



تمرين 39

الدوال المعادلات الاشتقاقية

والتفاضل والتكامل والهندسة

شعبة : علوم تجريبية / تقنية رياضية / رياضية

2^{as}

” جمع 9 اعداد الأستاذ شعبان أسامة

1.

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $3x^2 - 5x + 2 = 0$.
2. ليكن كثير الحدود $f(x)$ معرف كمايلي : $f(x) = 3x^3 - 8x^2 + 7x - 2$.
أ- أحسب $f(1)$ ، $f(-2)$ ، $f(2)$.
ب- حل كثير الحدود $f(x)$.
ج- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ ثم المتراجحة $f(x) < 0$.
3. نعتبر الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = \frac{2x-7}{x-3}$.
أ) حدد مجموعة تعريف الدالة g .
ب) أكتب $g(x)$ على الشكل : $g(x) = a + \frac{b}{x-3}$.
ج- استنتج رسم منحنى الدالة g انطلاقا من التمثيل البياني للدالة مقلوب .
4. لكن النقطة $\Omega(3; 2)$ أكتب معادلة (C_g) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.
ثم بيّن أنّ الدالة متناظرة بالنسبة الى Ω .
5. فكك الدالة g الى مركب دالتين مرجعيتين u, v يطلب تعيينهما
6. استنتج اتجاه تغير الدالة g انطلاقا من اتجاه تغير الدالتين : u و v

2.

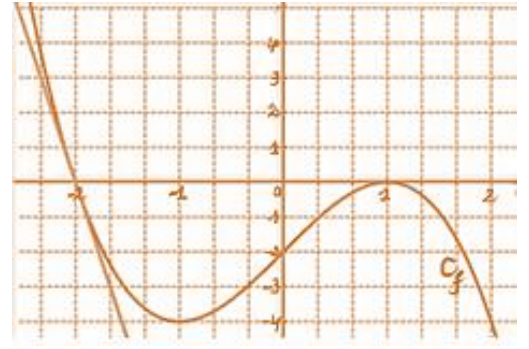
- المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. f و g الدالتان المعرفتان بـ : $f(x) = x^2 + 2x - 3$ و $g(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ وليكن (C_f) و (C_g) التمثيلين البيانيين لهما على الترتيب .
1. احسب كلا من f' و g' .
 2. أكتب معادلة (Δ) مماس للمنحنى (C_f) الذي يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = 5$.
 3. أكتب معادلة (Δ') مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2 .
 4. أوجد العددين الحقيقيين α و β حيث : $f(x) = (x + \alpha)^2 + \beta$.
 5. أوجد العددين الحقيقيين a و B حيث : $g(x) = a + \frac{b}{x-1}$.
 6. اشرح كيف يمكن رسم (C_f) انطلاقا من التمثيل البياني للدالة مربع ثم ارسمه
 7. بيّن كيف يمكن رسم (g) انطلاقا من التمثيل البياني للدالة مقلوب ثم ارسمه

3.

- نعتبر كثير الحدود معرف على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 27x - 18$
1. بيّن أنّ العدد $\frac{3}{2}$ جذر لكثير الحدود f .
 2. عيّن الاعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث من اجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = (2x - 3)(ax^2 + bx + c)$.
 3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x) = 0$.
 4. أدرس اشارة $f(x)$ ثم استنتج حلول المتراجحة $f(x) < 0$.
 5. نضع : $Q(x) = \frac{f(x)}{x+2}$.
أ- عيّن مجموعة تعريف $Q(x)$.
ب- استنتج حلول المتراجحة $Q(x) \geq 0$.
 6. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $2x - 13 < \frac{-27}{x} + \frac{18}{x^2}$.
 - 7.

4.

لتكن الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[-3; 3]$



1. بقراءة بيانية أوجد : $f'(-1)$ ، $f'(0)$ ، $f(1)$ ، $f(2)$

5.

$P(x) = 4x^3 - 13x - 6$: كثير حدود معرف على $\mathbb{R}$ بـ

1. بين أن P يقبل القسمة على $x + \frac{1}{2}$
2. عيّن كثير الحدود $Q(x)$ بحيث يكون : $P(x) = (2x + 1)Q(x)$
3. حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$
4. عيّن حلول المتراجحة $P(x) \geq 0$
5. نضع : $H(x) = P(x) + 6(2x + 1)$
- أ- عيّن تحليلًا لـ $H(x)$
- ب- عيّن حلول المعادلة : $H(|x|) = 0$

6.

نعتبر الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = (x - 1)^2$

1. فكك الدالة f الى مركب دالتين u و v
2. انطلاقًا من اتجاه تغير الدالتين u و v استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[1; +\infty[$
3. أرسم في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ المنحنى (P) الممثل للدالة $x \rightarrow x^2$ و استنتج رسم المنحنى الممثل للدالة f في نفس المعلم
4. g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = f(|x|)$
- أ- أثبت أنه من اجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$: $g(x) = f(x)$
- ب- أثبت أن الدالة g زوجية
- ج- أرسم منحنى g باستعمال منحنى f في نفس المعلم

7.

