

مجلة Top Maths

2ASTM

الجداء السلمي في المستوى
scalar product

اعداد الاستاذ بوشناق يوسف

- المجلة تتضمن
- ✓ ملخص
 - ✓ درس مفصل
 - ✓ الجداء السلمي
 - ✓ تطبيقات الجداء السلمي
 - ✓ تمارين محلولة
 - ✓ تمارين مقترحة

أفريل 2020

Top Maths Tlemcen

www.dzexams.com



السلام عليكم

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات

اضع بين ايديكم اخواني الاساتذة ابنائي الطلبة هذا العمل و المتمثل
في مجلة درس الجداء السلمي و تطبيقاته خاص بالسنة الثانية

المجلة تتضمن 

✓ ملخص	ص 3
✓ الجداء السلمي	ص 4
✓ تطبيقات الجداء السلمي	ص 11
✓ تمارين محلولة	ص 22
✓ تمارين مقترحة	ص 24

« رَبِّ قَدْ آتَيْتَنِي مِنَ الْمُلْكِ وَعَلَّمْتَنِي مِنْ تَأْوِيلِ الْأَحَادِيثِ فَاطِرَ السَّمَاوَاتِ
وَالْأَرْضِ أَنْتَ وَلِيِّ فِي الدُّنْيَا وَالْآخِرَةِ تَوَفَّنِي مُسْلِمًا وَأَلْحِقْنِي بِالصَّالِحِينَ »

لا تنسونا بالدعاء محبة في الله الاستاذ بوشناق يوسف

الجداء السلمي في المستوى

الجداء السلمي في المستوي

ملخص الجداء السلمي

معادلة الدائرة علم مركزها ونق

في معلم متعامد ومتجانس معادلة الدائرة (C)

التي مركزها $\Omega(x_0, y_0)$ ونصف قطرها r

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \text{ هي: } (r > 0)$$

معادلة الدائرة علم قطرها

الدائرة التي قطرها [AB] هي مجموعة النقط M

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \text{ حيث}$$

المسافة بين نقطة ومستقيم

في معلم متعامد ومتجانس المسافة بين

نقطة $A(x_0, y_0)$ ومستقيم (D) معادلته

$$ax + by + c = 0 \text{ هي:}$$

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مبرهنة المتوسط

A و B نقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة

[AB]. من أجل كل نقطة M لدينا:

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

مبرهنة الكاشي

إذا كان ABC مثلث فإن:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \hat{B}$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \hat{C}$$

قاعدة المساحة

ABC مثلث و S مساحته. لدينا العلاقات التالية:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \hat{B} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \hat{C}$$

قانون الجيوب

ABC مثلث حيث $AB = c$, $AC = b$ و

$BC = a$. لدينا العلاقات التالية:

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}}$$

الجداء السلمي للشعاعين.

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي

الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{u} \cdot \vec{v}$ والمعرف بأحد أحد المساويات

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \text{ التالية:}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

حيث $\vec{u}(x, y)$ و $\vec{v}(x', y')$ هذه العبارة تسمى

العبارة التحليلية للجداء السلمي $(\vec{u} \cdot \vec{v})$

مبرهنة:

القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

خواص الجداء السلمي

من أجل كل ثلاث أشعة $\vec{u}$, $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ومن أجل

كل عدد حقيقيين λ و α لدينا:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$(\lambda \vec{u}) \cdot (\alpha \vec{v}) = \lambda \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

المطابقات الشهيرة

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \quad \checkmark$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \quad \checkmark$$

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \quad \checkmark$$

الشعاع الناضبي

إذا كانت $ax + by + c = 0$ معادلة لمستقيم (D)

فإن $\vec{u}(-b, a)$ شعاع توجيه له ومنه الشعاع

$\vec{n}(a, b)$ شعاع ناظمي للمستقيم (D)

الجداء السلمي

الجداء السلمي لشعاعين

تعريف:

الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{u} \cdot \vec{v}$ والمعرف بـ:

$$\begin{aligned} \bullet \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ إذا كان } \vec{u} = \vec{0} \text{ أو } \vec{v} = \vec{0} \\ \bullet \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \text{ إذا كان } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ و } \vec{v} \neq \vec{0} \end{aligned}$$

حالات خاصة:

$$\begin{aligned} \checkmark \text{ إذا كان } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مرتبطين خطيا وكان لهما نفس الاتجاه فإن } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \text{ لأن } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \\ \checkmark \text{ إذا كان } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مرتبطين خطيا وكانا اتجاهاهما متعاكسين فإن } \vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \text{ لأن } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1 \\ \checkmark \text{ نرمز إلى الجداء السلمي } \vec{u} \cdot \vec{u} \text{ بـ } \vec{u}^2 \text{ ونسميه المربع السلمي للشعاع } \vec{u} \text{ وهكذا } \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 \text{ وبصفة خاصة} \\ \text{إذا كانت } A \text{ و } B \text{ نقطتين فإن } \overline{AB}^2 = \|\overline{AB}\|^2 = AB^2 \end{aligned}$$

مبرهنة:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \text{ إذا كان } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ شعاعين فإن:}$$

العبرة التحليلية للجداء السلمي

مبرهنة:

$$\text{إذا كانت، في معلم متعامد ومتجانس، إذا كان } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ و } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ فإن: } \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

خلاصة

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوي. الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{u} \cdot \vec{v}$ والمعرف بأحد أحد المساويات التالية:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \quad \checkmark$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \quad \checkmark$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \quad \checkmark$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OA} \cdot \overline{OB} \text{ حيث } \vec{u} = \overline{OA} \text{ و } \vec{v} = \overline{OB} \text{ و } H \text{ المسقط العمودي لـ } B \text{ على } (OA). \quad \checkmark$$

$$\checkmark \text{ إذا كان } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ و } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ فإن } \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

ملاحظة:

إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ أو $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

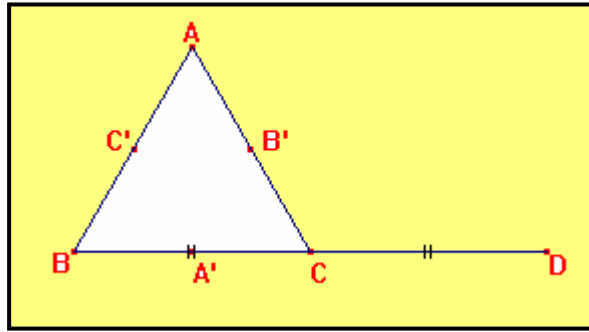
نتيجة:

باستعمال التعريف الأول نستنتج أن: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

تمرين الاول

ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث $AB = AC = BC = 3$ ولتكن النقط A' ، B' و C' منتصفات القطع المستقيمة $[BC]$ ، $[AC]$ و $[AB]$ على الترتيب.
أحسب الجداءات السلمية الآتية: $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ، $\vec{BC} \cdot \vec{CA}$ ، $\vec{CC'} \cdot \vec{AB}$ و $\vec{A'B'} \cdot \vec{AB}$.

