



السلسلة رقم [04]

[الاحتمالات]



سنة
ثانية
ثانوي

إعداد الأستاذ:
قويسم الخليل

السلسلة رقم 04 - الاحتمالات

المستوى: ثانوية ثانوي - شعبة علوم

الأستاذ: قويسم الخليل

الاسم واللقب:

قسم:

التمرين 01:

صندوق به 9 بطاقات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس، مكتوب على كل منها سؤال واحد:

◀ ثلاثة أسئلة في الاحتمالات مرقمة ب: 1، 2 و 3

◀ أربعة أسئلة في الاشتقاقية مرقمة ب: 1، 2، 3 و 4

◀ وسؤالين في الدوال مرقمين ب: 1 و 2

نسحب عشوائيا بطاقة واحدة من الصندوق ونعتبر الحوادث التالية:

◀ A: "سحب سؤال في الاحتمالات"

◀ B: "سحب سؤال في الدوال"

◀ C: "سحب سؤال في الاشتقاقية يحمل رقما زوجيا"

1 احسب $p(A)$ و $p(B)$ و $p(C)$ احتمال A، B و C على الترتيب

2 احسب احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن الـ 1

3 نعتبر المتغير العشوائي X يرفق بكل بطاقة مسحوبة رقم السؤال المسجل عليها

أ- برّر أن مجموعة قيم X هي $\{1; 2; 3; 4\}$

ب- عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب $E(X)$ أمله الرياضي

ج- استنتج قيمة $E(2023 + 2024X)$

التمرين 02:

كيس به 7 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس. منها 3 بيضاء و 4 خضراء. نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين

من الكيس

(I)

1 احسب احتمال الحادثة A: "سحب كريتين مختلفتين في اللون"

2 احسب احتمال الحادثة B: "سحب كريتين من نفس اللون"

(II) نقترح اللعبة التالية: للمشاركة يدفع اللاعب

$\alpha(DA)$ عدد طبيعي معطى و DA تعني دينار

جزائري

فإذا سحب كريتين بيضاوين يتحصل على 100DA

وإذا سحب كريتين مختلفتين في اللون يتحصل على

50DA، وإذا سحب كريتين خضراوين يخسر ما

دفعه، وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل الربح

أو خسارة اللاعب بدلالة α

1 برّر أن قيم المتغير العشوائي هي:

$$\{-\alpha; 50 - \alpha; 100 - \alpha\}$$

ثم عرّف قانون احتماله

2 أ- بين أن الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

$$E(X) = -\alpha + \frac{300}{7}$$

ب- جد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة

في صالح اللاعب

التمرين 03:

كيس به 12 كرية متماثلة لا نفرق بينها باللمس. كل

من الكريات الاثني عشر تحمل رقما من بين الأعداد

التالية: 1، 2، 3، 4

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس

نرمز بـ: p_i إلى احتمال سحب كرية رقمها i

$$\text{حيث: } p_4 = \frac{1}{4}, p_3 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{6}, p_1 = \frac{1}{3}$$

1 وزع الكريات الاثني عشر حسب الأرقام 1، 2، 3، 4

2 احسب احتمال كل من الحوادث A، B و C حيث:

A: "سحب كرية تحمل رقما فرديا"

B: "سحب كرية تحمل رقما أوليا"

C: "سحب كرية رقمها حل للمعادلة $x^2 = 2^x$ "

3 نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب

لكرية الرقم الذي تحمله

- عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X، ثم احسب

$E(X)$ أمله الرياضي

التمرين 04:

1 كيس به 7 كريات متماثلة منها ثلاثة سوداء تحمل

الأرقام: 0، 3 و 5 وثلاثة حمراء تحمل الأرقام 1، 3 و 7

وكرية خضراء تحمل الرقم 3، نسحب عشوائيا على

التوالي وبدون ارجاع كريتان من الكيس

أ- عيّن بواسطة مخطط عدد عناصر مجموعة

الإمكانات Ω

أن تكون الإجابة خاطئة يساوي احتمال عدم الإجابة عن

السؤال

1 مثل هذه التجربة على شجرة الاحتمالات

2 احسب احتمال الحوادث التالية:

A: "أن يجيب التلميذ على السؤالين"

B: "ألا يجيب التلميذ على السؤال الثاني فقط"

C: "يجيب التلميذ إجابة واحدة صحيحة على الأكثر"

(II) يتحصل التلميذ على (+2) لكل إجابة صحيحة وعلى

(-1) لكل إجابة خاطئة، وفي حالة عدم الإجابة

يتحصل على (0).