نعتبر الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. أحسب $f(1)$ ثم اكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ و اعط تفسيرًا بيانيًا للنتيجة
3. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P(x) \geq 0$ اعط تفسيرًا بيانيًا للنتيجة
4. بين لماذا (C_f) يقبل الاشتقاق عند كل نقطة من $\mathbb{R}$

5. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f'(x) = 0$ ثم فسّر النتيجة بيانياً
6. عيّن النقط من (C_f) التي يكون فيها معامل توجيه المماس 3
7. ليكن (D) مستقيم معادلته : $y = mx + d$ حيث m و d عدنان حقيقيان .
ناقش حسب قيم m وجود مماسات للمنحنى (C_f) تكون فيها موازية للمستقيم (D) .

8.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$

1. عيّن الدالة المشتقة للدالة f .
2. حل المعادلة $f'(x) = 0$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f
3. عيّن معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة $x_0 = 0$.
4. أوجد قيمة مقربة للعدد $f(0.099)$.

9.

لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2 + 2x + 1$

و ليكن (C_f) المنحنى البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1. أدرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
2. عيّن معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها -2
3. برهن أن (C_f) يقبل مماس وحيد معامل توجيهه 3 ثم عيّن إحداثيتي نقطة التماس و معادلة المماس .

10.

- (1)- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $3x^2 - 5x + 2 = 0$.
- (2)- ليكن كثير الحدود $f(x)$ المعروف بـ : $f(x) = 3x^3 - 8x^2 + 7x - 2$
(أ) - احسب: $f(2)$ ، $f(-2)$ ، $f(1)$ ثم ماذا تستنتج ؟
(ب) - حلل كثير الحدود $f(x)$.
(ج) - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ ثم المتراجحة : $f(x) \leq 0$
- (3)- نعتبر الدالة : g المعرفة بـ : $g(x) = \frac{2x-7}{x-3}$
(أ) - (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$
(ب) - اكتب $g(x)$ على الشكل $g(x) = a + \frac{b}{x-3}$ حيث a و b عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما
واستنتج رسم المنحنى (C_g) انطلاقاً من المنحنى الممثل للدالة مقلوب.
(ج) - لتكن النقطة $\Omega(3;2)$ أكتب معادلة (C_g) في المعلم الجديد $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$
ثم بين أن الدالة متناظرة بالنسبة لهذه النقطة.
(د) - فكك الدال g إلى مركب دالتين مرجعيتين U : V يطلب تعيينهما.
ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g انطلاقاً من اتجاه تغير الدالتين U : V

1 1

1- نعتبر كثير الحدود : $P(x) = 6x^3 + 5x^2 - 12x + 4$

(أ) بين أن العدد -2 جذرا لكثير الحدود $P(x)$.

(ب) استنتج تحليل $P(x)$ إلى جداء عاملين .

(ج) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $P(x) \leq 0$.

(2) أوجد كثير الحدود $g(x)$ من الدرجة الثالثة الذي يقبل الجذرين 2 و -3 ويحقق :

$$g(-1) = g(3) = 24$$

1 2

f و g دالتين معرفتين بـ :

$$g(x) = -x^2 + x + 2 \text{ و } f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}$$

(1) - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $g(x) = 0$ ثم عين إشارة g .

(2) - احسب: $f(1)$ ، $f(-1)$ ، $f(2)$.

(3) - اوجد f' مشتقة الدالة f .

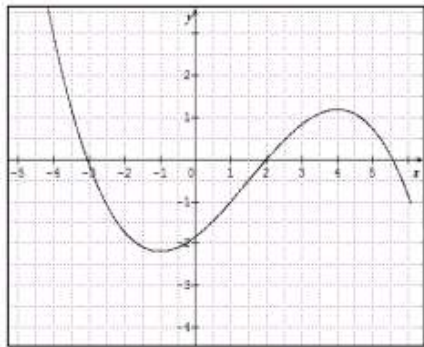
(3) - شكل جدول تغيرات الدالة f مع تعيين القيم الحدية.

(4) - عين معادلة المماس (Δ) عند النقطة التي فاصلتها 1.

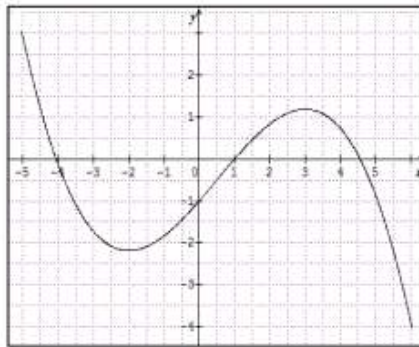
(5) - هل توجد نقطة M من (C_f) يكون المماس عندها موازي للمستقيم الذي

$$y = 2x + 1$$

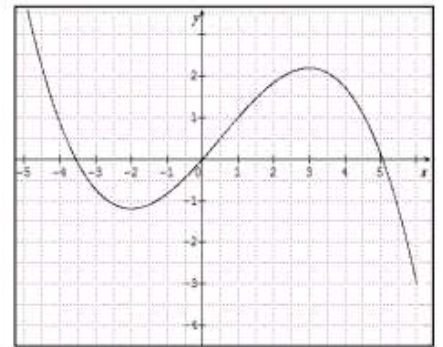
1 3



الشكل 3



الشكل 2



الشكل 1

الشكل 2 هو التمثيل البياني لدالة u معرفة على المجال $[-5; 6]$

f و g دالتين معرفتين كما يلي : $f(x) = u(x+a)$ ، $g(x) = u(x)+b$

1 عين التمثيلين البيانيين لكل من الدالتين f و g . 2 استنتج قيمة كل من a و b .

