D في استقامية

(4) (E) مجموعة النقط $M(z)$ حيث $z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{3}}$ و k عدد حقيقي موجب تماما

التحقق أن النقطة C من المجموعة (E) يعني أن $z_C = z_A + ke^{i\frac{\pi}{3}}$ لها حل أي أن $\frac{3}{2} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i + ke^{i\frac{\pi}{3}}$ يعني أن $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = ke^{i\frac{\pi}{3}}$ يعني أن $k=1$ و منه محققة .

(E) نصف مستقيم الذي معامل توجيهه $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و يمر من النقطة C على يمين النقطة A و هذه الأخيرة



لا تنتمي لهذه المجموعة .
الرسم للتوضيح .

التمرين باك 2019 تقني ر م 2

(I) (أ) تحقق أن $(2 - 2\sqrt{3})^2 = 16 - 8\sqrt{3}$

(ب) عين على الشكل الجبري الجذرين التربيعيين L_1 و L_2 للعدد المركب Z حيث: $Z = -16\sqrt{3} - 16i$

(II) في المستوي المركب المنسوب الى المعلم م . م $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C التي لاحتقاتها

. $z_C = -\frac{1}{4}z_A$ و $z_B = \frac{1}{2}iz_A$ و $z_A = 4e^{i\frac{\pi}{3}} + 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$

(1) أكتب z_A على الشكل الجبري ، ثم بين أن $z_A = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

(2) استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين الحقيقيين $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

(3) S التشابه المباشر الذي يحول A الى B و يحول B الى C

لتكن M' النقطة ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات اللاحقة z بالتشابه S

(أ) بين ان : $z' = \frac{1}{2}iz$

(ب) حدد العناصر المميزة للتشابه S

(4) G النقطة ذات اللاحقة z_G مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; -2), (C; 4)\}$

(أ) بين ان : $z_G = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

(ب) (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث : $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 2\sqrt{2}$

حدد طبيعة (E) و عناصرها المميزة ، ثم احسب محيط (E') صورة (E) بالتشابه S

حل التمرين باك 2019 ت ر م 2

$$(I) \text{ (أ) التحقق : } (2 - 2\sqrt{3})^2 = 4 - 8\sqrt{3} + 12 = 16 - 8\sqrt{3}$$

(ب) تعيين الجذرين التربيعيين للعدد $z = -16\sqrt{3} - 16i$ نضع $L = x + iy$ جذرا للعدد المركب z أي $L^2 = z$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 32 \\ 2xy = -16 \\ x^2 - y^2 = -16\sqrt{3} \end{cases} \text{ وهذا يعني } |z| = |L|^2 \text{ أي أن } 2x^2 = 32 - 16\sqrt{3} \text{ أي أن } x^2 = 16 - 8\sqrt{3}$$

$$\text{ومن السؤال (أ) } (2 - 2\sqrt{3})^2 = 16 - 8\sqrt{3} \text{ إذن } x = 2 - 2\sqrt{3} \text{ أو } x = -(2 - 2\sqrt{3})$$

$$\text{لما } x = 2 - 2\sqrt{3} \text{ فإن } y = \frac{-8}{2 - 2\sqrt{3}} = 2 + 2\sqrt{3} \text{ و لما } x = -2 + 2\sqrt{3} \text{ فإن}$$

$$y = -2\sqrt{3} - 2$$

$$\text{و منه } L_1 = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3}) \text{ و } L_2 = 2\sqrt{3} - 2 - i(2 + 2\sqrt{3})$$

$$(II) \text{ و } z_A = 4e^{i\frac{\pi}{3}} + 4e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ و } z_B = \frac{1}{2}iz_A \text{ و } z_C = -\frac{1}{4}z_A$$

(1) كتابة z_A على الشكل الجبري: $z_A = 4e^{i\frac{\pi}{3}} + 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ وتعني

$$z_A = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) + 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\text{اذن } z_A = 4\cos\frac{\pi}{3} + 4i\sin\frac{\pi}{3} + 4\cos\frac{5\pi}{6} + 4i\sin\frac{5\pi}{6} \text{ أي } z_A = 2 + 2i\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2i$$

$$\text{أي } z_A = 2 - 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3} + 2)i$$