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق لكل مخرج مجموع

النقاط المتحصل عليها. وإذا كان $X < 0$ يحصل التلميذ

على 0

1 ماهي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X

2 عرّف قانون الاحتمال X

3 احسب الأمل الرياضي $E(X)$ ، ماذا تستنتج؟



تذكر تلميذي العزيز أن: جذور التعليم مريرة... لكن

ثمارها حلوة

بالتوفيق جميعا

ب- احسب احتمال الحوادث التالية:

◀ الحادثة A: "سحب كريتان مختلفتان في اللون"

◀ الحادثة B: "سحب كريتان تحملان نفس الرقم"

◀ الحادثة C: "سحب كرية حمراء على الأكثر"

◀ الحادثة D: "سحب كرية سوداء على الأقل"

◀ الحادثة E: "سحب كريتان مجموع رقميهما

مضاعف لـ 3"

- الحادثة F: "سحب كريتان لهما نفس اللون"

2 ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب

"عدد الكريات السوداء المسحوبة"

أ- عيّن مجموعة قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرّف

قانون احتماله

ب- احسب الأمل الرياضي، التباين والانحراف للمتغير

العشوائي X

3 ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب

"القيمة المطلقة للفرق بين رقمي الكريتان

المسحوبتان"

أ- عيّن مجموعة قيم المتغير العشوائي Y ، ثم عرّف

قانون احتماله

ب- احسب الأمل الرياضي، التباين والانحراف للمتغير

العشوائي Y

التمرين 05:

نرمي زهر نرد غير مزيف ذو خمس أوجه مرقم من 1 إلى 5،

المرّة الأولى نسجل الرقم α ثم نرميه مرّة ثانية ونسجل

الرقم β

1 احسب احتمال الحدثين التاليين:

◀ A: "الرقمان α و β يحققان المساواة $\alpha - \beta = \beta$ "

◀ B: "الرقمان α و β يحققان المتباينة $|\alpha - \beta| \leq 1$ "

2 X هو المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رميتين

بالبعد $|\alpha - \beta|$

- عيّن القيم الممكنة لـ X ، ثم أكتب قانون

احتماله

3 نكتب الآن بالرقمين α و β المعادلة:

$$(E): x^2 + \alpha x + \beta = 0$$

ونعتبر المتغير العشوائي Y الذي يرفق بكل رميتين

عدد حلول المعادلة (E)