1 4

- ليكن كثير الحدود $P(x)$ ذات المجهول الحقيقي x حيث: $(E) \dots P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$...
- (1) أحسب $P(0)$ ، ماذا تستنتج؟
 - (2) برهن أن المعادلة (E) مكافئة للمعادلة (E') حيث: $(E') \dots \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$...
 - (3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E'') \dots u^2 + 2u = 3$...
 - (4) استنتج حلول المعادلة (E') .
 - (5) استنتج حلول المتباينة: $P(x) \leq 0$.
 - (6) دون حساب عين إشارة: $P(2016) \times P(1438) \times P(-\pi)$.

15

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

- ① عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .
- ② عين العددين a و b بحيث يكون من أجل كل $x \in D_f$ ، $f(x) = a + \frac{b}{x}$.
- ③ فكك الدالة f إلى مركب دالتين مرجعيتين u و v يطلب تعيينهما .
- ④ استنتج اتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$.
- ⑤ بين أنه يمكن الحصول على المنحنى (C_f) للدالة f انطلاقاً من المنحنى (Γ) الممثل للدالة مقلوب بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه .
- ⑥ أرسم المنحنى (C_f) .
- ⑦ تحقق أنه من أجل كل $x \in D_f$ فإن: $f(-x) + f(x) = 4$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

16

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 - 7x - 6$

1. تحقق أن العدد 2- جذراً للدالة f .
2. أثبت أن: $f(x) = (x+2).g(x)$ حيث: $g(x) = ax^2 + bx + c$ يطلب تعيينها .
3. أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) = (x-1)^2 - 4$ ، ثم استنتج أنه يمكن كتابة $g(x)$ على الشكل $(hok)(x)$. حيث h و k دالتان يطلب تعيينهما .
4. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) - g(1) \geq 0$ ، ثم استنتج أصغر قيمة ممكنة للدالة g .
5. حدد اتجاه تغير الدالة g على المجالين $]1; +\infty[$ و $]-\infty; 1[$ ثم شكل جدول تغيراتها .
6. أثبت أن (C_g) التمثيل البياني للدالة g يقطع محور الفواصل في نقطتين مختلفتين يطلب تعيين إحداثيهما .
7. أدرس إشارة الدالة g ، ثم استنتج إشارة الدالة f .
8. استنتج حلول المعادلتين: $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ ، $x\sqrt{x} - 7\sqrt{x} - 6 = 0$ ، ثم المتراجحة: $f(x) \leq 0$.
9. اشرح كيف يمكن استنتاج (C_g) انطلاقاً من التمثيل البياني للدالة مربع ، ثم انشئ (C_g) .
10. بين أن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر المنحنى (C_g) .

17

1 حل في مجموعة الأعداد الحقيقية R المعادلة : $3x^2 - 5x - 2 = 0$

2 نعتبر كثير الحدود $P(x) = 3x^3 - 11x^2 + 8x + 4$

• تحقق أن $x_0 = 2$ جذر لكثير الحدود $P(x)$

• اوجد الأعداد الحقيقية : a, b, c بحيث $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$

3 اوجد في مجموعة الأعداد الحقيقية R حلول المعادلة $P(x) = 0$ ثم استنتج حلول المتراجحة $P(x) \leq 0$

4 اكتب عبارة $P(y^2)$ ثم استنتج حلول المعادلة $y^2 = \frac{11y^4 - 4}{3y^4 + 8}$

18.

1. حل في مجموعة الأعداد الحقيقية R المعادلة : $x^2 - 5x + 6 = 0$

2. ليكن كثير الحدود $f(x)$ حيث : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

أ / احسب $f(1)$ ، $f(0)$ ، ثم $f(-1)$ ماذا تستنتج؟

ب / حل كثير الحدود $f(x)$

ج / حل في R المعادلة $f(x) = 0$ ثم المتراجحة : $(x - 1)(x^2 - 5x + 6) \geq 0$

هـ / احسب f' الدالة المشتقة للدالة f على R ثم اكتب معادلة المماس (d) للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0

3. ليكن $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

أ / حل في R المعادلة : $g(x) = 0$

ب / بين أن : $g(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$

4. لتكن الدالة h المعرفة على D_h بـ : $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

أ / اوجد D_h مجموعة تعريف الدالة h .

ب / أثبت أنه من أجل كل x من D_h فإن $h(x) = \frac{(x - 3)}{(x + 1)(x + 2)}$

ج / حل في R المتراجحة : $h(x) \leq 1$

19.