الشكل الاسي للعدد z_A :

$$z_A = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \left(1 + e^{i\frac{3\pi}{6}}\right) \text{ أي } z_A = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \left(1 + e^{-i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) \text{ يعني } z_A = 4e^{i\frac{\pi}{3}} + 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_A = 4e^{i\frac{\pi}{3}}(1 + i) \text{ يعني أن } z_A = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \left(1 + e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\text{و } 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ منه } z_A = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ إذن } z_A = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

(2) لدينا $z_A = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ يعني أن $z_A = 4\sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + 4\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)i$ بالمطابقة بالشكل الجبري نجد

$$4\sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 2 - 2\sqrt{3} \text{ و } 4\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 2 + 2\sqrt{3}$$

$$\text{و منه } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ و } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{أي } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \text{ و } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$(3) \text{ لدينا } S(A) = B \text{ و } S(B) = C \text{ و } z_B = \frac{1}{2}iz_A \text{ و } z_C = -\frac{1}{4}z_A$$

(أ) إثبات صحة عبارة التشابه: $S(A) = B$ تعني $z_B = \frac{1}{2}iz_A$ وهي محققة حسب المعطى $z_B = \frac{1}{2}iz_A$

و $S(B)=C$ تعني $z_C = \frac{1}{2}iz_B$ ومن $z_B = \frac{1}{2}iz_A$ نجد $z_C = \frac{1}{2}i \times (\frac{1}{2}iz_A) = -\frac{1}{4}z_A$ محققة
نستنتج أن عبارة التشابه S هي $z' = \frac{1}{2}iz$.

طريقة ثانية: نفرض أن عبارة التشابه المباشر S هي $z' = az + b$ ومن $S(A)=B$ و $S(B)=C$

$$\text{نجد أن : } a = \frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} \text{ أي } a = \frac{-\frac{1}{4}z_A - \frac{1}{2}iz_A}{\frac{1}{2}iz_A - z_A} \text{ بالتبسيط نجد } a = \frac{1+2i}{-2i+4} = \frac{i(-i+2)}{2(-i+2)} = \frac{1}{2}i$$

$$\text{و } z_B = \frac{1}{2}iz_A + b \text{ منه } b = 0 \text{ إذن العبارة المركبة للتشابه هي } z' = \frac{1}{2}iz.$$

$$(ب) \text{ } S \text{ تشابه مباشر نسبته } \left| \frac{1}{2}i \right| = \frac{1}{2} \text{ و زاويته } \arg\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{2} \text{ و مركزه } O.$$

$$(3) \text{ } G \text{ مرجح الجملة } \{(A;2);(B;-2);(C;4)\}.$$

$$(أ) \text{ لدينا } z_G = \frac{2z_A - 2z_B + 4z_C}{4} \text{ ومن النتائج السابقة نجد } 2z_B = iz_A \text{ و } 4z_C = -z_A$$

$$\text{أي } z_G = \frac{2z_A - iz_A - z_A}{4} = \frac{1-i}{4}z_A \text{ و } z_A = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} \text{ منه نجد } z_G = \left(\frac{1-i}{4}\right)4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$\text{ونعلم أن } 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ و منه نجد } z_G = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}.4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} \text{ و منه } z_G = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$$(ب) \text{ تعيين المجموعة } (E) : \text{ و } \|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 2\sqrt{2} \text{ يكافئ}$$

$$\|2\vec{MA} - 2\vec{MB} + 4\vec{MC}\| = 4\sqrt{2}$$

$$\text{أي أن } 4MG = 4\sqrt{2} \text{ يكافئ } MG = \sqrt{2} \text{ منه } (E) \text{ دائرة مركزها } G \text{ و نصف قطرها } \sqrt{2}.$$

$$\text{لدينا } S(E) = (E') \text{ و منه } (E') \text{ دائرة نصف قطرها } r' = k \times r = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{محيط } (E') \text{ هو : } p = 2 \times r' \times \pi = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \pi = \pi\sqrt{2}$$

