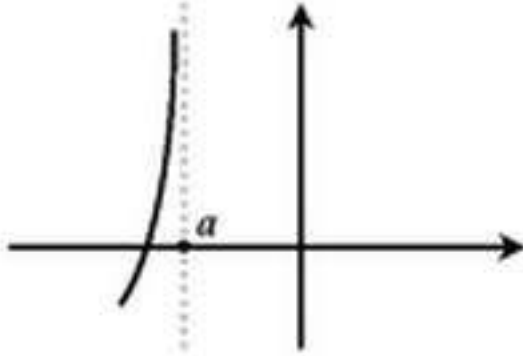
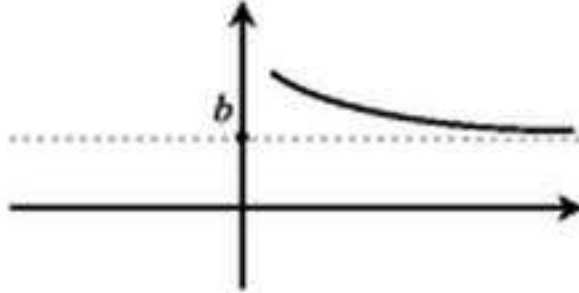


دراسة الفروع اللانهائية



$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (المنحني $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f يقبل
مستقيما مقاربا يوازي $(O, \vec{j})$ معادلته $x = a$)

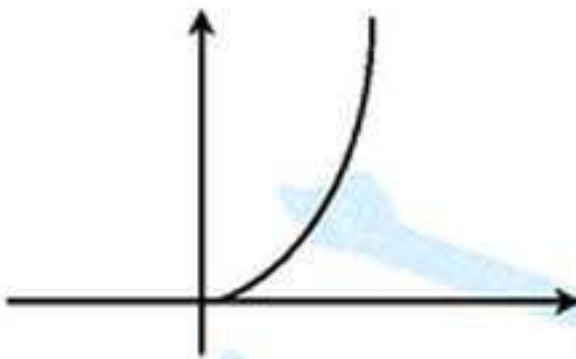


$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ (المنحني $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f يقبل
مستقيما مقاربا يوازي $(O, \vec{i})$ معادلته $y = b$)

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ (يُحتمل أن يقبل المنحني $(\mathcal{C})$ مستقيما مقاربا
مائلا معادلته $y = ax + b$ ، لذلك نحسب $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

فرع قطع مكافئ باتجاه $(O, \vec{j})$



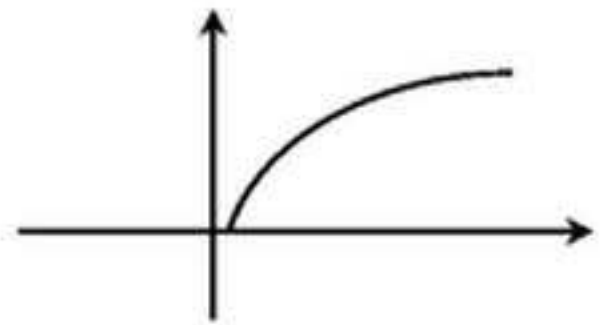
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$$



نحسب $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$

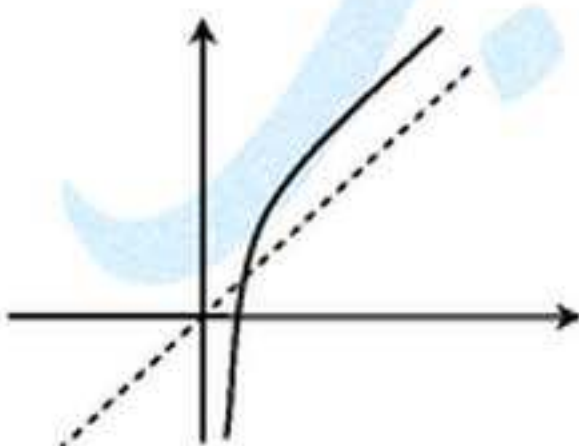
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

فرع قطع مكافئ باتجاه $(O, \vec{i})$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \infty$$

فرع قطع مكافئ باتجاه $y = ax$

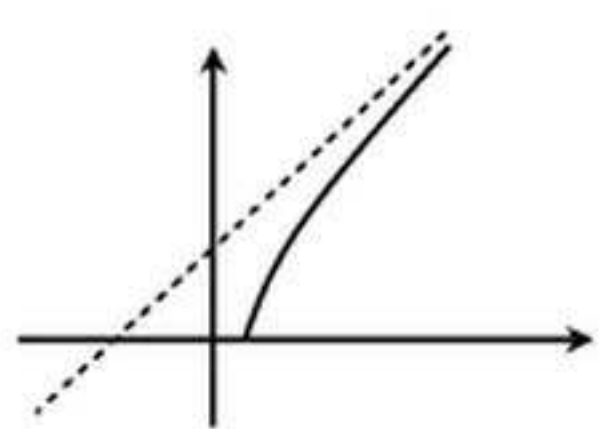


$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax - b] = 0$$

مستقيم مقارب مائل $y = ax + b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$$

مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$



الدالة الأسية

تعريف:

الدالة الوحيدة f حيث $f' = f$ و $f(0) = 1$ هي: $f(x) = e^x$ حيث $e \approx 2,718$

خواص: x و y عددين حقيقيين و n عدد صحيح:

$$\begin{aligned} e^{nx} &= (e^x)^n & e^{x-y} &= \frac{e^x}{e^y} & e^{x+y} &= e^x \cdot e^y \\ e^{-x} &= \frac{1}{e^x} > 0 & e^{-1} &= \frac{1}{e} & e^0 &= 1 \end{aligned}$$