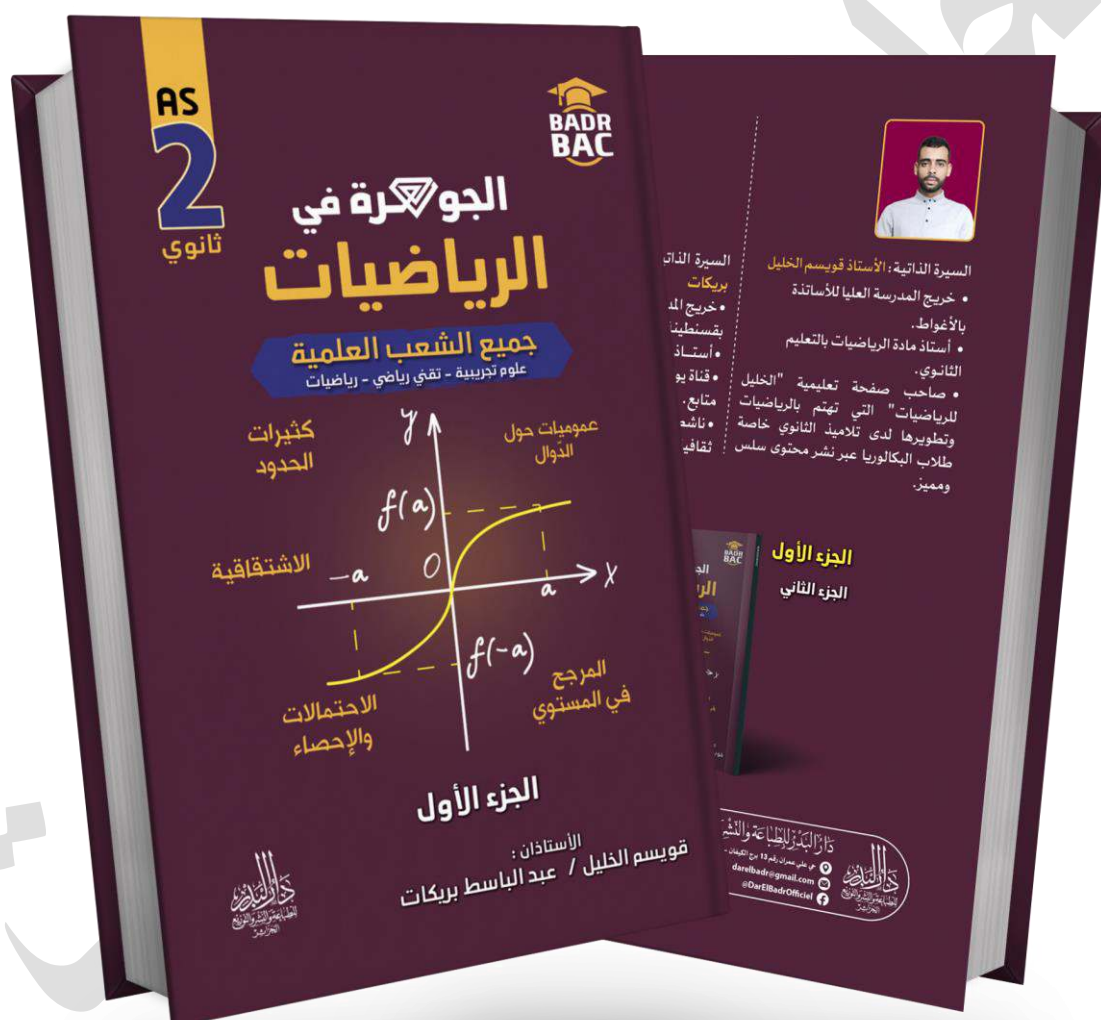
- عيّن القيم الممكنة لـ Y ، ثم أكتب قانون احتماله

التمرين 06 (شجرة الاحتمالات)

(I) اقترح أستاذ على تلاميذ استجواب متكون من سؤالين،

وا احتمال أن يجيب التلميذ إجابة صحيحة هو $\frac{1}{2}$ واحتمال

لمزيد من التمارين حول محور الاحتمالات
اغتنى هذا الكتاب
كتاب الجوهرة في الرياضيات
الذي يحتوي على أكثر من 30 تمرين محلول بالتفصيل
في كل وحدة من وحدات السنة الثانية ثانوي.



إجابات مختصرة للسلسلة رقم 04

الاحتمالات

المستوى: ثانوية شعبة علوم  الأستاذ: قويسم الخليل

التمرين 01

1 حساب $p(A)$ و $p(B)$ و $p(C)$:

$$p(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad p(B) = \frac{2}{9} \quad p(C) = \frac{2}{9} \quad \square$$

2 حساب احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن ال 1:

$$p(D) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

3 التبرير أن مجموعة قيم X هي $\{1; 2; 3; 4\}$:

لدينا أسئلة الاحتمالات مرقمة من 1 إلى 3

وأسئلة الاشتقاق مرقمة من 1 إلى 4

وأسئلة الدوال مرقمة من 1 إلى 2

إذن مجموعة قيم X هي: $\{1; 2; 3; 4\}$

أ- تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

- حساب $E(X)$:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{3}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{2}{9} + 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{19}{9} \approx 2.1$$

ب- استنتاج قيمة $E(2024X + 1445)$:

$$E(2023 + 2024X) = 2024E(X) + 2023 = 2024 \cdot \frac{19}{9} + 2023 = \frac{56663}{9}$$

التمرين 02

1 حساب احتمال الحدث A و B

	B	B	B	V	V	V	V
B		BB	BB	VB	VB	VB	VB
B			BB	VB	VB	VB	VB
B				VB	VB	VB	VB
V					VV	VV	VV
V						VV	VV
V							VV
V							

$$P(A) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

$$p(B) = 1 - p(A) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

2

أ- تبرير أن قيم المتغير العشوائي هي $\{100 - \alpha; 50 - \alpha; -\alpha\}$:

اللاعب يدفع $a(DA)$ ثم يسحب كرتين:

إذا سحب كرتين بيضاوين يربح $100DA$

ومنه: $X = 100 - \alpha$

إذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يربح $50DA$

ومنه: $X = 50 - \alpha$

وإذا سحب سحب كرتين خضراوين يخسر ما دفعه

ومنه: $X = -\alpha$

وعليه قيم المتغير العشوائي هي: $\{100 - \alpha; 50 - \alpha; -\alpha\}$

- تعريف قانون احتمال X :

x_i	$100 - \alpha$	$50 - \alpha$	$-\alpha$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

3 تبين أن $E(X) = -\alpha + \frac{300}{7}$:

$$E(X) = (100 - \alpha) \cdot \frac{1}{7} + (50 - \alpha) \cdot \frac{4}{7} + (-\alpha) \cdot \frac{2}{7}$$

$$= \frac{100 - \alpha + 200 - 4\alpha - 2\alpha}{7}$$

$$= \frac{300 - 7\alpha}{7} = -\alpha + \frac{300}{7}$$

- إيجاد أكبر قيمة ممكنة لـ α :

تكون اللعبة في صالح اللاعب لـ: $E(X) > 0$

$$-\alpha + \frac{300}{7} > 0$$

ومنه: $\alpha < 42.85$

وعليه: $\alpha = 42DA$

التمرين 03

1 توزيع الكريات الاثني عشر حسب الأرقام 1، 2، 3، 4:

$$p_1 = \frac{1}{3} = \frac{4}{12} \quad \text{معناه: يوجد 4 كرات تحمل الرقم 1}$$

$$p_2 = \frac{1}{6} = \frac{2}{12} \quad \text{معناه: يوجد 2 كرات تحمل الرقم 2}$$

$$p_3 = \frac{1}{4} = \frac{3}{12} \quad \text{معناه: يوجد 3 كرات تحمل الرقم 3}$$

$$p_4 = \frac{1}{4} = \frac{3}{12} \quad \text{معناه: يوجد 3 كرات تحمل الرقم 4}$$

2 حساب احتمال كل من الحوادث A ، B و C :

$$p(A) = \frac{7}{12}$$

$$p(B) = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$$

$$p(C) = \frac{2}{12}$$

3 تعيين مجموعة قيم المتغير العشوائي X :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$

$$\begin{aligned} \blacksquare V(X) &= \sum_{i=1}^3 (x_i)^2 p_i - (E(X))^2 \\ &= \left[(0)^2 \left(\frac{2}{7}\right) + (1)^2 \left(\frac{4}{7}\right) + (2)^2 \left(\frac{1}{7}\right) \right] - \left(\frac{6}{7}\right)^2 \\ &= \frac{2}{7} \\ \blacksquare \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{7}} \end{aligned}$$

- حساب $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^4 x_i p_i = 1 \cdot \frac{4}{12} + 2 \cdot \frac{2}{12} + 3 \cdot \frac{3}{12} + 4 \cdot \frac{3}{12} \\ &= \frac{4 + 4 + 9 + 12}{12} = \frac{29}{12} \end{aligned}$$

التمرين 04:

1

أ- تعيين بواسطة مخطط عدد عناصر Ω :

	B_0	B_3	B_5	R_1	R_3	R_7	G_3
B_0		$B_3 B_0$	$B_5 B_0$	$R_1 B_0$	$R_3 B_0$	$R_7 B_0$	$G_3 B_0$
B_3	$B_0 B_3$		$B_5 B_3$	$R_1 B_3$	$R_3 B_3$	$R_7 B_3$	$G_3 B_3$
B_5	$B_0 B_5$	$B_3 B_5$		$R_1 B_5$	$R_3 B_5$	$R_7 B_5$	$G_3 B_5$
R_1	$B_0 R_1$	$B_3 R_1$	$B_5 R_1$		$R_3 R_1$	$R_7 R_1$	$G_3 R_1$
R_3	$B_0 R_3$	$B_3 R_3$	$B_5 R_3$	$R_1 R_3$		$R_7 R_3$	$G_3 R_3$
R_7	$B_0 R_7$	$B_3 R_7$	$B_5 R_7$	$R_1 R_7$	$R_3 R_7$		$G_3 R_7$
G_3	$B_0 G_3$	$B_3 G_3$	$B_5 G_3$	$R_1 G_3$	$R_3 G_3$	$R_7 G_3$	