(1) احسب $(\sqrt{3} - 1)^2$ و $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

(2) حل في R المعادلتين : $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x = -\sqrt{6}$ و $4x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$

(3) استنتج حلول المعادلات التالية :

• $x - (\sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{x} + \sqrt{6} = 0$

• $\frac{100}{x^2} - \frac{10(1 + \sqrt{3})}{x} + \sqrt{3} = 0$

• استنتج حلول الجملة ذات المجهولين الحقيقيين α و β : $\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ \alpha\beta = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$ حيث : $(\alpha; \beta) \in R^2$

20.

1. نعتبر كثير الحدود $p(x)$ حيث : $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$
 1- تحقق أن 2 جذر لـ $p(x)$
 2- عين الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x فإن $p(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$
 3- حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$: المعادلة : $p(x) = 0$ و المتراجحة : $p(x) \geq 0$
 II. f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2 + x - 2$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$
- بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - f\left(-\frac{1}{2}\right) \geq 0$ ، ثم استنتج أصغر قيمة ممكنة للدالة f .
- بين أن الدالة f هي مركب من ثلاث دوال بسيطة يطلب تعيينها
- استنتج إتجاه تغير الدالة f على المجالين $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ و $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{1}{2}$ محور تناظر للمنحنى (C_f) .
- بين أنه يمكن استنتاج (C_f) إنطلاقاً من (C_k) التمثيل البياني لدالة مرجعية يطلب تعيينها ، ثم أرسم (C_f) و (C_k) في نفس المعلم
- g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = |f(x)|$
 a) أكتب $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.
 b) استنتج اتجاه تغير الدالة g .
 c) باستعمال الفرع a) حدد كيف يتم رسم (C_g) ثم أرسمه.
- نضع من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x) = f(|x|)$
 • أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x موجب : $h(x) = f(x)$.
 • أثبت أن الدالة h دالة زوجية.
 • أرسم (C_h) منحنى h باستعمال (C_f) منحنى الدالة f .

21.

- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (C_f) منحنى الدالة f المعرفة على $\square$ بـ :
 $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$
- 1/ حل في $\square$ المعادلة : $f(x) = 0$ ثم فسر النتائج هندسياً .
 - 2/ بين أن الدالة f زوجية في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - 3/ أنرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-2; 2]$ ثم شكل جدول تغيراتها.
 - 4/ علما ان : $0 \leq x \leq 2$ جد حصراً لـ $f(x)$.
 - 5/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .
 - 6/ جد معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $X_0 = \sqrt{3}$ ثم عين دون استخدام حاسبة $f(\sqrt{3} + 0.01)$.
 - 7/ أرسم المنحنى (C_f) .
 - 8/ لتكن h الدالة المعرفة على المجال $[-2; 2]$ بالشكل : $h(x) = |x^4 - 2x^2 - 3|$ وليكن (C_h) تمثيلها البياني اشرح كيف يمكن استنتاج انشاء (C_h) انطلاقاً من (C_f) ثم انشئ (C_h) في نفس المعلم .

① لتكن الدالة f المعرفة على i كما يلي : $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 2x + 2}$ حيث a و b عدنان حقيقيان .

عين العددين a و b حتى يشمل المنحنى (C_f) الممثل للدالة f النقطتين $A(2,0)$ و $B(0,2)$.

② نضع الآن $a = -4$ و $b = 4$

① تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x من i : $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 - 2x + 2}$

② بين أن النقطة $M_0(1,1)$ هي مركز تناظر المنحنى (C_f)

③ ① بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من i : $f'(x) = \frac{2x(x-2)}{(x^2 - 2x + 2)^2}$

② أ - استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

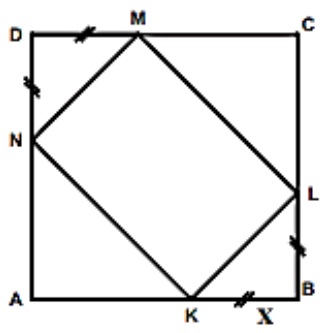
ب - عين حصرا للدالة f على المجال $[-1;3]$.

③ أ - أكتب معادلة المماس (Δ) عند النقطة M_0

ب - باستعمال التقريب التآلفي للدالة f أعط قيمة تقريبية للعددين $f(1,0003)$; $f(0,9993)$

③ نعرف الدالة g المعرفة على $u\{2\}$ كما يلي : $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-2)^2}$

♦ أحسب $g(x) \times f(x)$ استنتج اتجاه تغير الدالة g على $0; 2[$ (دون حساب لدالة g')



① g المعرفة على i كما يلي : $g(x) = 5x - x^2$

♦ عين عبارة g' ثم جدول إشارتها

② $ABCD$ مربع طول ضلعه $5cm$ نرسم المستطيل $KLMN$

حيث : $BK = BL = DM = DN = x$

نسمي $S(x)$ مساحة المستطيل $KLMN$

① أعط مجال تغير x ② أحسب بدلالة x طول الضلعين $[MN]$; $[ML]$

③ جد عبارة $S(x)$ ثم تحقق أن $S(x) = 2g(x)$

④ أعط جدول تغيرات الدالة S ; عين حينئذ قيمة x حتى تكون مساحة المستطيل $KLMN$ أكبر ما يمكن .