$e^x = a$ يكافئ $x = \ln a$ ($a > 0$) و $e^{\ln a} = a$ ($\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيفري)

مثال: $e^{3 \ln 2} = (e^{\ln 2})^3 = 8$ و $e^{-\ln 2} = \frac{1}{e^{\ln 2}} = \frac{1}{2}$

المشتق:

مثال: $(e^{2x})' = 2e^{2x}$ $[e^{u(x)}]' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

(التزايد المقارن) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = 0^-$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

كذلك: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^x = 0$ ($\alpha > 0$) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

الدالة اللوغاريتمية

تعريف: الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ ودالتها المشتقة $\frac{1}{x}$ حيث $f(1) = 0$

هي: $f(x) = \ln x$ يكافئ $\ln x = y$ $x = e^y$ ($x > 0$) و y عدد حقيقي

إشارة $\ln x$: $\ln x > 0$ إذا كان $x > 1$ • $\ln x < 0$ إذا كان $0 < x < 1$ • $\ln x = 0$ إذا كان $x = 1$ ($\ln 1 = 0$) $x = e$ إذا كان $\ln x = 1$ ($\ln e = 1$)

خواص: a و b عددين حقيقيين موجبين تماماً، n عدد ناطق: $\ln a = \ln b$ يكافئ $a = b$

$$\ln a^n = n \ln a \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad \ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

نتائج: $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$ و $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

المشتق: حيث u موجبة تماماً وقابلة للاشتقاق $[\ln u(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

النهايات:

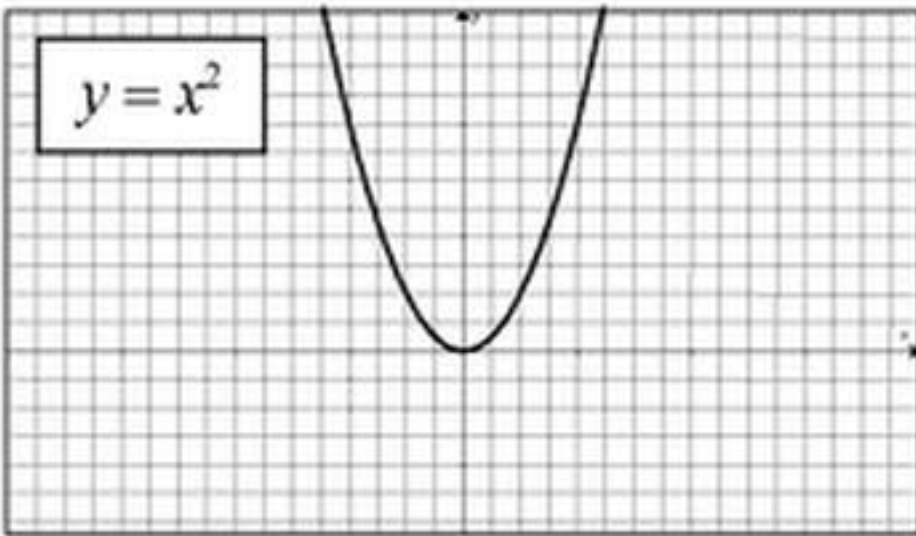
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

(التزايد المقارن) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

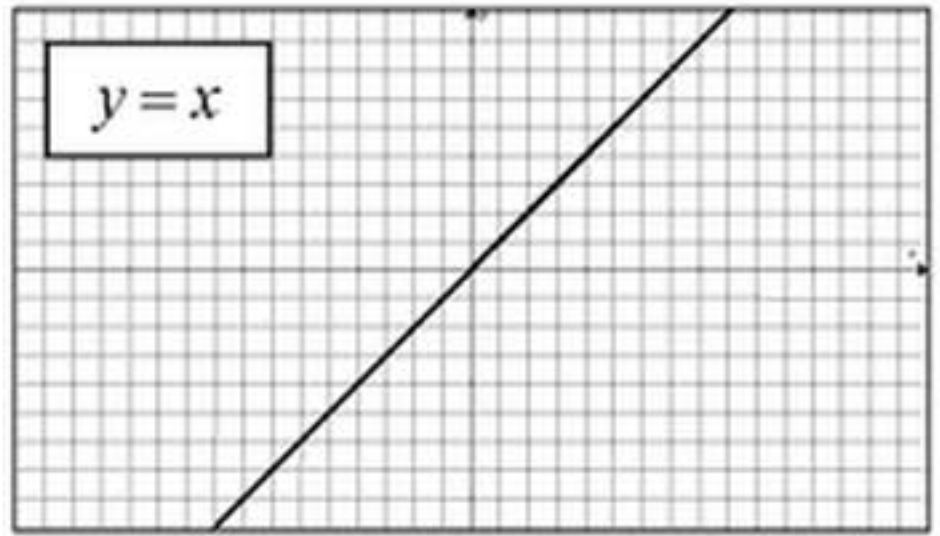
كذلك: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ ($\alpha > 0$) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