ومنه: عدد امكانيات هاته التجربة هو 42

ب- حساب احتمال الحواث التالية:

$$\begin{aligned} \blacksquare P(B) &= \frac{6}{42} = \frac{1}{7} \\ \blacksquare P(D) &= \frac{30}{42} = \frac{5}{7} \\ \blacksquare P(F) &= \frac{12}{42} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare P(A) &= \frac{30}{42} = \frac{5}{7} \\ \blacksquare P(C) &= \frac{36}{42} = \frac{6}{7} \\ \blacksquare P(E) &= \frac{16}{42} = \frac{8}{21} \end{aligned}$$

2

أ- تعيين مجموعة قيم المتغير العشوائي X :

لدينا: $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ حيث:

	B_0	B_3	B_5	R_1	R_3	R_7	G_3
B_0	/	$B_3 B_0$	$B_5 B_0$	$R_1 B_0$	$R_3 B_0$	$R_7 B_0$	$G_3 B_0$
B_3	$B_0 B_3$	/	$B_5 B_3$	$R_1 B_3$	$R_3 B_3$	$R_7 B_3$	$G_3 B_3$
B_5	$B_0 B_5$	$B_3 B_5$	/	$R_1 B_5$	$R_3 B_5$	$R_7 B_5$	$G_3 B_5$
R_1	$B_0 R_1$	$B_3 R_1$	$B_5 R_1$	/	$R_3 R_1$	$R_7 R_1$	$G_3 R_1$
R_3	$B_0 R_3$	$B_3 R_3$	$B_5 R_3$	$R_1 R_3$	/	$R_7 R_3$	$G_3 R_3$
R_7	$B_0 R_7$	$B_3 R_7$	$B_5 R_7$	$R_1 R_7$	$R_3 R_7$	/	$G_3 R_7$
G_3	$B_0 G_3$	$B_3 G_3$	$B_5 G_3$	$R_1 G_3$	$R_3 G_3$	$R_7 G_3$	/

ومنه:

X	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7} = \frac{12}{42}$	$\frac{4}{7} = \frac{24}{42}$	$\frac{1}{7} = \frac{6}{42}$

ب- حساب الأمل الرياضي، التباين والانحراف للمتغير العشوائي X :

$$\begin{aligned} \blacksquare E(X) &= \sum_{i=1}^3 x_i p_i = (0) \left(\frac{2}{7}\right) + (1) \left(\frac{4}{7}\right) + (2) \left(\frac{1}{7}\right) \\ &\approx 0.85 \end{aligned}$$

أ- تعيين مجموعة قيم المتغير العشوائي Y :

$$Y(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$$

- قانون احتمال Y :

	B_0	B_3	B_5	R_1	R_3	R_7	G_3
B_0		3	5	1	3	7	3
B_3	3		2	2	0	4	0
B_5	5	2		4	2	2	2
R_1	1	2	4		2	6	2
R_3	3	0	2	2		4	0
R_7	7	4	2	6	4		4
G_3	3	0	2	2	0	4	

ومنه:

Y	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(Y = y_i)$	$\frac{6}{42}$	$\frac{2}{42}$	$\frac{14}{42}$	$\frac{6}{42}$	$\frac{8}{42}$	$\frac{2}{42}$	$\frac{2}{42}$	$\frac{2}{42}$

ب- حساب الأمل الرياضي، التباين والانحراف للمتغير العشوائي Y :

$$\begin{aligned} \blacksquare E(Y) &= \sum_{i=1}^8 y_i p_i = \frac{(0)1}{7} + \frac{(1)1}{21} + \dots + \frac{(6)1}{21} + \frac{(7)1}{21} \\ &= \frac{58}{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare V(Y) &= \sum_{i=1}^8 (y_i)^2 p_i - (E(Y))^2 \\ &= \left[(0)^2 \left(\frac{1}{7}\right) + (1)^2 \left(\frac{1}{21}\right) + \dots + (7)^2 \left(\frac{1}{21}\right) \right] - \left(\frac{58}{21}\right)^2 \\ &= \frac{1466}{441} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{3.32} \approx 1.82$$

التمرين 05:

$\alpha \backslash \beta$	1	2	3	4	5
1	(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)	(4; 1)	(5; 1)
2	(1; 2)	(2; 2)	(3; 2)	(4; 2)	(5; 2)
3	(1; 3)	(2; 3)	(3; 3)	(4; 3)	(5; 3)
4	(1; 4)	(2; 4)	(3; 4)	(4; 4)	(5; 4)
5	(1; 5)	(2; 5)	(3; 5)	(4; 5)	(5; 5)