حل:



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \cos \widehat{BAC} = 3 \times 3 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{9}{2}$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{CA} = \vec{CD} \cdot \vec{CA} = CD \times CA \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = 3 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{9}{2} \text{ ونعتبر النقطة } D \text{ حيث } \vec{BC} = \vec{CD} \text{ ومنه } \vec{BC} \cdot \vec{CA} = -\frac{9}{2}$$

$$\vec{CC'} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ وبالتالي فإن } (CC') \perp (AB) \text{ ومنه } \vec{CC'} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$\text{نعلم أن } \vec{A'B'} = -\frac{1}{2} \vec{AB} \text{ ومنه الشعاعان } \vec{AB} \text{ و } \vec{A'B'} \text{ مرتبطين خطيا واتجاههما متعاكسين وبالتالي فإن:}$$

$$\vec{A'B'} \cdot \vec{AB} = -A'B' \times AB = -\frac{3}{2} \times 3 = -\frac{9}{2}$$

التمرين الثاني

ABC مثلث حيث $AB = 4$ ، $AC = 5$ و $\widehat{CAB} = 60^\circ$

أحسب كلا من $\cos \widehat{BCA}$ و $\cos \widehat{ABC}$

الحل:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(16 + 25 - BC^2)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 4 \times 5 \times \frac{1}{2} \text{ و}$$

$$\text{اذن: } BC = \sqrt{21} \text{ ومنه } BC^2 = 21 \text{ ومنه } 4 \times 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (16 + 25 - BC^2) =$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2} (BA^2 + BC^2 - AC^2) = \frac{1}{2} (16 + 21 - 25) = 6$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = BA \times BC \times \cos \widehat{ABC} = 4 \times \sqrt{21} \times \cos \widehat{ABC} \text{ و}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{6}{4\sqrt{21}} = \frac{3}{2\sqrt{21}} \text{ ومنه } 6 = 4 \times \sqrt{21} \times \cos \widehat{ABC} \text{ اذن:}$$

$$\cos \widehat{BCA} = \frac{\sqrt{21}}{7} \text{ وب نفس الطريقة نجد}$$

التمرين الثالث

في معلم متعمد ومتجانس نعتبر النقط $A(2,0)$ ، $B(2,3)$ و $C(0,2)$

(1) احسب الجداء السلمي $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

(2) عين $\cos(\vec{AB}; \vec{AC})$ ثم استنتج قياسا للزاوية $\widehat{BAC}$.

الحل:

$$\vec{AB}(0;3) \text{ و } \vec{AC}(-2;2)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-2)(0) + (2)(3) = 6 \quad (1)$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{6}{3 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ومنه } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \quad (2)$$

نستنتج أن قياسا للزاوية $\widehat{BAC}$ هو $\frac{\pi}{4}$

تمرين الرابع

ABD و BCD مثلثان متقايسا الأضلاع حيث $BD = 4$. احسب الجداءات السلمية التالية:

$$\vec{AD} \cdot \vec{CB} \text{ و } \vec{DO} \cdot \vec{CD}, \vec{BA} \cdot \vec{BC}, \vec{AB} \cdot \vec{AD}$$

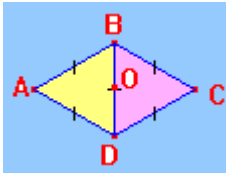
الحل:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD} = 4 \times 4 \times \cos 60^\circ = 8$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos \widehat{BAC} = 4 \times 4 \times \cos 120^\circ = -8$$

$$\vec{DO} \cdot \vec{CD} = \frac{1}{2} \vec{DB} \cdot \vec{CD} = \frac{1}{2} \vec{DB} \cdot (-\vec{DC}) = -\frac{1}{2} DB \times DC \times \cos \widehat{BDC} = -4$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{CB} = \vec{AD} \cdot \vec{DA} = -AD^2 = -16$$



تمرين الخامس

ABC مثلث متساوي الساقين وقائم في B و ACD مثلث متقايس الأضلاع. علما أن $AC = 6$

(1) احسب الجداءات السلمية التالية:

$$\vec{DC} \cdot \vec{DB} \text{ و } \vec{AC} \cdot \vec{CD}, \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

- (2) احسب DH حيث H هي المسقط العمودي لـ B على المستقيم (DC) .
 (3) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$ واستنتج قيمة $\cos \widehat{DCB}$

الحل :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 18 \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = -6 \times 6 \times \frac{1}{2} = -18$$

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DI} = DB \times DI$$

$$DI = 3\sqrt{3} \text{ ومنه } DI^2 = AD^2 - AI^2 = 36 - 9 = 27$$

$$IB = 3 \text{ ومنه } IB^2 = AB^2 - AI^2 = 18 - 9 = 9$$

$$DB = DI + IB = 3\sqrt{3} + 3$$

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = (DI + IB) \times DI = DI^2 + IB \cdot DI = (3\sqrt{3})^2 + 9\sqrt{3} = 27 + 9\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{DC} = \frac{\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB}}{DB} = \frac{27 + 9\sqrt{3}}{6} \text{ ومنه } \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DH} = DC \times DH \quad (2)$$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CH} = -CD \times CH = -CD \cdot (DH - DC) = 9(\sqrt{3} - 1) \quad (3)$$

$$= \times \cos \widehat{DCB} = \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}}{CD \times CB} = \frac{9(\sqrt{3} - 1)}{4\sqrt{3}} \text{ ومنه } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = CD \times CB \times \cos \widehat{DCB}$$

الأشعة المتعامدة

تعريف:

القول أن الشعاعين غير المعدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أنه إذا كان: $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ و $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ يكون المستقيمان (AB) و (AC) متعامدين.

ملاحظة:

نصطلح على أن الشعاع المعدوم عمودي على كل الأشعة.