الدوال المرجعية

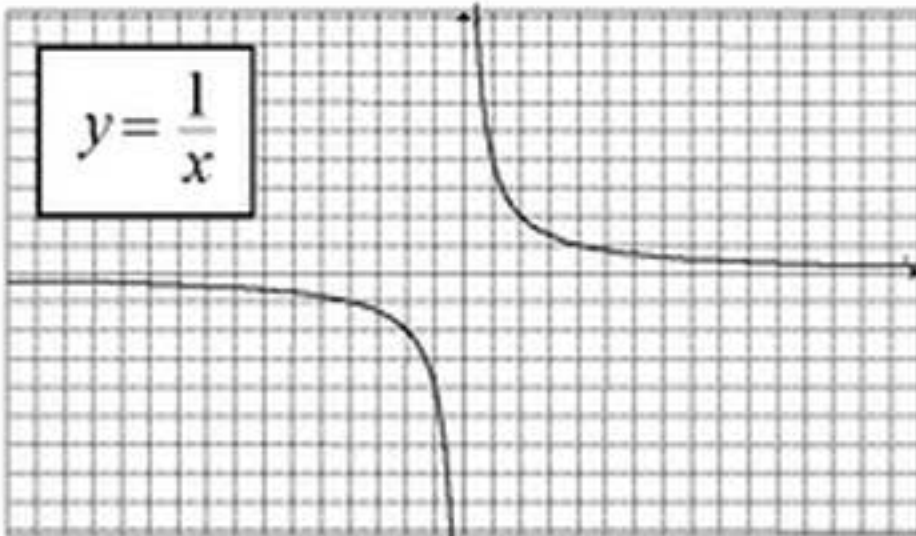
$$y = x^2$$



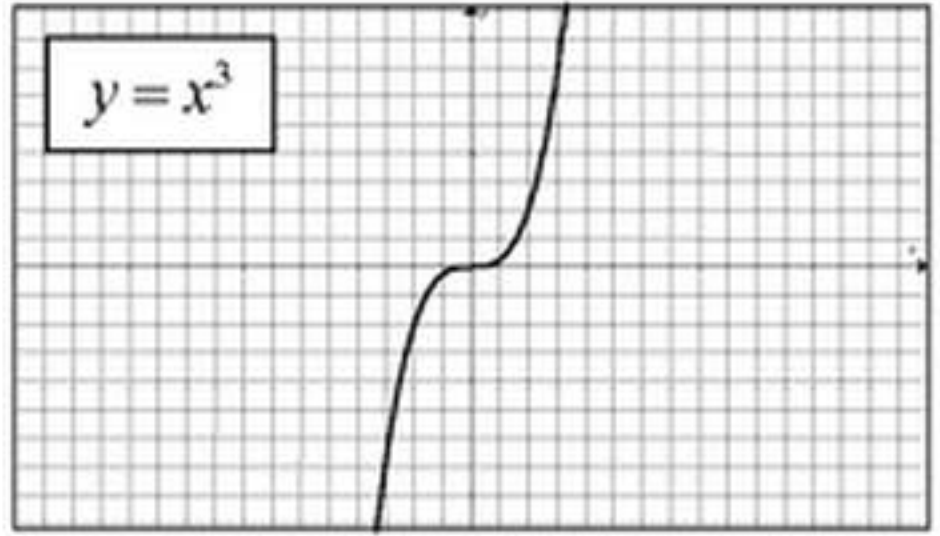
$$y = x$$



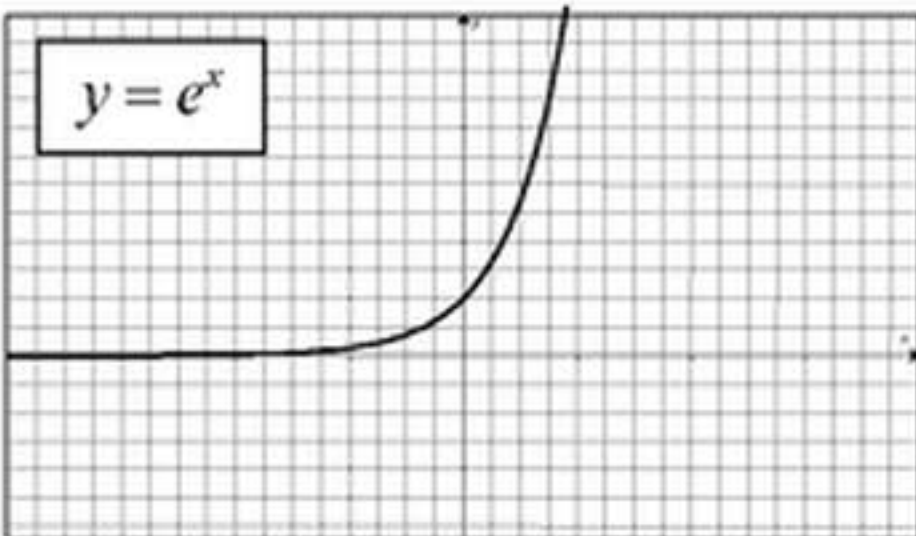
$$y = \frac{1}{x}$$



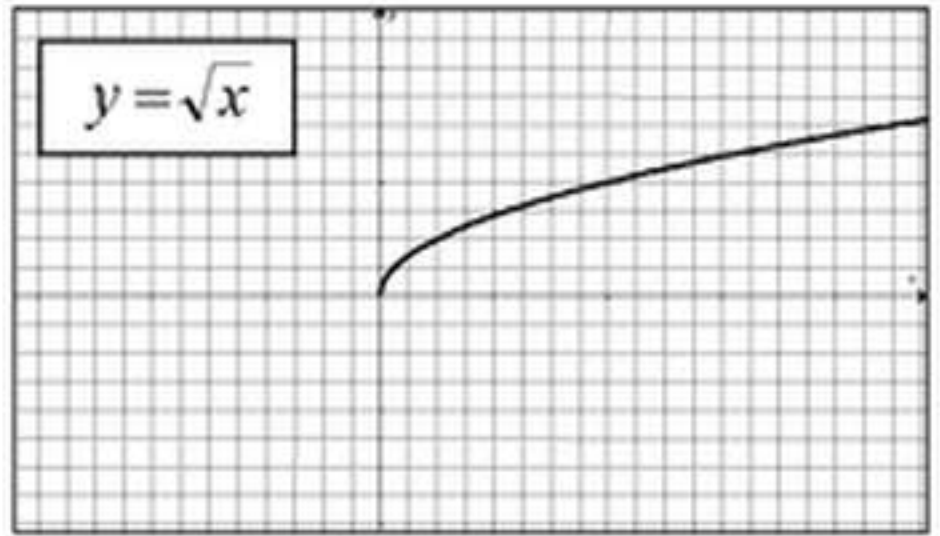
$$y = x^3$$



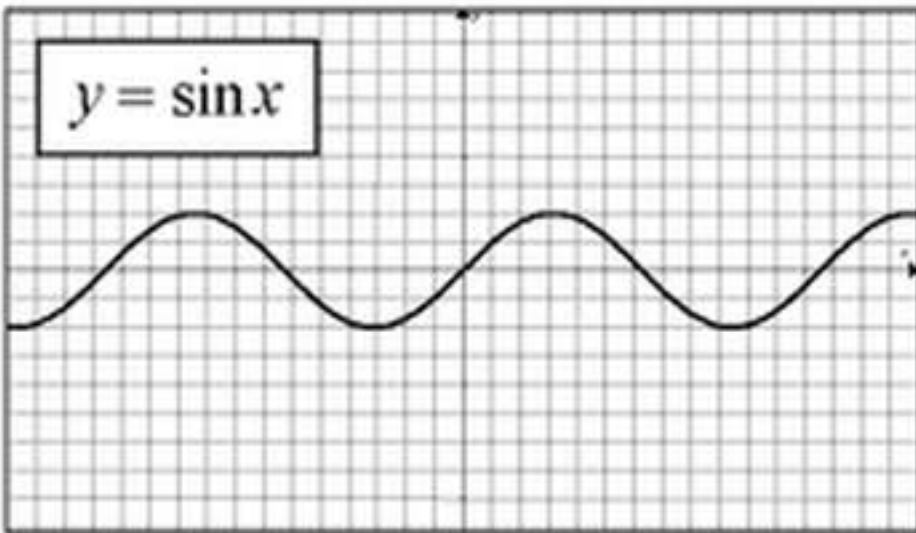
$$y = e^x$$



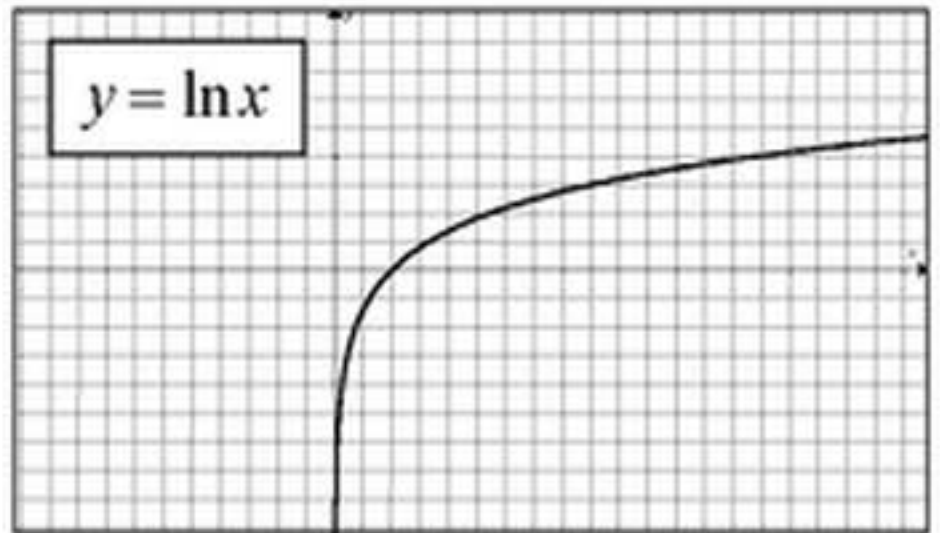
$$y = \sqrt{x}$$



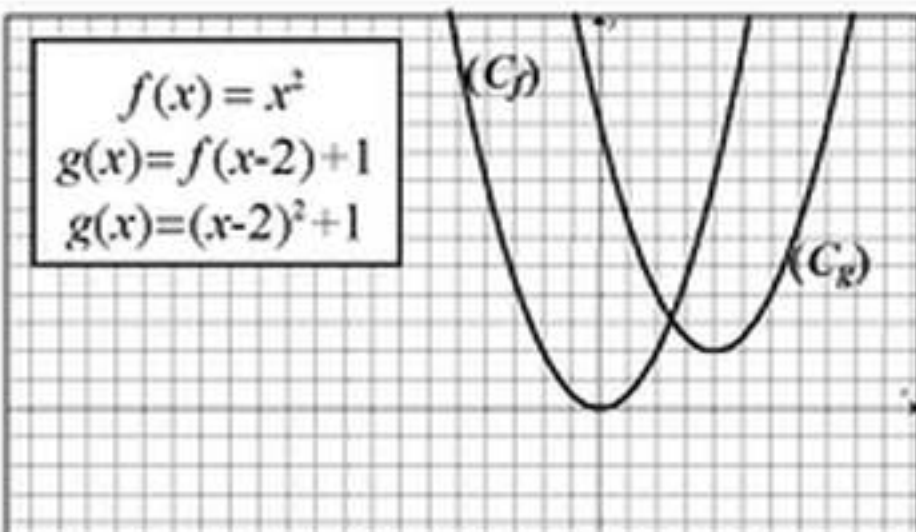
$$y = \sin x$$



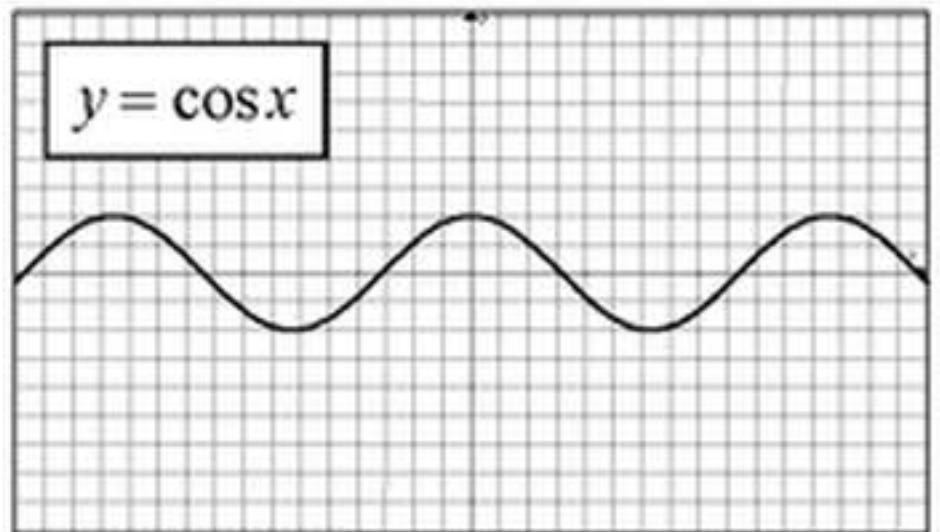
$$y = \ln x$$



$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ g(x) &= f(x-2) + 1 \\ g(x) &= (x-2)^2 + 1 \end{aligned}$$



$$y = \cos x$$



الجداء السلمي

تذكير:

في معلم متعامد ومتجانس من الفضاء، لتكن: $A(x_A; y_A; z_A)$ و $B(x_B; y_B; z_B)$

مركبة الشعاع $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

طويلة الشعاع $\overrightarrow{AB}$: $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

منتصف القطعة $[AB]$: $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$

حجم رباعي الوجوه: $V = \frac{1}{3} S.H$ حيث S مساحة القاعدة و H الارتفاع

الجداء السلمي:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان حيث: $\vec{u}(x; y; z)$ و $\vec{v}(x'; y'; z')$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u.v.\cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