نسقي $p(x)$ كثير الحدود المعرف على $\mathbb{R}$ بـ : $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 19x + \lambda$ حيث λ عدد حقيقي.

1. أوجد قيمة λ حتى يكون -2 جذرا لـ $p(x)$.

2. فيما يلي نأخذ $\lambda = -6$ أي أن : $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 19x - 6$.

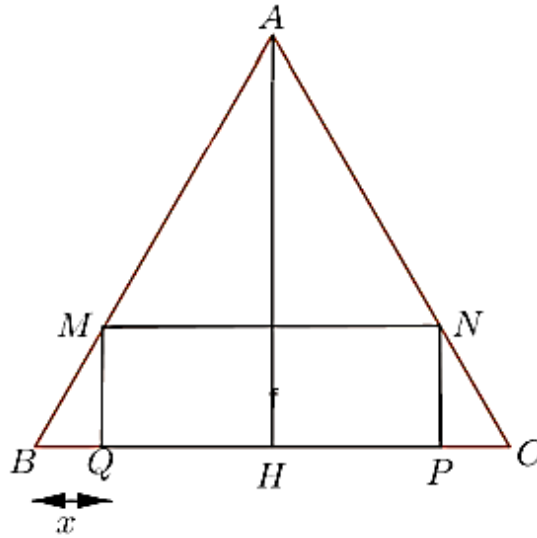
أ. احسب $p(3)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $p(x) = 0$.

ب. أدرس إشارة $p(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$ ثم استنتج حلول المتراجحة $p(x) < 0$.

ج. عين حلول المعادلة $p(2-x) = 0$ ثم استنتج تحليل لـ $p(2-x)$.

د. أدرس إشارة $p(2-x)$ ثم حل المتراجحة : $p(2-x) < 0$.

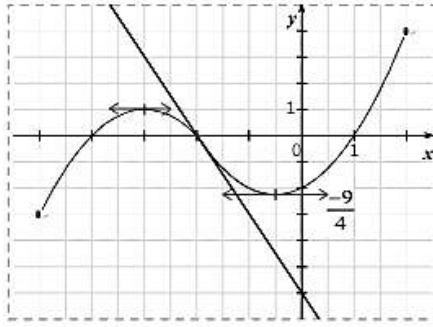
- ABC مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه 4 ، $MNPQ$ مستطيل داخل المثلث ABC ، نضع :
- $BQ = x$ ، و الدالة f ترفق بكل عنصر x مساحة المستطيل $MNPQ$.
- (1) أ- عيّن مجموعة قيم x أي مجموعة تعريف الدالة f .
 ب- أثبت أن: $MQ = \sqrt{3}x$
 ت- عيّن عبارة $f(x)$ مساحة المستطيل $MNPQ$ بدلالة x .
- (2) أ- أدرس اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها .
 ب- استنتج وضعية النقطة Q من أجل أن تكون مساحة المستطيل $MNPQ$ أكبر ما يمكن .
- (3) أ- أثبت أن المستقيم $\Delta: x=1$ محور تناظر (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 ب- أنشئ (C_f) .
 ت- أشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) المنحنى الممثل للدالة $g: x \mapsto f(x-2)+1$ انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه .



إختر الإجابة الصحيحة مع التعليل

السؤال	الإجابة (1)	الإجابة (2)	الإجابة (3)
f و g دالتان معرفتان على $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = x^4 - 1$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$	$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2}$	$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$	$(g \circ f)(x) = \sqrt{x+1}$
حلول المعادلة : $\sqrt{x+1} = 2x - 1$	$S = \{0\}$	$S = \{\frac{5}{4}\}$	$S = \emptyset$
حلول المتراجحة $\sqrt{x^2 - 1} \geq 2 - x$ في المجال $] -\infty; 2]$	$S =]-\infty; 1]$	$S = [1; 2]$	$S = [\frac{5}{4}; 2]$
f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = x^2 - 1$ فإن : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ تساوي	2	-2	-3

(I) المنحنى البياني التالي هو لدالة f قابلة للاشتقاق على $[-5; 2]$ في معلم متعامد وغير متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ يشمل النقطة $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$ ، وليكن (Δ) مماس المنحنى عند النقطة ذات الفاصلة -2 .



بقراءة بيانية:

(1) شكل جدول تغيرات الدالة f

(2) عين العدد المشتق للدالة f عند كل من العددين $\frac{-1}{2}$ و -2

(II) g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = \frac{6x}{(x^2+1)^2}$

(2) ادرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

(3) أكتب معادلة المماس لمنحنى الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة 1

(4) احسب $g(x) - 2$ ثم استنتج حصرا لـ : $g(x)$

28

I/ تكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^2 - x$

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x أن: $g(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$.

2/ فكك الدالة g إلى مركب دالتين يطلب تعيينهما .