التمرين باك 2019 رياضي م 1

في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \bar{u}, \bar{v})$ نعتبر النقط A و B و C و D حيث :

$$z_A = 1+i\sqrt{2} \text{ و } z_B = i \text{ و } z_C = \bar{z}_A \text{ و } z_D = \bar{z}_B \text{ و } z_E = 1$$

$$(1) \text{ حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول } z : (z^2 + 1)(z^2 - 2z + 3) = 0$$

(2) (أ) احسب كلا من $|z_A - 1|$ ، $|z_B - 1|$ و $|z_C - z_E|$ ثم تحقق ان النقط الأربعة A و B و C و D تنتمي الى نفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها و طول نصف قطرها

(ب) بين ان : $(z_B - z_E) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A - z_E)$ ثم استنتج ان B هي صورة A بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره

المميزة

- ما طبيعة المثلث ABE ؟

(3) عين لاحقتي الشعاعين $\vec{BD}$ و $\vec{AE}$ محددًا طبيعة الرباعي $ABDE$

(4) w_1 و w_2 شعاعان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2

(أ) برهن أن : $(\vec{w}_2 \text{ و } \vec{w}_1 \text{ متعامدان})$ يكافئ $(z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 0)$

(ب) عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $(z - z_A)(\bar{z} - z_D) + (z - z_B)(\bar{z} - z_C) = 0$

حل التمرين باك 2019 ر. م 1 :

(1) حل المعادلة $(z^2 + 1)(z^2 - 2z + 3) = 0$:

المعادلة تكافئ : $(z^2 + 1 = 0)$ او $(z^2 - 2z + 3 = 0)$ اي $z^2 + 1 = 0$ ومنه $z_0 = -i$ او $z_1 = i$ ،

و مميز $z^2 - 2z + 3 = 0$ هو $\Delta = -8 = (i2\sqrt{2})$ ومنه $z_2 = \frac{2 - i2\sqrt{2}}{2} = 1 - i\sqrt{2}$ و $z_3 = 1 + i\sqrt{2}$

(2) أ) الحساب و التحقق : $z_A = 1 + i\sqrt{2}$ و $z_B = i$ و $z_C = 1 - i\sqrt{2}$ و $z_D = -i$ و $z_E = 1$
 $|z_C - z_E| = |1 - i\sqrt{2} - 1| = |i\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ و $|z_B - 1| = |i - 1| = \sqrt{2}$ و $|z_A - 1| = |i\sqrt{2}| = \sqrt{2}$
و لدينا : $|z_D - 1| = |z_B - 1| = \sqrt{2}$ وهذا يعني : $EC = EB = EA = ED = \sqrt{2}$
إذن : النقط D, C, B, A تنتمي إلى الدائرة التي مركزها E و نصف قطرها $\sqrt{2}$.

ب) بيان صحة المساواة $z_B - z_E = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A - z_E)$
لدينا من جهة : $z_B - z_E = i - 1$ و من جهة أخرى :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A - z_E) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1+i\sqrt{2}-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).i\sqrt{2} = i - 1$$

ومنه صحة المساواة : $z_B - z_E = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A - z_E)$

استنتاج تحويل نقطي : من المساواة $z_B - z_E = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A - z_E)$ نجد ان $\left| \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1$

و $\arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\pi}{4}$ ومنه فان B هي صورة A بالدوران r الذي مركزه E و زاويته $\frac{\pi}{4}$.
(*) طبيعة المثلث ABE :

لدينا : B هي صورة A بالدوران r الذي مركزه E هذا يعني : $EA = EB$ و $(\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EB}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ومنه نستنتج أن

المثلث ABE متقايس الساقين في E
(3) تحديد طبيعة الرباعي $ABDE$:

لدينا : $z_D - z_B = -2i$ و $z_{\overline{BD}} = z_D - z_B = -2i$ و $z_{\overline{AE}} = z_E - z_A = -i\sqrt{2}$ أي أن : $\frac{z_D - z_B}{z_E - z_A} = \frac{-2i}{-i\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

أي أن $z_D - z_B = \sqrt{2}(z_E - z_A)$ وتعني $\overline{BD} = \sqrt{2}\overline{AE}$ ومنه نستنتج أن : $\overline{BD} // \overline{AE}$
و من جهة أخرى لدينا : $BD = \sqrt{2}AE$ أي $(BD \neq AE)$ ، إذن : الرباعي $ABDE$ شبه منحرف .