التعامد: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذا كان: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

الارتباط الخطي: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا إذا كان: $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ (λ عدد حقيقي)

• $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$ مستويان، $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ ناظميان لهما على الترتيب:

$\mathcal{P}$ يوازي $\mathcal{P}'$ إذا كان: $\vec{n} = \lambda \vec{n}'$ (λ عدد حقيقي)

$\mathcal{P}$ يعامد $\mathcal{P}'$ إذا كان: $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$

المستقيم AB عمودي على $\mathcal{P}$ إذا كان: $\overrightarrow{AB} = \lambda \vec{n}$

• بعد نقطة $A(x_A; y_A; z_A)$ عن مستوي $\mathcal{P}: ax + by + cz + d = 0$ هو:

$$d = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

مجموعة النقط في الفضاء

$$(E_1) \quad MA = r$$

مجموعة النقط (E_1) هي: سطح كرة مركزها A ونصف قطرها r

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2 \quad \text{معادلتها:}$$

$$(E_2) \quad MA = MB$$

مجموعة النقط (E_2) هي: المستوي محور القطعة $[AB]$

$$(E_3) \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

مجموعة النقط (E_3) هي: المستوي شعاعه الناظمي $\overrightarrow{BC}$ ويشمل النقطة A

$$(E_4) \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

مجموعة النقط (E_4) هي: سطح كرة قطرها $[AB]$

المرجح:

لتكن G مرجح الجملة: $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ حيث: $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$G \left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}, \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}, \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} \right)$$

لما $\alpha = \beta = \gamma$ النقطة G تمثل مركز ثقل المثلث ABC .

التفسير الهندسي للأعداد المركبة

♦ لاحقة $\overline{AB}$ هي $z_{\overline{AB}} = z_B - z_A$ طول $\overline{AB}$ هو $AB = |z_B - z_A|$

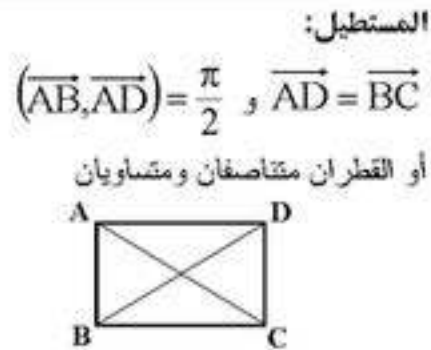
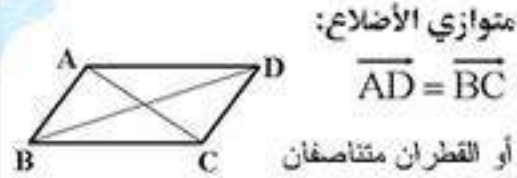
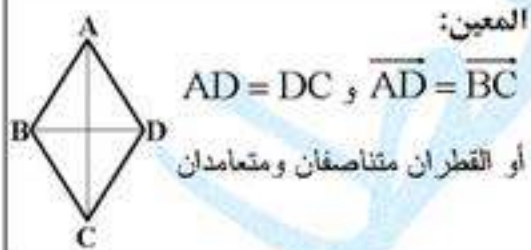
♦ لاحقة النقطة I منتصف $[AB]$ هي $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

لاحقة G مرجح الجملة: $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$

$$\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = \frac{AC}{AB} \quad \text{و} \quad \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overline{AB}, \overline{AC})$$

إذا كان $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ عددا حقيقيا فإن النقاط A ، B و C على استقامة واحدة.