3/ استنتج إتجاه تغير الدالة g على المجالين $]-\infty; \frac{1}{2}[$ و $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

4/ بين كيفية إنشاء المنحنى (C_g) من خلال التمثيل البياني للدالة $x \mapsto x^2$.

5/ نعتبر الدالة $h(x) = g(|x|)$. بين أن الدالة h زوجية ثم وضح كيفية إنشاء منحناها البياني .

II/ ليكن $P(x)$ كثير الحدود المعروف على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ: $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$

1/ تحقق أن $x_0 = 1$ جذر لـ $P(x)$.

2/ عين كثير الحدود $Q(x)$ بحيث : $P(x) = (x-1)Q(x)$.

3/ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $P(x) = 0$ والمترابحة $P(x) \geq 0$. ثم استنتج إشارة $P(\frac{2019}{2018})$.

III/ تكن الدالة f المعرفة على المجموعة $D_f[-2; -1[\cup]-1; 3]$ كمايلي : $f(x) = \frac{x^3 - x + 4}{x+1}$

1/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f أن : $f'(x) = \frac{(x-1)(2x^2+5x+5)}{(x+1)^2}$

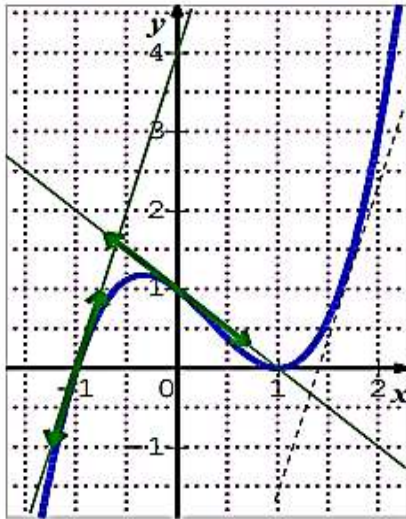
2/ استنتج إتجاه تغير الدالة f . ثم شكل جدول تغيراتها .

3/ عين دون حساب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ ثم فسر النتيجة بانيًا .

4/ أكتب معادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$

5/ أدرس إشارة الفرق : $[f(x) - g(x)]$

ثم استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المنحنى (C_g) الممثل للدالة g .



في الشكل المقابل ، C_f هو المنحني الممثل في معلم متعامد ومتجانس
لدالة f قابلة للاشتقاق على R ، والمماسان لـ C_f عند نقطتيه A و B ، فاصلتيهما -1 و 0 .

(1) بقراءة بيانية ، عَيِّن القيم $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(1)$

(2) $f'(-1)$ ، $f'(0)$ و $f'(1)$.

(3) حل بيانيا ، في المجال $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$:

أ) المعادلة $f(x) = 0$. ب) المعادلة $f'(x) = -1$.

ج) المتراجحة $f'(x) \geq 0$ د) المتراجحة $f'(x) \geq 4$.

4 . شكل جدول تغيرات الدالة f موضعا فيه إشارة المشتقة .

5. أدرس إشارة $f(x)$.

6. g و h دوال معرفة بـ : $h(x) = |f(x)|$ ، $g(x) = f(|x|)$

اشرح كيف نستنتج المنحنيين (C_h) و (C_g) انطلاقا من المنحني (C_f) ثم أنشئهما .

الجزء I و II منفصلين

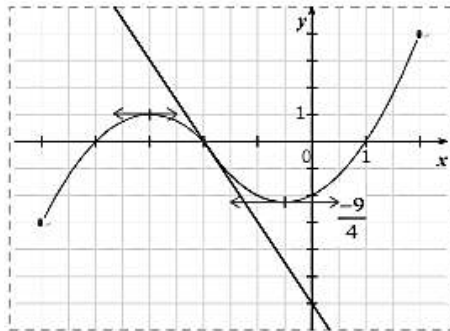
(I) المنحني البياني التالي هو لدالة f قابلة للاشتقاق على $[-5; 2]$ في معلم متعامد وغير متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ يشمل

النقطة $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$ ، وليكن (Δ) مماس المنحني عند النقطة ذات الفاصلة -2 .

بقراءة بيانية:

(1) شكل جدول تغيرات الدالة f

(2) عين العدد المشتق للدالة f عند كل من العددين $\frac{-1}{2}$ و -2



(II) دالة عددية معرفة على R بـ : $g(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$

(1) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = \frac{6x}{(x^2+1)^2}$

(2) ادرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

(3) أكتب معادلة المماس لمنحني الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة 1

(4) احسب $g(x) - 2$ ثم استنتج حصرا لـ : $g(x)$

- 1 - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $] -\infty; 9]$ بـ : $f(x) = x\sqrt{9-x}$
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
 1 - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $] -\infty; 9]$: $f'(x) = \frac{18-3x}{2\sqrt{9-x}}$