(4) أ) البرهان : $\overline{w_1}$ لاحقته z_1 و $\overline{w_2}$ لاحقته z_2

(1) $\overline{w_1}$ يعامد $\overline{w_2}$ معناه أن $\frac{z_1}{z_2}$ تخيلي صرف ، ويكافئ : $\frac{z_1}{z_2} = -\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ أي $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ وتكافئ $\overline{z_1} \cdot z_2 = -z_1 \cdot \overline{z_2}$

و منه : $\overline{z_1} \cdot z_2 + z_1 \cdot \overline{z_2} = 0$

(2) نضع $\overline{w_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ يعامد $\overline{w_2} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ معناه أن : $\overline{w_1} \cdot \overline{w_2} = 0$ أي : $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ و منه : $\text{Re}(z_1 \overline{z_2}) = 0$

ونضع : $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ و $\overline{z_2} = x_2 - iy_2$ و $\overline{z_1} = x_1 - iy_1$

و $\overline{z_1 \cdot z_2} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_1 y_2 - x_2 y_1)$ و $\overline{z_1 \cdot z_2} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)$ مع $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$
 و نلاحظ بالجمع ان $2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) = 0$ يعني $\overline{z_1 \cdot z_2} + z_1 \cdot \overline{z_2} = 0$ أي أن $\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) = 0$
 وبالتالي نستنتج أن $\overline{w_1} \perp w_2$ يكافئ $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 0$
 (ب) تعيين طبيعة مجموعة النقط : حيث $z_C = \overline{z_A}$ و $z_D = \overline{z_B}$
 لدينا : $0 = (z - z_A)(\overline{z} - \overline{z_B}) + (z - z_B)(\overline{z} - \overline{z_A})$ وتعني $(z - z_A)(\overline{z} - \overline{z_D}) + (z - z_B)(\overline{z} - \overline{z_C}) = 0$
 $0 = (z - z_A)(\overline{z} - \overline{z_B}) + (z - z_B)(\overline{z} - \overline{z_A})$ ومن السؤال السابق $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 0$ يعني $\overline{w_1} \perp w_2$
 إذن نستنتج أن $\overline{AM} \perp \overline{BM}$ و منه مجموعة النقط هي الدائرة التي قطرها $[AB]$.

التمرين باك 2019 رياضي م 2

- (1) نضع من اجل كل عدد مركب z ، $P(z) = z^4 - 6z^3 + 29z^2 - 24z + 100$ ،
 (أ) بين انه من اجل كل عدد مركب z ، $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$ ثم استنتج انه اذا كان z حلا للمعادلة $P(z) = 0$ فإن $\overline{z}$ حل لها
 (ب) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$ علما انها تقبل حلا تخيليا صرفيا
 (2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \overline{u}, \overline{v})$ ، النقط A, B, M و M'
 التي لاحقاتها على الترتيب : $2i, 3-4i, z$ و z' حيث : $z' = \frac{-iz + 4 + 3i}{z - 2i}$ مع $z \neq 2i$
 و لتكن I مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; 1)\}$ و J مرجح الجملة $\{(A; -2), (B; 1)\}$
 (أ) عين اللاحقتين z_I و z_J للنقطتين I و J على الترتيب
 (ب) لتكن (E) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من اجلها $|z'| = 2$
 بين ان (النقطة M من (E)) يكافئ $(\overline{IM} \cdot \overline{JM} = 0)$ ، ثم عين (E) و أنشئها
 (ج) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من اجلها $\arg(z') = 2k\pi$ حيث k عدد صحيح
 تحقق ان النقطة D ذات اللاحقة $\frac{9}{2} - \frac{5}{2}i$ تنتمي الى (Γ) ، ثم عين و أنشئ (Γ)
 (3) عين الشكل الجبري لللاحقة النقطة G تقاطع المجموعتين (E) و (Γ)