إذا كان $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ عددا تخيليا صرفا فإن الشعاعين $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ متعامدان.



الأعداد المركبة [C]

الشكل الجبري:

$z = x + iy$ حيث $i^2 = -1$ و x و y عددين حقيقيين

$\text{Re}(z) = x$: الجزء الحقيقي و $\text{Im}(z) = y$: الجزء التخيلي

$z = 0$: $x = 0$ و $y = 0$ حيث $z' = x' + iy'$ و $x = x'$ و $y = y'$

مرافق عدد مركب:

$$\overline{z} = x - iy \quad \text{و} \quad z + \overline{z} = 2x \quad \text{و} \quad z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$$

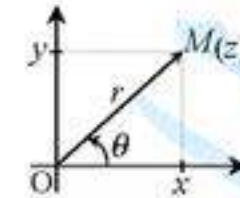
$\overline{z} = z$: حقيقي $\overline{z} = -z$: تخيلي صرف

طويلة عدد مركب:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|}, \quad |z^n| = |z|^n, \quad |z \cdot z'| = |z| \times |z'|, \quad |z|^2 = z \times \overline{z}, \quad |\overline{z}| = |z|$$

الشكل المثلثي:



$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

طويلة $|z| = r$

عمدة z : $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ و $z \neq 0$ عدد صحيح k

$$\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z') \quad \arg(\overline{z}) = -\arg(z)$$

$$\arg(z^n) = n \arg(z) \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

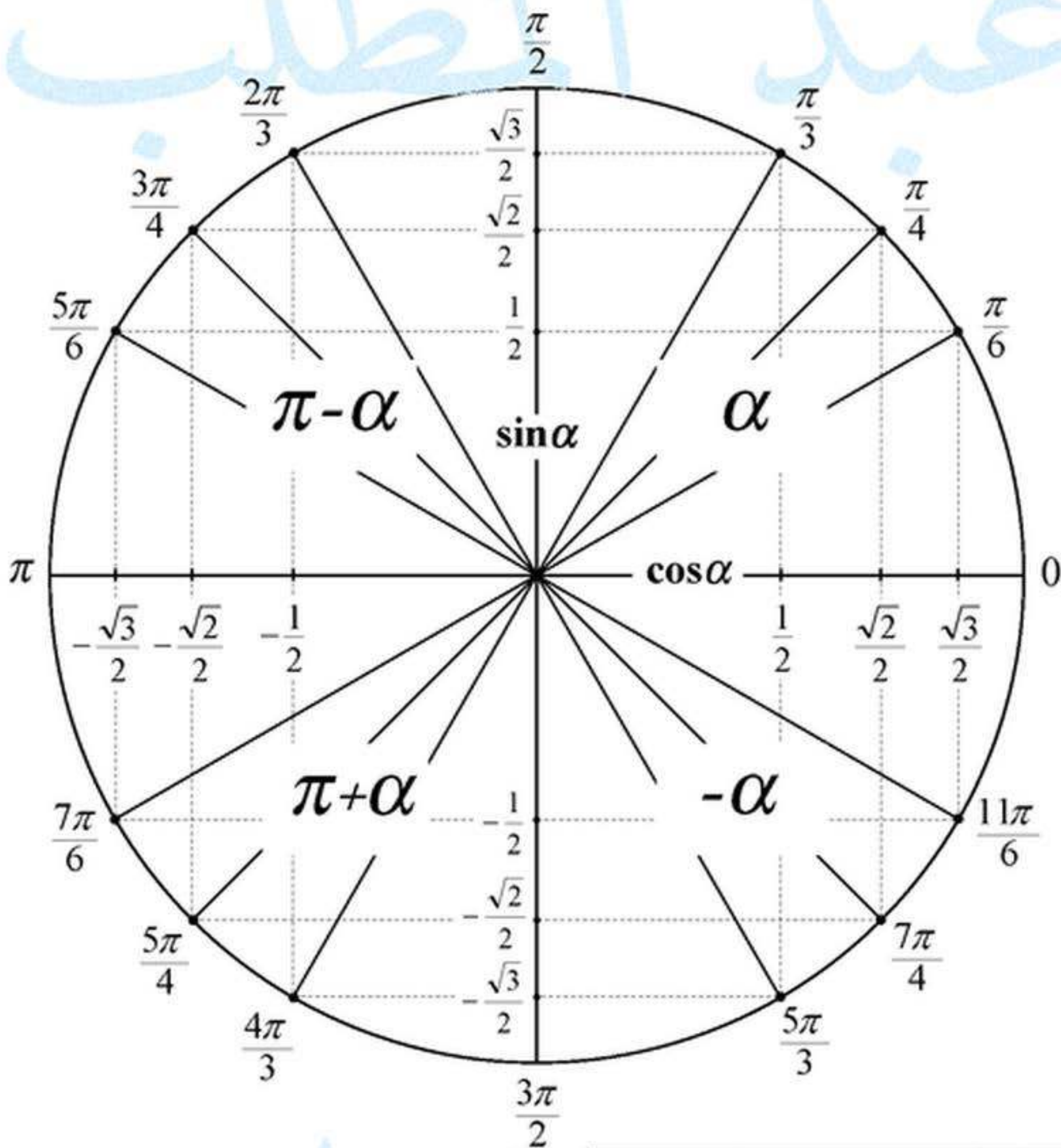
$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \text{قانون موافر}$$

الشكل الأسّي:

$$z = r e^{i\theta} \quad \overline{z} = r e^{-i\theta} \quad e^{i\pi} = -1$$

$$(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}, \quad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}, \quad z \cdot z' = r \cdot r' e^{i(\theta + \theta')}$$