ب - ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

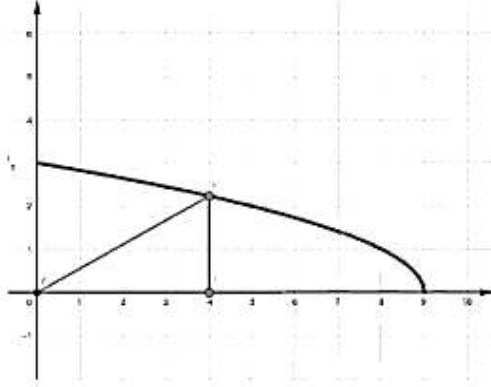
2 - عين أكبر قيمة تبلغها الدالة f على المجال $] -\infty; 9]$

3 - لتكن الدالة H المعرفة على $[-8; +\infty[$ بـ : $H(x) = f(1-x)$

أ - ادرس اتجاه تغير الدالة H على المجال $[-8; +\infty[$

ب - عين أحسن تقريب تآلفي للعدد $H(x)$ بجوار 1

ج - استنتج قيمة مقربة لـ $H(1,001)$



II - الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; 9]$

بـ : $g(x) = \sqrt{9-x}$ و (C_g) المنحنى البياني الممثل لها

كما هو مبين في الشكل

B نقطة من (C_g) و A مسقطها العمودي على حامل محور الفواصل

عين قيمة x حتى تكون مساحة الثلاث OAB أكبر ما يمكن ؛
 ثم احسب هذه المساحة

3 2

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد الحقيقية $\square$ كثير الحدود $p(x)$ حيث : $p(x) = x^3 + 3x + 4$

حل في $\square$ المعادلة : $p(x) = 0$. ثم ادرس حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $p(x)$.

(2) الدالة المعرفة على المجال $[-2; 2]$ بـ : $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس

(أ) - بين أنه من أجل كل العدد الحقيقي x من $[-2; 2]$: $f'(x) = \frac{x p(x)}{(x^2 + 1)^2}$. (f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

(ب) - شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-2; 2]$. استنتج من أجل كل x من $[-2; 2]$ حصرًا لـ $f(x)$

(ج) - أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1. ثم أنشئ (T) و (C_f)

(3) الدالة المعرفة على المجال $[-2; 2]$ بـ : $g(x) = |x| - \frac{|x| + 2}{x^2 + 1}$ ، (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس

(أ) - ادرس شفعية الدالة g

(ب) - باستعمال المنحنى (C_f) أذكر كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_g)

(ج) - شكل جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-2; 0]$ أنشئ المنحنى (C_g)

(3) الدالة المعرفة على $[0; \pi]$ بـ : $h(x) = \frac{\cos^3 x - 2}{\cos^2 x + 1}$

(أ) - بين أن الدالة h هي مركب دالتين يطلب تعيينهما

(ب) - احسب h' (h' هي الدالة المشتقة للدالة h) . استنتج اتجاه تغير الدالة h

3 3

نستقي f الدالة المعرفة على المجال $D = [-4; 4]$ بـ $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أيبين أنه من أجل كل x من D : $f'(x) = \frac{-4(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$.

ب. عيّن إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f على D .

2. يبين أن المنحنى (C) يقبل مماس وحيد معامل توجيهه 4.

3. يبين أن النقطة $\Omega(0; 1)$ مركز تناظر للمنحنى (C) .

4. أ. اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة Ω .

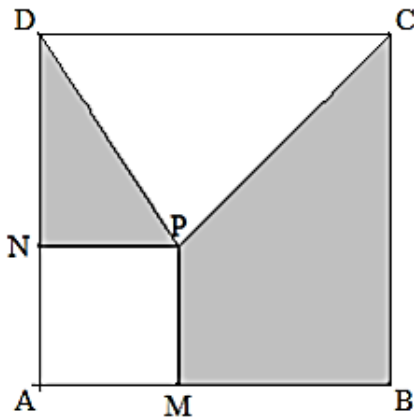
ب. ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y = 4x + 1$ ؛ ماذا تستنتج؟

5. يبين أن Ω هي نقطة الانعطاف الوحيدة للمنحنى (C) من أجل كل x من D .

6. أ. عيّن نقط تقاطع (C) مع حامل محور الفواصل.

ب. ارسم (T) و (C) بدقة.

3 4



في الشكل المقابل $ABCD$ مربع طول ضلعه 10 و $AMPN$ مربع طول ضلعه x

حيث x عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $I = [0; 10]$.

لنكن $S(x)$ مساحة الجزء الملون في الشكل.

(1) عبر عن مساحة المربع $AMPN$ ثم مساحة المثلث CPD بدلالة x .

(2) استنتج أنه من أجل كل x من I : $S(x) = -x^2 + 5x + 50$.

(3) عين قيمة x التي تكون من أجلها المساحة $S(x)$ أكبر ما يمكن.

(4) نريد تعيين قيم x التي تحقق المعادلة $S(x+1) - x[S(4x) + 2] = 0$ (E)

أ / بين أن (E) تكافئ $16x^3 - 21x^2 - 49x + 54 = 0$.

ب / تحقق أن العدد 2 حل للمعادلة (E).

ج / عين قيم x التي تحقق المعادلة (E).

3 5

نستقي $p(x)$ كثير الحدود المعرف على $\mathbb{R}$ بـ $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 19x + \lambda$ حيث λ عدد حقيقي.