مبرهنة:

القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

البرهان:

✓ إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فمن الواضح أن: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

✓ إذا كان $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$ فالقول أن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ يعني $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ أي $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث k عدد صحيح

وهذا يدل على أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان.

نتيجة:

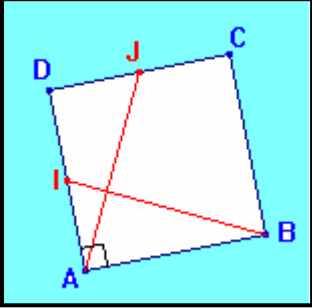
القول أن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان معناه $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

تمرين السادس

$ABCD$ مربع. I و J هما منتصفا القطعتين المستقيمتين $[AD]$ و $[DC]$ على الترتيب.
برهن أن المستقيمين (AJ) و (BI) متعامدان.

حل:

طريقة:



لإثبات أن مستقيمين (AB) و (CD) متعامدان يمكن إثبات أن $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

لنبين أن $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$. ومن أجل ذلك نعتبر المعلم المتعامد والمتجانس $(A; B, D)$
لدينا: $A(0,0)$, $J\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $B(1,0)$, $I\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ومنه $\overrightarrow{AJ}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ و $\overrightarrow{BI}\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
وهكذا: $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} = \left(\frac{1}{2}\right)(-1) + (1)\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

قواعد الحساب

خواص الجداء السلمي

مبرهنة:

من أجل كل ثلاث أشعة $\vec{u}$, $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ومن أجل كل عدد حقيقيين λ و α لدينا:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \checkmark$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \checkmark$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \quad \checkmark$$

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad \checkmark$$

$$(\lambda \vec{u}) \cdot (\alpha \vec{v}) = \lambda \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad \checkmark$$

البرهان:

نعتبر في معلم متعامد ومتجانس الأشعة $\vec{u}(x, y)$, $\vec{v}(x', y')$ و $\vec{w}(x'', y'')$

$$1. \text{ لدينا } \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \\ \vec{v} \cdot \vec{u} = x'x + y'y \end{cases} \text{ وبما أن } xx' = x'x \text{ و } yy' = y'y \text{ فإن } \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

2. إحداثيات الشعاع $\vec{v} + \vec{w}$ هي $(x' + x'', y' + y'')$. لدينا إذن:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \text{ومنهم} \begin{cases} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = x(x' + x'') + y(y' + y'') = xx' + xx'' + yy' + yy'' \\ \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = xx' + yy' + xx'' + yy'' = xx' + xx'' + yy' + yy'' \end{cases}$$

3. إحداثيات الشعاع $\lambda \vec{u}$ هي $(\lambda x, \lambda y)$. لدينا إذن:

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\lambda x)x' + (\lambda y)y' = \lambda(xx' + yy') = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

2.2. المتطابقات الشهيرة

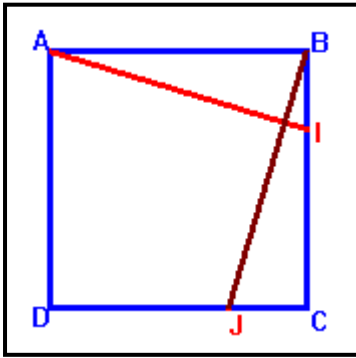
$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \text{ أو } (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \text{ أو } (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \text{ أو } (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \end{aligned}$$

التمرين السابع

ABCD مربع طول ضلعه a . I و J هما النقطتان المعرفتان بـ: $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

1. أحسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CJ}$ ، $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CJ}$.
2. بكتابة $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}$ أثبت أن $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} = 0$. ماذا تستنتج؟
3. (باختيار المعلم $(A; \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD})$) أثبت أن $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} = 0$. ماذا تستنتج؟

حل:



1) لدينا $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ، $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CJ} = 0$ بينما

$$\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot (-\overrightarrow{AB}) = -\frac{a^2}{3} \text{ و}$$

2) لدينا: $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ})$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CJ}$$

لدينا: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ لأن $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CJ} = 0$ لأن $\overrightarrow{BI} \perp \overrightarrow{CJ}$

$$\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC} = BI \times BC \text{ لأن } \overrightarrow{BI} \text{ و } \overrightarrow{BC} \text{ مرتبطان خطيا ولهما نفس الاتجاه}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CJ} = -AB \times CJ \text{ لأن } \overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{CJ} \text{ مرتبطان خطيا ولهما اتجاهين متعاكسين}$$

$$\text{إذن } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} = (BI \times BC) - (AB \times CJ) = \left(\frac{a}{4} \times a\right) - \left(a \times \frac{a}{4}\right) = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 0$$

2) في المعلم $(A; \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD})$ لدينا: $A(0;0)$ ، $B(a;0)$ ، $I(a; \frac{a}{4})$ و $J(\frac{3a}{4}; a)$

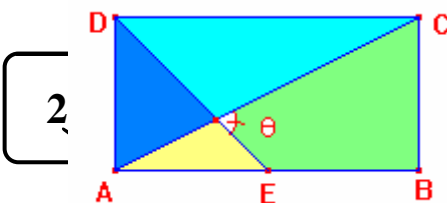
$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} = (a) \left(-\frac{a}{4}\right) + \left(\frac{a}{4}\right)(a) = 0 \text{ لدينا: } \overrightarrow{BJ} \left(-\frac{a}{4}; a\right) \text{ و } \overrightarrow{AI} \left(a; \frac{a}{4}\right) \text{ وبالتالي } (AI) \text{ و } (BJ) \text{ متعامدان}$$

التمرين الثامن

ABCD مستطيل حيث $AD = 3$ و $AB = 5$. E منتصف $[AB]$. (انظر الشكل المقابل)

1) احسب AC و DE .

مجلة - Top Maths في الجداء السلمي وتطبيقاته



2) عبر عن الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{DE}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$.

- احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE}$.

3) استنتج قيمة الزاوية $\theta = (\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{AC})$ بالدرجات بتقريب 0,01.