Cercle Trigonométrique



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

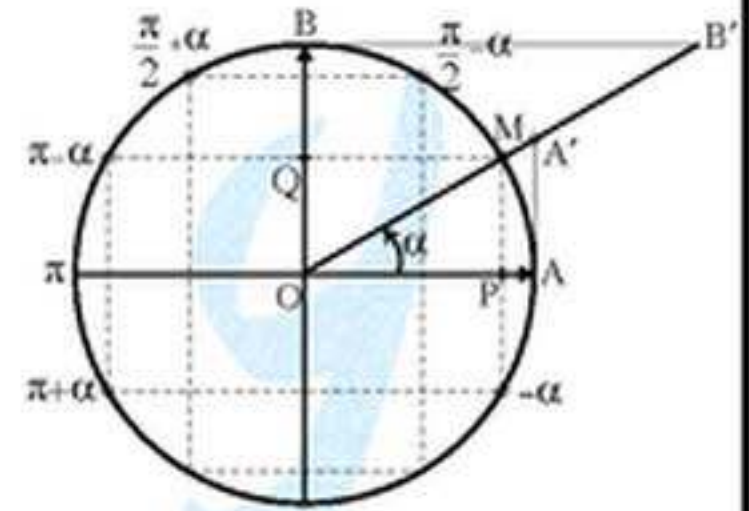
$$2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞

Fonctions Trigonométriques et hyperboliques

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \overline{OP} & -1 \leq \cos \alpha \leq 1 \\ \sin \alpha &= \overline{OQ} & -1 \leq \sin \alpha \leq 1 \\ \operatorname{tg} \alpha &= \overline{AA'} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha} \\ \cot \alpha &= \overline{BB'} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \\ \sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha}; \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}\end{aligned}$$



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + 2k\pi) &= \cos \alpha \\ \sin(\alpha + 2k\pi) &= \sin \alpha \\ \operatorname{tg}(\alpha + k\pi) &= \operatorname{tg} \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$

• k nombre relatif •

$$\begin{aligned}\cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \operatorname{tg}(\pi + \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \operatorname{tg}(\pi - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi \\ \cos \alpha &= 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \sin \alpha &= 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \cos \alpha &= 1 \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi \\ \sin \alpha &= -1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ \cos \alpha &= -1 \Leftrightarrow \alpha = \pi + 2k\pi\end{aligned}$$

• k nombre relatif •

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}\end{aligned}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$4\cos^3 \alpha = \cos 3\alpha + 3\cos \alpha$$

$$4\sin^3 \alpha = -\sin 3\alpha + 3\sin \alpha$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \vee \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\sin \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \vee \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + k\pi$$

• k nombre relatif •

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$$

$$e = 2,718281828\dots$$

$$i \text{ nbre imag: } i^2 = -1$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \theta)$$

$$\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \cos \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha - \theta)$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}; \operatorname{sh} \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}$$

$$\operatorname{th} \alpha = \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha} = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}}$$

$$\operatorname{cth} \alpha = \frac{\operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{sh} \alpha} = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}}$$

$$\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha = e^\alpha; \operatorname{ch} \alpha - \operatorname{sh} \alpha = e^{-\alpha}$$

$$\operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1; \operatorname{th} \alpha \operatorname{cth} \alpha = 1$$

$$\operatorname{sh}(-\alpha) = -\operatorname{sh} \alpha; \operatorname{ch}(-\alpha) = \operatorname{ch} \alpha$$

$$\operatorname{th}(-\alpha) = -\operatorname{th} \alpha; \operatorname{cth}(-\alpha) = -\operatorname{cth} \alpha$$

$$\operatorname{sh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta$$

$$\operatorname{ch}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta$$

$$\operatorname{th}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{th} \alpha \pm \operatorname{th} \beta}{1 \pm \operatorname{th} \alpha \operatorname{th} \beta}$$

$$\operatorname{sh} 2\alpha = 2\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha = \frac{2\operatorname{th} \alpha}{1 - \operatorname{th}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ch} 2\alpha = \operatorname{ch}^2 \alpha + \operatorname{sh}^2 \alpha = 2\operatorname{sh}^2 \alpha + 1$$

$$= 2\operatorname{ch}^2 \alpha - 1 = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \alpha}{1 - \operatorname{th}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{th} 2\alpha = \frac{2\operatorname{th} \alpha}{1 + \operatorname{th}^2 \alpha}; \operatorname{cth} 2\alpha = \frac{1 + \operatorname{cth}^2 \alpha}{2\operatorname{cth} \alpha}$$

$$\operatorname{sh} \alpha \pm \operatorname{sh} \beta = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{ch} \beta = 2 \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} \beta = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{th} \alpha \pm \operatorname{th} \beta = \frac{\operatorname{sh}(\alpha \pm \beta)}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta}$$

$$(\operatorname{ch} \alpha \pm \operatorname{sh} \alpha)^n = \operatorname{ch} n\alpha \pm \operatorname{sh} n\alpha$$

التحويلات النقطية

f تحويل نقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$.
 M' هي صورة (محوّلة) النقطة M : $M' = f(M)$

$$z' = az + b$$

العبارة المركبة للتحويل:

$$z' = z + b \quad a=1 \quad (1)$$

f **انسحاب** شعاعه $\vec{U}$ حيث العدد المركب b هو لاحقة $\vec{U}$. مثال: $z' = z + 2 - i$

$$\overrightarrow{\Omega M'} = a \overrightarrow{\Omega M} \quad z' - \omega = a(z - \omega) \quad a \in \mathbb{R}^* - \{1\} \quad (2)$$

f **تحاكي** نسبته a ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $\omega = \frac{b}{1-a}$.