حل التمرين باك 2019 م 2

- (1) (أ) تبين أن $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$
 لدينا : $P(\overline{z}) = \overline{z}^4 - 6\overline{z}^3 + 29\overline{z}^2 - 24\overline{z} + 100$ أي $\overline{P(z)} = \overline{z}^4 - 6\overline{z}^3 + 29\overline{z}^2 - 24\overline{z} + 100$
 و منه : $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$ ، إذن : $\overline{P(z)} = \overline{z}^4 - 6\overline{z}^3 + 29\overline{z}^2 - 24\overline{z} + 100$
 ومنه إذا كان z حلا للمعادلة $P(z) = 0$ فإن $\overline{z}$ حلا للمعادلة $P(\overline{z}) = 0$ و منه سيكون $\overline{z}$ حلا للمعادلة $P(z) = 0$
 (ب) حل المعادلة $P(z) = 0$: نضع $z = i\alpha$ حيث $\alpha \neq 0$ هذا الأخير حل للمعادلة يعني أن $\overline{z} = -i\alpha$ حل للمعادلة أيضا .

لدينا :
$$\begin{cases} P(z) = z^4 - 6z^3 + 29z^2 - 24z + 100 \dots (1) \\ P(\bar{z}) = \bar{z}^4 - 6\bar{z}^3 + 29\bar{z}^2 - 24\bar{z} + 100 \dots (2) \end{cases}$$
 بطرح (1) من (2) نجد :

$$\alpha^4 + i6\alpha^3 - 29\alpha^2 - i24\alpha + 100 = 0 \text{ بالتعويض نجد } (z^4 - \bar{z}^4) - 6(z^3 - \bar{z}^3) + 29(z^2 - \bar{z}^2) + 24(z - \bar{z}) = 0$$

ومنه

$$\alpha^4 - 29\alpha^2 + 100 = 0 \dots (*) \text{ و } \alpha i (\alpha^2 - 4) = 0 \text{ أي } \alpha^4 - 29\alpha^2 + 100 + i(6\alpha^3 - 24\alpha) = 0$$

ومنه $\alpha = 0$ أو $\alpha = 2$ أو $\alpha = -2$ ، لكن $\alpha = 0$ لا تحقق (*) إذن الحلان هما : $z_1 = 2i$ و $z_2 = -2i$.

و بتحليل $P(z)$ أي : $P(z) = (z - 2i)(z + 2i)(az^2 + bz + c) = (z^2 + 4)(az^2 + bz + c)$

بعد النشر والتبسيط والمطابقة نجد :
$$\begin{cases} a = -6 \\ b + 4 = 29 \\ 4a = -24 \\ 4b = 100 \end{cases}$$
 ومنه $a = -6$ و $b = 25$ إذن

$$P(z) = (z^2 + 4)(z^2 - 6z + 25)$$

وبحل المعادلة $P(z) = 0$ نجد : $z^2 + 4 = 0$ أو $z^2 - 6z + 25 = 0$

مميزها : $\Delta = -64 = (8i)^2$ ومنه حلاها هما : $z_3 = 3 - 4i$ و $z_4 = 3 + 4i$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي : $S = \{-2i; 2i; 3 - 4i; 3 + 4i\}$

(2) أ) تعيين اللاحقتين z_I و z_J :

(*) $z_I = \frac{2z_A + z_B}{2+1}$ أي : $z_I = \frac{4i + 3 - 4i}{3}$ ، ومنه : $z_I = 1$.

(*) $z_J = \frac{-2z_A + z_B}{-2+1}$ أي : $z_J = \frac{-4i + 3 - 4i}{-1}$ ، ومنه : $z_J = -3 + 8i$.

(ب) التبيان ثم تعيين وإنشاء المجموعة (E) : $z' = \frac{-iz + 4 + 3i}{z - 2i}$ و $|z'| = 2$

لدينا : $M \in (E)$ يعني أن : $\left| \frac{-iz + 4 + 3i}{z - 2i} \right| = 2$ أي : $|-iz + 4 + 3i| = 2|z - 2i|$ ، تصبح :

أي : $|z + 4i - 3| = 2|z - 2i|$ ، ومنه : $MB = 2MA$.