الحل:

$$1) DE = \sqrt{DA^2 + AE^2} = \frac{\sqrt{61}}{2} \text{ و } AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{34}$$

$$2) \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) \cdot \left(-\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} = -AD^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}AB^2 = -9 + \frac{25}{2} = \frac{7}{2} \text{ ومنه}$$

$$3) \cos(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE}}{AC \times DE} = \frac{7}{\sqrt{34} \times \sqrt{61}} = \frac{7}{\sqrt{2074}} \text{ ومنه } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} = AC \times DE \times \cos(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{AC})$$

طريقة أخرى: في المعلم $\left(A; \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$ لدينا: $A(0;0)$ ، $C(5;3)$ ، $D(0;3)$ و $E\left(\frac{5}{2}; 0\right)$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} = \left(5 \times \frac{5}{2}\right) + (-3 \times 3) = \frac{25}{2} - 9 = \frac{7}{2}$$

بالنقصان. $\cos(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{AC}) \approx 0,1537$ ، نستنتج أن قيمة الزاوية $\theta = (\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{AC})$ بالدرجات بتقريب 0,01 هي $81,15^\circ$

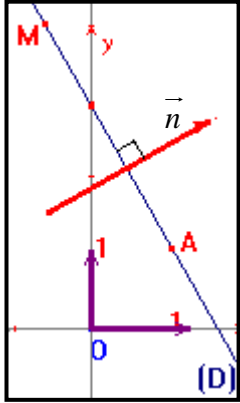
تطبيقات الجداء السلمي:

الشعاع الناطمي لمستقيم

تعريف:

القول أن الشعاع غير المعدوم $\vec{n}$ شعاع ناطمي لمستقيم (D) يعني أن $\vec{n}$ عمودي على شعاع توجيه له (D)

معادلة مستقيم علم شعاع ناطمي له ونقطة منه



$(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس. $\vec{n}(a, b)$ شعاع غير معدوم و $A(x_0, y_0)$ نقطة من المستوي

وليكن (D) المستقيم الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناطمي له.

أي (D) هي إذن مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

نفرض أن $M(x, y)$ فيكون لدينا $\vec{AM}(x - x_0, y - y_0)$

وبالتالي $M \in (D)$ معناه $\vec{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_0) + b(y - y_0)$

ومعناه $ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$

بوضع $c = -(ax_0 + by_0)$ يكون $ax + by + c = 0$

مبرهنة:

في معلم متعامد ومتجانس يكون لكل مستقيم حيث الشعاع غير المعدوم $\vec{n}(a, b)$ شعاع ناطمي له معادلة

من الشكل: $ax + by + c = 0$ حيث c عدد حقيقي.

ملاحظة:

إذا كانت $ax + by + c = 0$ معادلة لمستقيم (D) فإن شعاع توجيه له ومنه الشعاع $\vec{n}(a, b)$ شعاع

ناظمي للمستقيم (D) لأن فعلا $\vec{n}$ و $\vec{u}$ متعامدان مادام $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$.

التمرين التاسع

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس. نعتبر المثلث ABC حيث: $A(1, 1)$, $B(-2, 3)$ و $C(3, 2)$.

أكتب معادلة للارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$

حل التمرين:

ليكن (D) الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC . إذن (D) هو المستقيم الذي يشمل النقطة A و BC

شعاع ناطمي له. وبما أن المركبات السلمية ل BC هي $(5, -1)$ فإن معادلة (D) هي من الشكل:

$$5x - y + c = 0$$

وبما أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (D) فإن: $5(1) - 1 + c = 0$ ومنه $c = -4$

إذن $5x - y - 4 = 0$ هي معادلة للارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$.

التمرين العاشر:

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس. نعتبر المثلث ABC حيث: $A(0,1)$ ، $B(3,0)$ و $C(2,3)$.
أكتب معادلة للارتفاع Δ المتعلق بالضلع $[BC]$

حل التمرين:

طريقة أولى

ليكن (D) الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC . إذن (D) هو المستقيم الذي يشمل النقطة A و $\overline{BC}$ شعاع ناظمي له. وبما أن المركبات السلمية ل $\overline{BC}$ هي $(-1,3)$ فإن معادلة (D) هي من الشكل:

$$-x + 3y + c = 0$$

وبما أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (D) فإن: $-(0) + 3(1) + c = 0$ ومنه $c = -3$

إذن $-x + 3y - 3 = 0$ هي معادلة للارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$.

طريقة ثانية

نفرض أن $M(x, y) \in \Delta$. معناه $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ومعناه $-x + 3y - 3 = 0$

معادلة دائرة

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

✓ معادلة دائرة علم مركزها ونصف قطرها

لتكن (C) الدائرة التي مركزها $\Omega(x_0, y_0)$ ونصف قطرها $r (r > 0)$. (C) هي مجموعة النقط $M(x, y)$ حيث:

$$\Omega M = r \text{ أي } \Omega M^2 = r^2 \text{ وهذا يعني أن: } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

مبرهنة:

في معلم متعامد ومتجانس معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(x_0, y_0)$ ونصف قطرها $r (r > 0)$ هي:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

مثال 1:

معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(3, -1)$ ونصف قطرها 2 هي: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$

مثال 2:

المعادلة $x^2 + y^2 = 1$ هي معادلة الدائرة التي مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها 1 - الدائرة المثلثية -

✓ معادلة دائرة علم قطرها

لتكن (C) الدائرة التي قطرها $[AB]$. (C) باستثناء A و B هي مجموعة

النقط M بحيث يكون المثلث AMB قائما في M أي $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

لدينا كذلك $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ إذا كانت M منطبقة على A أو على B .

مبرهنة:

الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

تمارين الحادي عشر

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس.

1. عين معادلة (C) الدائرة التي مركزها $\Omega(-2, 1)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$.
2. عين معادلة (C') الدائرة التي قطرها $[AB]$ علما أن $A(-2, -1)$ و $B(-3, 2)$.
3. بين أن مجموعة النقط $M(x, y)$ حيث $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.
4. هل (Γ) مجموعة النقط $M(x, y)$ حيث $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 8 = 0$ دائرة؟

حل التمرين :

1. معادلة (C) هي $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{3}^2$ أي: $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$
2. $M(x, y) \in (C')$ يعني أن $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ أي: $(-2 - x)(-3 - x) + (-1 - y)(2 - y) = 0$
ومنه معادلة (C') هي $x^2 + y^2 + 5x - y + 4 = 0$
3. لتكن (C_1) مجموعة النقط $M(x, y)$ التي تحقق $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ (*)
لدينا $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$ و $y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 2^2$ ومنه تكتب (*) على الشكل:
 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$
إذن (C_1) هي الدائرة التي مركزها النقطة $\omega(3, -2)$ ونصف قطرها 3.
4. نكتب $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 8 = 0$ على الشكل $(x^2 + 2x) + (y^2 - 4y) + 8 = 0$
وبما أن $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$ و $y^2 - 4y = (y - 2)^2 - 4$ يكون لدينا: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = -3$
الطرف الأول للمساواة موجب بينما طرفها الثاني سالب وبالتالي لا توجد نقط $M(x, y)$ إحداثياتها تحقق هذه المساواة.
المجموعة (Γ) هي إذن مجموعة خالية.
ملاحظة:

لكل دائرة معادلة من الشكل $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ لكن ليس كل معادلة من هذا الشكل معادلة لدائرة.