1. أوجد قيمة λ حتى يكون -2 جذرا لـ $p(x)$.

2. فيما يلي نأخذ $\lambda = -6$ أي أن: $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 19x - 6$.

أ. احسب $p(3)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $p(x) = 0$.

ب. ادرس إشارة $p(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$ ثم استنتج حلول المتراجحة $p(x) < 0$.

ج. عيّن حلول المعادلة $p(2-x) = 0$ ثم استنتج تحليل لـ $p(2-x)$.

د. ادرس إشارة $p(2-x)$ ثم حل المتراجحة: $p(2-x) < 0$.

لتكن f الدالة المعرفة على أكبر مجموعة ممكنة D جزء من $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x+2}}$

1. بين أن : $D =]-\infty; -3] \cup]-2; +\infty[$.
2. بين أن : $f = g \circ h$ حيث g هي الدالة " الجذر التربيعي " ، و h دالة يطلب تعيينها .
3. عين D_h مجموعة تعريف الدالة h .
4. تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x من D لدينا : $h(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h على كل من المجالين $] -\infty; -2[$ ، $] -2; +\infty[$.
5. بين أن النقطة $\Omega(-2, 1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_h) الممثل للدالة h في معلم $(O, I; J)$.
6. حدد طريقة لرسم (C_h) انطلاقا من المنحنى البياني للدالة "مقلوب" $\left(k : x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ ، ثم أرسم (C_h) في معلم $(O, I; J)$.

(I) لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $]-2; 3[$ وقابلة للاشتقاق

على المجال $]-2; 3[$ بـ : $f(x) = x^2 - x - 2$

- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 1° أحسب $f'(x)$ ثم حدد اتجاه تغير الدالة f
 - 2° شكل جدول تغيرات الدالة f
 - 3° عدد حقيقي من المجال $]-2; 3[$ a
 - 4° أكتب معادلة لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة a
 - 5° استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') كل منهما يشمل النقطة $G\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$
 - 6° أكتب معادلة كل من (Δ) و (Δ')

4° عين احداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامي محوري الاحداثيات

5° أرسم (Δ) ، (Δ') و (C_f)

(II) ليكن (P) القطع المكافئ الذي معادلته $y = x^2$

A ، B نقطتان من (P) فاصلتيهما -1 ، 2 على الترتيب

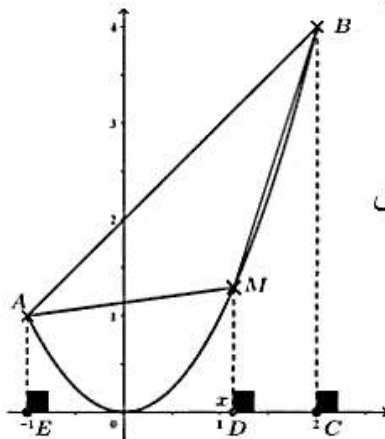
و M نقطة متحركة على (P) فاصلتها x حيث : $-1 \leq x \leq 2$ الشكل المقابل

نسمي $S(x)$ مساحة المثلث AMB

1° أحسب بدلالة x مساحة كلا من الرباعيين $AMDE$ ، $DMBC$

2° بين أنه من أجل كل x من المجال $[-1; 2]$: $S(x) = -\frac{3}{2}f(x)$

3° استنتج موضع النقطة M التي تكون من اجلها $S(x)$ أكبر ما يمكن



الجزء الأول:

ليكن p كثير حدود حيث : $p(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x - 3$

- 1- أثبت أن $\alpha = 1$ جذر لكثير الحدود $p(x)$
- 2- عين كثير الحدود $d(x)$ حيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $p(x) = d(x)(x - 1)$

3- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $p(x) = 0$

4- شكل جدول إشارة $p(x)$ ثم استنتج حلول المتراجحة $-4x^2 + 3x + 4 \leq \frac{3}{x}$

الجزء الثاني :

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x + 7$
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- 1- عين f' مشتقة الدالة f .
- 2- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- 3- عين معادلة المستقيم (Δ) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
- 4- عين عدد نقط (C_f) التي يكون فيها معامل توجيه المماس يساوي -3 .

39

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(I)

- 1- أحسب $f(1)$ ثم أكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ حيث a, b, c أعداد حقيقية يطلب تعيينها .
- 2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ و أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة .
- 3- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $f(x) > 0$ و أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة .

(II)

- 1- بين لماذا (C_f) يقبل مماسا عند كل نقطة منه ؟
- 2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f'(x) = 0$ حيث f' الدالة المشتقة للدالة f وفسر بيانيا النتيجة السابقة .
- 3- عين النقط من (C_f) التي يكون فيها معامل توجيهه المماس يساوي 3 .
- 4- ليكن (D) مستقيم معادلته $y = mx + d$ حيث m و d عدنان حقيقيان .
ناقش حسب قيم m وجود مماسات للمنحنى (C_f) تكون فيها موازية للمستقيم (D) ؟



تمارين هذه السلسلة هي تمارين لفروض و امتحانات سابقة

شكر خاص للأساتذة أصحاب العمل