والأخيرة تصبح : $MB^2 = 4MA^2$ أي : $MB^2 - 4MA^2 = 0$ أي أن : $\overline{MB}^2 - 4\overline{MA}^2 = 0$ ومنه نجد

ونعلم ان : I مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; 1)\}$ و J مرجح الجملة $\{(A; -2), (B; 1)\}$ أي ان : $\overline{IB} + 2\overline{IA} = \overline{0}$ و $\overline{JB} - 2\overline{JA} = \overline{0}$ ومنه العبارة

$(\overline{MB} - 2\overline{MA}) \cdot (\overline{MB} + 2\overline{MA}) = 0$ تكافئ : $(\overline{MB} - 2\overline{MA}) \cdot (\overline{MB} + 2\overline{MA}) = 0$ أي : $(\overline{MJ} + \overline{JB} - 2\overline{MJ} - 2\overline{JA}) \cdot (\overline{MI} + \overline{IB} + 2\overline{MI} + 2\overline{IA}) = 0$

وبالتالي ينتج : $\overline{MJ} \cdot \overline{MI} = 0$ و عليه مجموعة النقط (E) هي الدائرة التي قطرها $[IJ]$.

(ج) التحقق ثم تعيين وإنشاء المجموعة (Γ) : مجموعة النقط $M(z)$: $\arg(z') = 2k\pi$

(*) التحقق أن $D \in (\Gamma)$: نعوض $z_D = \frac{9}{2} - \frac{5}{2}i$ في $\frac{-iz + 4 + 3i}{z - 2i}$ نجد :

$$\arg\left(\frac{1}{3}\right) = 2k\pi \text{ ومنه : } \frac{-iz_D + 4 + 3i}{z_D - 2i} = \frac{-i\left(\frac{9}{2} - \frac{5}{2}i\right) + 4 + 3i}{\left(\frac{9}{2} - \frac{5}{2}i\right) - 2i} = \frac{-3i + 3}{9 - 9i} = \frac{1}{3}$$

. (Γ)

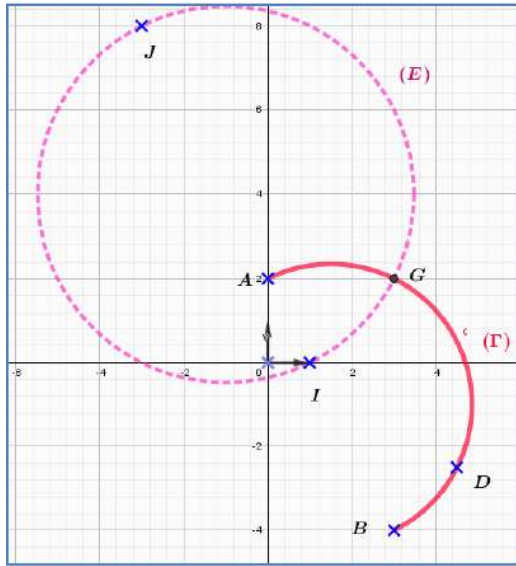
(* تعيين (Γ) : $\arg(z') = 2k\pi$ يعني $\arg\left(\frac{-iz + 4 + 3i}{z - 2i}\right) = 2k\pi$ أي

و منه $\arg\left(\frac{-i(z - 3 + 4i)}{z - 2i}\right) = 2k\pi$ أي $\arg\left(\frac{-i(z - z_B)}{z - z_A}\right) = 2k\pi$

$\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أي $\arg(-i) + \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = 2k\pi$

و منه: $\arg(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ إذن (Γ) هي القوس من الدائرة التي قطرها $[AB]$ و الذي يشمل النقطة D

بإستثناء النقطتين A و B
 (* الإنشاء :



(3) تعيين الشكل الجبري للاحقة النقطة G :

لدينا : $\arg(z') = 2k\pi$ و $|z'| = 2$ وهذا يعني $z' = 2$ أي $\frac{-iz + 4 + 3i}{z - 2i} = 2$ أي $-iz + 4 + 3i = 2z - 4i$

أي أن : $-iz - 2z = -4i - 3i - 4$ ، أي $z(-i - 2) = -4 - 7i$ و منه : $z = \frac{4 + 7i}{2 + i}$ و بكتابة العدد على الشكل

الجبري نجد : $z = 3 + 2i$ و عليه تكون : $z_G = 3 + 2i$

إعداد الأستاذ : قليل مصطفى