تمرين رقم 70 ص 303

لتكن النقط $A(1; 3)$ ، $B(3; 0)$ و $C(-5; -1)$.

- 1) بين أن المثلث ABC قائم.
- 2) عين معادلة للدائرة المحاطة بالمثلث ABC .
- 3) عين معادلة لمس هذه الدائرة في A .

المسافة بين نقطة ومستقيم

تعريف:

المسافة بين نقطة A ومستقيم (D) هي المسافة AH بين A والنقطة H مسقطها العمودي على (D) .
نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ نقطة $A(x_0, y_0)$ ومستقيما (D) معادلته $ax + by + c = 0$ حيث $(a, b) \neq (0, 0)$.

لتكن النقطة $H(x_1, y_1)$ المسقط العمودي للنقطة A على (D) وليكن $\vec{n}(a; b)$ الشعاع النازمي للمستقيم (D)

لنحسب المسافة بين H و (D)

$$\vec{HA} \cdot \vec{n} = HA \times \|\vec{n}\| \times \cos(\vec{HA}; \vec{n})$$

بما أن $\vec{HA}$ مرتبط خطيا مع $\vec{n}$ فإن $\cos(\vec{HA}; \vec{n}) = 1$ أو $\cos(\vec{HA}; \vec{n}) = -1$

$$\text{إذن: } |\vec{HA} \cdot \vec{n}| = HA \times \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1) \dots$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\vec{HA} \cdot \vec{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) \text{ لأن } \vec{HA}(x_0 - x_1; y_0 - y_1) \text{ و } \vec{n}(a; b)$$

$$\vec{HA} \cdot \vec{n} = ax_0 + by_0 - (ax_1 + by_1) \text{ أي:}$$

ولدينا $H \in (D)$ معناه $ax_1 + by_1 + c = 0$ ومعناه $ax_1 + by_1 = -c$

$$\text{إذن: } |\vec{HA} \cdot \vec{n}| = |ax_0 + by_0 + c| \quad (2) \dots$$

$$HA = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ أي } HA = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ من (1) و (2) نستنتج أن:}$$

مبرهنة:

في معلم متعامد ومتجانس المسافة بين نقطة $A(x_0, y_0)$ ومستقيم (D) معادلته $ax + by + c = 0$ هي:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

التمرين الثاني عشر

احسب المسافة بين المستقيم $(d): 2x - 3y + 2 = 0$ وبين نقطة $\omega(3, 0)$

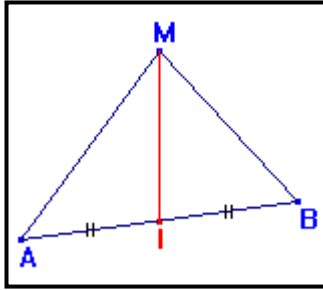
حل التمرين

في معلم متعامد ومتجانس المسافة بين نقطة $\omega(3, 0)$ ومستقيم (d) معادلته $2x - 3y + 2 = 0$ هي:

$$\frac{|2 \times 3 - 3 \times 0 + 2|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{8}{\sqrt{13}} \approx 2,21$$

حساب أطوال وأقياس زوايا

مبرهنة المتوسط



A و B نقطتان. I منتصف القطعة المستقيمة [AB]. M نقطة كيفية من المستوي.

$$\text{لدينا: } MA^2 + MB^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = (\overline{MI} + \overline{IA})^2 + (\overline{MI} + \overline{IB})^2$$

$$\text{ومنه: } MA^2 + MB^2 = 2\overline{MI}^2 + 2\overline{MI} \cdot (\overline{IA} + \overline{IB}) + \overline{IA}^2 + \overline{IB}^2$$

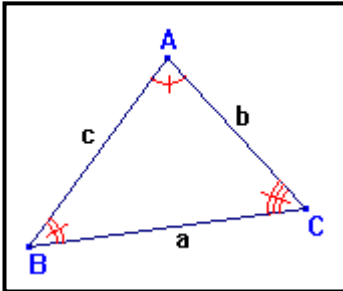
$$\text{وبما أن: } \overline{IA} = \overline{IB} = \frac{1}{2}AB \text{ أي } IA = IB = \frac{1}{2}AB \text{ و } \overline{IA} + \overline{IB} = \vec{0}$$

$$\text{فإن: } MA^2 + MB^2 = 2\overline{MI}^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

مبرهنة:

A و B نقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة [AB]. من أجل كل نقطة M لدينا:

$$MA^2 + MB^2 = 2\overline{MI}^2 + \frac{1}{2}AB^2$$



العلاقات المترية في مثلث

ABC مثلث. نضع $\widehat{CBA} = \widehat{B}$, $\widehat{BAC} = \widehat{A}$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

$\widehat{ACB} = \widehat{C}$ ولتكن S مساحة المثلث ABC.

مبرهنة الكاشي

$$\text{لدينا: } BC^2 = \overline{BC}^2 = (\overline{AC} - \overline{AB})^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AB}$$

$$\text{وبما أن: } \overline{AC} \cdot \overline{AB} = AC \times AB \cos \widehat{A} \text{ فإن: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$$

$$\text{وباتباع نفس الطريقة نثبت أن } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B} \text{ و } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$$

مبرهنة:

إذا كان ABC مثلث فإن:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{A} \quad \checkmark$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{B} \quad \checkmark$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \widehat{C} \quad \checkmark$$

قاعدة المساحة

مبرهنة: ABC مثلث و S مساحته. لدينا العلاقات التالية:

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{A} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{B} = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin \widehat{C}$$

قانون الجيوب

مبرهنة:

ABC مثلث حيث $AB = c$, $AC = b$ و $BC = a$. لدينا العلاقات التالية:

$$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}}$$

التمرين الثالث عشر

ABC مثلث حيث: $AB = 5$ ، $AC = 8$ و $BC = 7$.

1. عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MA^2 + MC^2 = 38$
2. أحسب $\hat{A}$ و عيّن قيمة مقربة إلى 0.1 لكل من $\hat{B}$ و $\hat{C}$.
3. أحسب المسافة BH حيث H هي المسقط العمودي للنقطة B على (AC)

حل التمرين:

1. لتكن النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$. بتطبيق مبرهنة المتوسط يكون لدينا:

$$MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AC^2 = 38 \text{ يعني أن: } M \text{ نقطة من } (\Gamma) \text{ يعني أن: } 2MI^2 + \frac{1}{2}AC^2 = 38$$

أي $2MI^2 + 32 = 38$ أو $MI^2 = 3$ وبالتالي فإن (Γ) هي الدائرة التي مركزها النقطة I ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

2. بتطبيق مبرهنة الكاشي في المثلث ABC يكون لدينا: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A}$

أي $49 = 64 + 25 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos \hat{A}$ ومنه $\cos \hat{A} = \frac{1}{2}$ وبما أن $0 < \hat{A} < 180^\circ$ فإن: $\hat{A} = 60^\circ$.

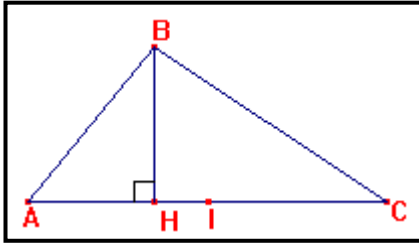
بتطبيق مبرهنة الكاشي وبعد الحساب نجد: $\cos \hat{B} = \frac{1}{7}$ وباستعمال آلة حاسبة نقرأ: $\hat{B} \approx 81.2^\circ$.

نعلم أن $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ ومنه $\hat{C} \approx 38.8^\circ$.

3. لدينا من جهة $S = \frac{1}{2}AC \times BH$

ولدينا حسب قاعدة المساحة $S = \frac{1}{2}AB \times AC \sin \hat{A}$

ومنه $AH = AB \sin \hat{A}$ أي $AH = 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ لأن $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$



التمرين الرابع عشر

ABC مثلث حيث: $BC = 8$ ، $\hat{B} = 50^\circ$ و $\hat{C} = 70^\circ$.

1. أحسب $\hat{A}$.
2. أحسب AB و AC ثم عيّن مدور كل منهما إلى 10^{-2} .

حل التمرين:

1. من $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ نجد $\hat{A} = 60^\circ$.

2. بتطبيق قانون الجيوب في المثلث ABC يكون لدينا: $\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}}$

ومنه $AC = \frac{BC \sin \hat{B}}{\sin \hat{A}} = \frac{8 \sin 50^\circ}{\sin 60^\circ}$ و $AB = \frac{BC \sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} = \frac{8 \sin 70^\circ}{\sin 60^\circ}$

نجد هكذا باستعمال آلة حاسبة أن مدور AB إلى 10^{-2} هو 8.68 بينما مدور AC إلى 10^{-2} هو 7.08.

التمرين الخامس عشر

$ABCD$ مستطيل مركزه I . برهن أنه من أجل كل نقطة M من المستوي، $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

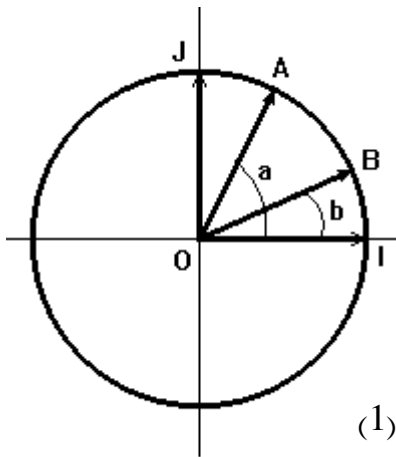
حل التمرين:

I منتصف $[AC]$ ، بتطبيق مبرهنة المتوسط يكون لدينا: $MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AC^2$
 كما أن I منتصف $[BD]$ ، بتطبيق مبرهنة المتوسط يكون لدينا: $MB^2 + MD^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}BD^2$
 وبما أن قطرا المستطيل متقايسين فإن $AC = BD$ فنستنتج أن: $2MI^2 + \frac{1}{2}AC^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}BD^2$
 أي: $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$

دسائير الجمع

دسائير الجمع

حساب $\cos(a-b)$:



$(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي. نعتبر النقطتين A و B من الدائرة المثلثية التي مركزها النقطة O بحيث:

$$(\vec{OI}, \vec{OA}) = a \text{ و } (\vec{OI}, \vec{OB}) = b$$

لنحسب الجداء السلمي: $\vec{OB} \cdot \vec{OA}$

$$(1) \dots \vec{OB} \cdot \vec{OA} = OB \times OA \times \cos(\vec{OB}; \vec{OA}) = 1 \times 1 \times \cos(a-b) = \cos(a-b)$$

ومن جهة أخرى لدينا: $\vec{OB}(\cos b; \sin b)$ و $\vec{OA}(\cos a; \sin a)$

$$(2) \dots \vec{OB} \cdot \vec{OA} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

من (1) و (2) نستنتج أن: $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

مثال: حساب $\cos \frac{\pi}{12}$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

حساب $\cos(a+b)$:

$$\cos(a+b) = \cos(a - (-b)) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$$

$$\text{ومنه } \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

حساب $\sin(a-b)$:

$$\sin(a-b) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - (a-b) \right) = \cos \left(\left(\frac{\pi}{2} - a \right) + b \right)$$

$$\text{ومنه } \sin(a-b) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \cos b - \sin \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \sin b$$

$$\text{ومنه } \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

حساب $\sin(a+b)$:

$$\sin(a+b) = \sin(a - (-b)) = \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b)$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \text{ ومنه}$$

التمرين السادس عشر

تحقق أن $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ ثم أحسب القيم المضبوطة لـ $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$

حل التمرين

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ ومنه:}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ ومنه:}$$

التمرين السابع عشر

احسب $\cos 3x$ بدلالة $\cos x$ و $\sin 3x$ بدلالة $\sin x$

حل التمرين:

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

$$\cos 3x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - (2\cos x \sin x)\sin x \text{ ومنه}$$

$$\cos 3x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x \sin^2 x \text{ ومنه}$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \text{ إذن } \cos 3x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x (1 - \cos^2 x) \text{ ومنه}$$

$$\sin 3x = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$$

$$\sin 3x = 2\sin x \cos x \cos x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x \text{ ومنه}$$

$$\sin 3x = 2\sin x \cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x \text{ ومنه}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \text{ إذن } \sin 3x = 2\sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x \text{ ومنه}$$