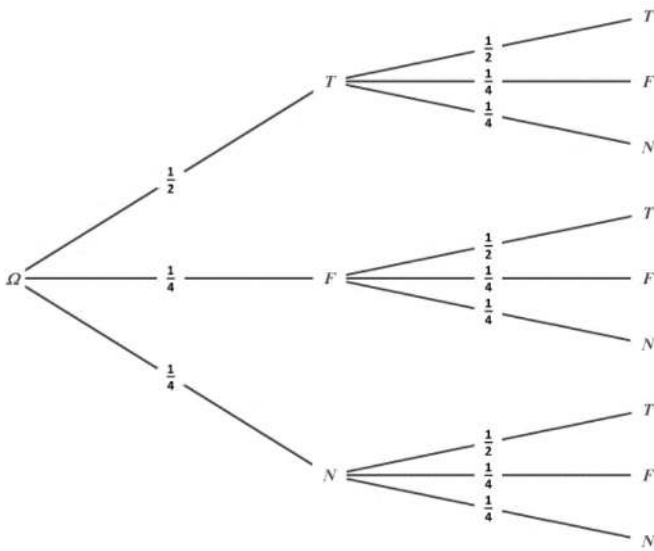
مجموع الإمكانيات هو 25

4 حساب احتمال الحدثين التاليين:

• A: "الرقان α و β يحققان المساواة $\alpha - \beta = \beta$ ":

لدينا: $\alpha - \beta = \beta$ معناه $\alpha = 2\beta$

الإمكانيات التي تحقق المساواة " $\alpha = 2\beta$ " هي (2; 1)، (4; 2)



② حساب احتمال الحواث التالية:

- $P(A) = P(T \cap T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- $P(B) = P(T \cap N) + P(F \cap N) + P(N \cap N)$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$
- $P(C) = P(T \cap T) + P(T \cap F) + P(T \cap N) + P(F \cap T) + P(N \cap T)$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

(II)

① القيم الممكنة للمتغير العشوائي X :

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 4\}$$

② تعريف قانون الاحتمال X :

x_i	0	1	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

③ حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

• لدينا $E(X) > 0$ ومنه: نستنتج أن احتمال تحصيل التلميذ على نقاط جيدة كبير

تذكر تلميذي العزيز أن: جكور التعليم مبررة... لكن ثمارها حلوة بالتوفيق جميعا

$$p(A) = \frac{2}{25}$$

• $B: \alpha \text{ و } \beta \text{ يحققان المتباينة } |\alpha - \beta| \leq 1$:

نملا الجدول بـ $|\alpha - \beta|$ ثم نلاحظ القيم التي تحقق $|\alpha - \beta| \leq 1$

$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4	5
1	0	1	2	3	4
2	1	0	1	2	3
3	2	1	0	1	2
4	3	2	1	0	1
5	4	3	2	1	0

$$p(B) = \frac{13}{25}$$

⑤ تعيين القيم الممكنة لـ X ، ثم كتابة قانون احتماله:

قيم المتغير العشوائي X هي: $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{25}$

⑥ تعيين القيم الممكنة لـ Y ، ثم كتابة قانون احتماله:

$$\Delta = \alpha^2 - 4\beta$$

لدينا: $\Delta > 0$ للمعادلة حلين،

لدينا: $\Delta = 0$ للمعادلة حل وحيد،

لدينا: $\Delta < 0$ للمعادلة لا تقبل حولا

ومنه قيم Y هي: $Y(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

نملا الجدول السابق بقيم $\alpha^2 - 4\beta$:

$\alpha \backslash \beta$	1	2	3	4	5
1	-3	0	5	12	21
2	-7	-4	1	8	17
3	-11	-3	-3	4	13
4	-15	-12	-7	0	9
5	-19	-16	-11	-4	5

ومنه

x_i	0	1	2
$p(Y = x_i)$	$\frac{13}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{10}{25}$

التمرين 06:

(I)

① تمثيل هذه التجربة على شجرة الاحتمالات:

نحسب أولا احتمال الإجابة الخاطئة:

نضع x احتمال الإجابة الخاطئة أو عدم الإجابة على السؤال

$$\sum p_i = 1 \quad \text{لدينا:}$$

$$\frac{1}{2} + x + x = 1 \quad \text{معناه:}$$

$$x = \frac{1}{4} \quad \text{ومنه:}$$

نضع: T : إجابة صحيحة، F : إجابة خاطئة، N : عدم الإجابة