



## الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

# تمارين مع الحل في المتتاليات العددية

# 9

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 02 / 03

نعتبر  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n \end{cases}$$

① احسب الحدود  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$ .

② نعتبر المتتاليتين  $(v_n)$  و  $(w_n)$  المعرفتان كما يلي:

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$$

$$w_n = \ln(v_n)$$

① برهن أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول  $v_0$ .

② اكتب بدلالة  $n$  عبارة الحد العام للمتتالية  $(v_n)$  ثم استنتج عبارة  $(u_n)$  بدلالة  $n$ .

③ بين أن  $(w_n)$  متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول، ثم اكتب عبارة حدها العام.

④ اكتب بدلالة  $n$  المجموعين  $S_n$  و  $S'_n$  حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$S'_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$$

⑤ استنتج بدلالة  $n$  الجداء  $P_n$  حيث:

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$$

① حساب الحدود  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$ :

- $u_{0+1} = 2u_0 + 2(0)^2 - (0) \Rightarrow u_1 = 2(1)$   
 $\Rightarrow \boxed{u_1 = 2}$
- $u_{1+1} = 2u_1 + 2(1)^2 - (1) \Rightarrow u_2 = 2(2) + 2 - 1$   
 $\Rightarrow \boxed{u_2 = 5}$
- $u_{2+1} = 2u_2 + 2(2)^2 - (2) \Rightarrow u_3 = 2(5) + 8 - 2$   
 $\Rightarrow \boxed{u_3 = 16}$

②

① برهان أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية:

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5 \\ &= 2u_n + 2n^2 - n + 2n^2 + 2 + 4n + 3n + 3 + 5 \\ &= 2u_n + 4n^2 + 6n + 10 \\ &= 2(u_n + 2n^2 + 3n + 5) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 + 2(0)^2 + 3(0) + 5 \\ &= 1 + 5 \\ &= 6 \end{aligned}$$

ومنه  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول 6  $v_0 = 6$

② كتابة بدلالة  $n$  عبارة الحد العام للمتتالية  $(v_n)$ :

$$v_n = v_0 \times q^n \Rightarrow \boxed{v_n = 6 \times 2^n}$$

- استنتاج عبارة  $(u_n)$  بدلالة  $n$ :

$$\begin{aligned} v_n &= u_n + 2n^2 + 3n + 5 \Rightarrow u_n = v_n - 2n^2 - 3n - 5 \\ &\Rightarrow \boxed{u_n = 6 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5} \end{aligned}$$

③ تبين أن  $(w_n)$  متتالية حسابية:

لدينا:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \ln(v_{n+1}) \\ &= \ln(6 \times 2^{n+1}) \\ &= \ln(6 \times 2^n \times 2) \\ &= \ln(v_n \times 2) \\ &= \ln(v_n) + \ln(2) \\ &= w_n + \ln(2) \end{aligned}$$

ولدينا:

$$w_0 = \ln(v_0) \\ = \ln(6)$$

ومنه ( $w_n$ ) متتالية حسابية أساسها  $\ln(2)$  وحدها الأول  $\ln(6)$ .  
اذن:

$$w_n = w_0 + n \times r \Rightarrow w_n = \ln(6) + n \ln(2)$$

④ كتابة بدلالة  $n$  المجموعين  $S_n$  و  $S'_n$ :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ = v_0 \left( \frac{1 - q^{(\text{مجموع الحدود})}}{1 - q} \right) \\ = 6 \left( \frac{1 - 2^{n-0+1}}{1 - 2} \right) \\ = -6(1 - 2^{n+1}) \\ = \boxed{6(2^{n+1} - 1)}$$

$$S'_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n \\ = \frac{1}{2} (\text{مجموع الحدود}) (w_0 + w_n) \\ = \frac{1}{2} (n - 0 + 1)(\ln 6 + \ln 6 + n \ln 2) \\ = \frac{n + 1}{2} (\ln(6 \times 6) + \ln 2^n) \\ = \boxed{\frac{n + 1}{2} \ln(36 \times 2^n)}$$

⑤ استنتاج بدلالة  $n$  الجداء  $P_n$ :

لدينا:

$$w_n = \ln(v_n) \Rightarrow v_n = e^{w_n}$$

ومنه:

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n \\ = e^{w_0} \times e^{w_1} \times \dots \times e^{w_n} \\ = e^{w_0 + w_1 + \dots + w_n} \\ = \boxed{e^{S'_n}}$$

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