نتائج

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a \text{ و } \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \text{ (1)}$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \text{ (2)}$$

التمرين الثامن عشر

(1) أحسب القيم المضبوطة لـ $\cos \frac{\pi}{8}$ و $\sin \frac{\pi}{8}$

2) بين أن: $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$ و $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$

حل التمرين:

1) • $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ومنه $\cos 2\frac{\pi}{8} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$ ومنه $\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$ ومنه $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$

بما أن $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ فإن $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ وبالتالي $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

• $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ومنه $\cos 2\frac{\pi}{8} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{8}$ ومنه $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{8}$ ومنه $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \sin^2 \frac{\pi}{8}$

بما أن $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ فإن $\sin \frac{\pi}{8} > 0$ وبالتالي $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

2) $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ ومنه $2\cos^2 a = 1 + \cos 2a$ ومنه $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ ومنه $2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$ ومنه $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

التمرين التاسع عشر

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$ ، 2) $\sin 2x - 2\sin^2 x = 0$ ، 3) $\cos^2 x - \sin x \cos x = \frac{1}{2}$

حل التمرين:

1) $\cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$ تكافئ $\cos 2x + \sin 2x = 0$

وتكافئ $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$

وتكافئ مع $k \in \mathbb{Z}$ $x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$

2) $\sin 2x - 2\sin^2 x = 0$ تكافئ $2\sin x \cos x - 2\sin^2 x = 0$

وتكافئ $2\sin x (\cos x - \sin x) = 0$

وتكافئ $(x = k\pi)$ أو $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

3) $\cos^2 x - \sin x \cos x = \frac{1}{2}$ تكافئ $2\cos^2 x - 2\sin x \cos x - 1 = 0$

وتكافئ $\cos 2x - \sin 2x = 0$

وتكافئ $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

وتكافئ مع $k \in \mathbb{Z}$ $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$

التمرين العشرون

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: 1) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ ، 2) $\sin 2x - \sqrt{3} \cos x = 0$

حل التمرين:

1) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ تكافئ $2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0$

$$\cos x (2 \cos x - 1) = 0 \text{ وتكافئ}$$

$$\text{وتكافئ} \left(x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \text{ أو } \left(x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \text{ أو } \left(x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \text{ مع } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2x - \sqrt{3} \cos x = 0 \text{ تكافئ } 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$\cos x (2 \sin x - \sqrt{3}) = 0 \text{ وتكافئ}$$

$$\text{وتكافئ} \left(x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \text{ أو } \left(x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \text{ أو } \left(x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right) \text{ مع } k \in \mathbb{Z}$$

حل المعادلات من الشكل : $a \cos x + b \sin x = c$ خاص بالرياضي
مثال:

$$\text{نعتبر المعادلة } \cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$$

$$\text{لدينا: } \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ومعناه } \cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x = \cos \frac{\pi}{4} \text{ ومعناه } \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\text{ومعناه } \left(x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \right) \text{ أو } \left(x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \right) \text{ مع } k \in \mathbb{Z}$$

الحالة العامة:

نعتبر المعادلة $a \cos x + b \sin x = c$ ، نقسم طرفي المعادلة على $\sqrt{a^2 + b^2}$ فنحصل على:

$$(1) \dots \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{لدينا: } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$$

نستنتج أنه توجد زاوية α حيث أن : $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ و $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

$$(1) \text{ تكافئ } \cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x = C \text{ مع } C = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ وتكافئ } \cos(x - \alpha) = C$$

تمارين محلولة

تمارين محلولة

التمرين الواحد والعشرون

ABC مثلث حيث $AB = 3$ ، $AC = 2$ و $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$.

1. أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2. باستعمال مبرهنة الكاشي أحسب الطول BC .

3. أحسب $\cos(\hat{B} + \hat{C})$ ؛ استنتج أن $2 \cos \hat{B} \cos \hat{C} = 2 \sin \hat{B} \sin \hat{C} - 1$.

حل التمرين:

ABC مثلث حيث $AB = 3$ ، $AC = 2$ و $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$.

$$1. \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos \hat{A} = 6 \times \frac{1}{2} = 3 .$$

$$2. BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \hat{A} = 13 - 6 = 7 \text{ أي } BC = \sqrt{7} \text{ معناه } BC^2 = 13 - 6 = 7$$

$$3. \cos(\hat{B} + \hat{C}) = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} ؛ \hat{B} + \hat{C} = \pi - \hat{A} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos \hat{B} \cos \hat{C} - \sin \hat{B} \sin \hat{C} = -\frac{1}{2} \text{ إذن } \cos(\hat{B} + \hat{C}) = \cos \hat{B} \cos \hat{C} - \sin \hat{B} \sin \hat{C} \text{ معناه}$$

$$2 \cos \hat{B} \cos \hat{C} = 2 \sin \hat{B} \sin \hat{C} - 1 \text{ أي } 2 \cos \hat{B} \cos \hat{C} - 2 \sin \hat{B} \sin \hat{C} = -1$$

تمرين الثاني والعشرون

حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين:

$$(1) \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} ، (2) \sin(3x) = \cos(x + \pi)$$

حل التمرين:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ تعني أن } \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{5\pi}{6} \text{ ومنه } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ أو } 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ أي}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ أو } x = -\frac{7\pi}{12} + k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(3x) = \cos(x + \pi) \text{ تعني أن } \sin(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \text{ ومنه } \cos(\pi + x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \text{ أو } \pi + x = -\frac{\pi}{2} + 3x + 2k\pi$$

$$\text{وبالتالي: } x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \text{ أو } x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

التمرين الثالث والعشرون

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. لتكن النقط $A(4;2)$ ، $B(2;-1)$ و $C(-1;1)$

1) احسب $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ ، $\|\vec{BA}\|$ و $\|\vec{BC}\|$.

2) استنتج طبيعة المثلث ABC .

حل التمرين

1) $A(4;2)$ ، $B(2;-1)$ و $C(-1;1)$.

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (-3) \times 2 + (2 \times 3) = 0; \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} -1-2 \\ 1+1 \end{pmatrix}, \quad \vec{BA} \begin{pmatrix} 4-2 \\ 2+1 \end{pmatrix}; \quad \vec{BA} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{BC}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}, \quad \|\vec{BA}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

2) بما أن $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$ فإن $(BA) \perp (BC)$ ومنه المثلث ABC قائم في B . ولدينا $\|\vec{BA}\| = \|\vec{BC}\|$ ومنه ABC متساوي الساقين.

تمارين مقترحة

التمرين الرابع والعشرون

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, I; J)$ نعتبر النقط $A(1;1)$ ، $B(3;4)$ ، $C(3-k;-1)$ ، حيث k عدد حقيقي.

1. عين العدد الحقيقي k حتى يكون المثلث ABC قائم في A .
- برهن أن المثلث ABC متساوي الساقين قاعدته $[BC]$ من أجل قيمة k الموجودة في السؤال الأول.

التمرين الخامس والعشرون

لتكن النقط $A(1;3)$ ، $B(3;0)$ ، $C(-5;-1)$.

1. بين أن المثلث ABC قائم.
2. عين معادلة للدائرة المحيطة بالمثلث ABC .
3. عين معادلة لمماس هذه الدائرة في A .
- (D) المستقيم الذي معادلته $2x - y - 1 = 0$ و A النقطة التي إحداثياتها $(1;2)$.
1. تحقق أن النقطة $H(t; 2t-1)$ تنتمي إلى المستقيم (D).
2. عين إحداثيتي النقطة H حتى يكون المستقيمان (D) و (AH) متعامدين.
3. عين معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A وعمودي على المستقيم (D).

نعتبر المجموعة $(E): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 35 = 0$

1. بين أن (E) دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.
2. هل المستقيم $x + y + 1 = 0$ مماس للدائرة (E).

التمرين السادس والعشرون

$C; B; A$ ثلاث نقط من المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث :

$A(-2;-1)$ ، $B(-3;4)$ ، $C(2;-1)$

1/ أحسب : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

2/ أحسب : $\|\overrightarrow{AB}\|$ ، $\|\overrightarrow{AC}\|$ ، ثم استنتج $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

3/ أكتب معادلة للدائرة (C) التي قطرها $[BC]$.

4/ أكتب معادلة للمستقيم (D) الذي يشمل A وعمودي على المستقيم الذي معادلته : $2x + 3y - 6 = 0$

التمرين السابع والعشرون

لتكن النقط $A(1;3)$ ، $B(3;0)$ ، $C(-5;-1)$.

1. بين أن المثلث ABC قائم.
2. عين معادلة للدائرة المحيطة بالمثلث ABC .
3. عين معادلة لمماس هذه الدائرة في A .
- (D) المستقيم الذي معادلته $y = 2x - 1$ و A النقطة التي إحداثياتها $(1;2)$.
- نرمز بـ H إلى المسقط العمودي للنقطة A على (D).

- 1) ماذا يمكن القول عن الشعاع $\overrightarrow{AH}$ بالنسبة للمستقيم (D) ؟
- 2) عين إحداثيتي النقطة H .
- 3) احسب المسافة AH بطريقتين .
- 4) عين معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A وعمودي على المستقيم (D)

التمرين الثامن والعشرون

نفرض المستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ولتكن (C) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي التي تحقق $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ ولنعبر النقط $C; B; A$ المعرفة بـ

$$C(0, 2 - \sqrt{3}); B(-3, 2); A(0, 1 + \sqrt{3})$$

- 1- أثبت أن (C) دائرة يطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها r .
- 2- عين معادلة المستقيم (AB)
- 3- ليكن (Δ) المستقيم المار بالنقطة ω وعمودي على المستقيم (AB)
- عين معادلة المستقيم (Δ)
- بين أن (Δ) يقطع الدائرة (C) في النقطة C والنقطة D يطلب تعيين إحداثياتها.
- 4- أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ مستنتجا قياس الزاوية $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- 5- ماهي طبيعة المثلث ABC ثم أحسب مساحته.
- 6- ليكن التحاكي h ذو المركز O والنسبة 2 عين معادلة الدائرة (C') صورة الدائرة (C) بواسطة التحويل h
- 7- أنشئ (C) و (C') .

التمرين التاسع والعشرون

A و B نقطتان من المستوي و I منتصف [AB]

- 1) بين أن من أجل كل نقطة M من المستوي يكون: $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB}$
- 2) نفرض أن $AB = 1$ عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $MA^2 - MB^2 = 2$

التمرين الثلاثون

- لتكن A و B نقطتان متميزتان من المستوي و G مرجح (A; 3) و (B; 2) حيث $AB = 5$.
- 1) أ) اكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$
 - ب) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 10$
- بين أن $G \in (E)$ - برهن أن (E) هي المستقيم العمودي على (AB) في G .
 - 2) حدد (F) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $MA^2 + MB^2 = 7$

التمرين الواحد والثلاثون

- A و B نقطتان متميزتان من المستوي حيث $AB = 2$. لتكن G مرجح (A; 3) و (B; 1)
- 1) أنشئ G ثم احسب AG و GB
 - 2) بين أنه من أجل كل نقطة M من المستوي: $3MA^2 + MB^2 = 4MG^2 + 3$
 - 3) عين المجموعة (E)، مجموعة النقط M من المستوي حيث $3MA^2 + MB^2 = 4$
 - 4) تحقق أن A تنتمي إلى (E)

A و B نقطتان متميزتان حيث $AB = 2$. نريد أن نبحث عن المحل الهندسي (E) للنقط M حيث $\frac{MA}{MB} = 3$

1) بين أن $M \in (E)$ يكافئ $MA^2 - 9MB^2 = 0$

2) لتكن G مرجع $(A;1)$ و $(B;3)$ و K مرجع $(A;1)$ و $(B;-3)$

- بين أن G و K تنتميان إلى (E) .

3) عبر عن $MA^2 - 9MB^2$ بدلالة $\overrightarrow{MG}$ و $\overrightarrow{MK}$.

4) استنتج طبيعة المحل الهندسي (E)

نرمز إلى المستوي بالرمز (P) ونعتبر في معلم متعامد ومتجانس النقط $A(0;2)$ ، $B(-1;0)$ و $C(0;-3)$

نعتبر المجموعتين: $D = \{M \in (P) / MA^2 - MB^2 = k\}$ و $D' = \{M \in (P) / MA^2 - 2MB^2 = k'\}$ حيث $(k, k') \in \mathbb{R}^2$

بين أن (D) و (D') مستقيمان متعامدان.

سلطان تم بفضل الله
الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات
سلطان الأستاذ يوسف بوشناق
سلطان يتمنى لكم التوفيق

تجدون هذا الملف في صفحة
Top Maths