مثال: $z' = 2z - 3 + 4i$

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \quad \theta \neq k\pi \text{ و } |a|=1 \text{ و } a \in \mathbb{C}^* \quad (3)$$

f **دوران** زوايته $\theta = \arg(a)$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $\omega = \frac{b}{1-a}$.

مثال: $z' = iz + 4$ و $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$ و $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$

إذا كان $z' = e^{i\theta} z$ فإن f دوران مركزه O وزاويته θ .

$$a \in \mathbb{C}^* \text{ و } |a| \neq 1 \text{ و } \theta \neq k\pi \quad (4)$$

f **تشابه مباشر** نسبته $|a|$ وزاويته $\theta = \arg(a)$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات

اللاحقة $\omega = \frac{b}{1-a}$. مثال: $z' = (1+i)z - 2 + 5i$

♦ التشابه المباشر يحافظ على نسب المسافات ويحافظ كذلك على الزوايا الموجهة.

♦ الانسحاب والتحاكي والدوران عبارة عن تشابهات مباشرة.

♦ الانسحاب والدوران عبارة عن تقايس: $M_1 M_2 = M'_1 M'_2$

التحويلات النقطية

f تحويل نقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$.
 M' هي صورة (محوّلة) النقطة M : $M' = f(M)$

$$z' = az + b$$

العبارة المركبة للتحويل:

$$z' = z + b \quad a=1 \quad (1)$$

f **انسحاب** شعاعه $\vec{U}$ حيث العدد المركب b هو لاحقة $\vec{U}$. مثال: $z' = z + 2 - i$

$$\overrightarrow{\Omega M'} = a \overrightarrow{\Omega M} \quad z' - \omega = a(z - \omega) \quad a \in \mathbb{R}^* - \{1\} \quad (2)$$

f **تحاكي** نسبته a ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $\omega = \frac{b}{1-a}$.

مثال: $z' = 2z - 3 + 4i$

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \quad \theta \neq k\pi \text{ و } |a|=1 \text{ و } a \in \mathbb{C}^* \quad (3)$$

f **دوران** زوايته $\theta = \arg(a)$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $\omega = \frac{b}{1-a}$.

مثال: $z' = iz + 4$ و $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$ و $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$

إذا كان $z' = e^{i\theta} z$ فإن f دوران مركزه O وزاويته θ .

$$a \in \mathbb{C}^* \text{ و } |a| \neq 1 \text{ و } \theta \neq k\pi \quad (4)$$

f **تشابه مباشر** نسبته $|a|$ وزاويته $\theta = \arg(a)$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات

اللاحقة $\omega = \frac{b}{1-a}$. مثال: $z' = (1+i)z - 2 + 5i$

♦ التشابه المباشر يحافظ على نسب المسافات ويحافظ كذلك على الزوايا الموجهة.

♦ الانسحاب والتحاكي والدوران عبارة عن تشابهات مباشرة.

♦ الانسحاب والدوران عبارة عن تقايس: $M_1 M_2 = M'_1 M'_2$

المتتاليات (التغيرات والتقارب)

تغيرات متتالية

♦ لدراسة تغيرات متتالية، ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n > 0$: المتتالية (u_n) متزايدة تماماً

$u_{n+1} - u_n < 0$: المتتالية (u_n) متناقصة تماماً

$u_{n+1} - u_n = 0$: المتتالية (u_n) ثابتة.

♦ إذا كانت $u_n > 0$: نقارن النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع 1.

♦ إذا كانت $u_n = f(n)$: ندرس تغيرات f على $[0; +\infty[$.
وهناك طرق أخرى لدراسة تغيرات متتالية.

تقارب متتالية

المتتالية (u_n) متقاربة إذا كانت: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

♦ إذا كانت (u_n) محدودة من الأعلى ($u_n < M$) ومتزايدة فإنها متقاربة.

♦ إذا كانت (u_n) محدودة من الأسفل ($u_n > m$) ومتناقصة فإنها متقاربة.

متتاليتان متجاورتان

♦ إحداها متناقصة والأخرى متزايدة.

♦ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

المتتاليتان المتجاورتان تَقْبَلان النهاية نفسها.

المتتاليات (الحسابية والهندسية)

المتتالية الهندسية

$$v_{n+1} = q \cdot v_n$$

q هو الأساس ($q \in \mathbb{R}^*$)

الحد العام:

$$v_n = v_p \cdot q^{n-p}$$

$$v_n = v_1 \cdot q^{n-1} \quad v_n = v_0 \cdot q^n$$

الوسط الهندسي:

$$a \times c = b^2$$

a, b, c حدود متتابعة.

المجاميع:

$$S_n = v_p + v_{p+1} + \dots + v_n$$

$$S_n = v_p \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right) \quad q \neq 1$$

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

المتتالية الحسابية

$$u_{n+1} = u_n + r$$

r هو الأساس ($r \in \mathbb{R}$)

الحد العام:

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

p و n عددان طبيعيين

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

الوسط الحسابي:

$$a + c = 2b$$

a, b, c حدود متتابعة

المجاميع:

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$$

$$S_n = \frac{n - p + 1}{2} (u_p + u_n)$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2} (u_0 + u_n)$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2} (u_1 + u_n)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

الحساب التكاملي

f دالة مستمرة على $I = [a; b]$ و F دالة أصلية للدالة f على I . التكامل من a إلى

$$b \text{ لـ } f \text{ يرمز بـ: } \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

♦ علاقة شال

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{و} \quad \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad \text{• } f \text{ زوجية:} \quad \int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad \text{• } f \text{ فردية:}$$

♦ الخطية

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

♦ الإيجابية

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \text{إذا كانت } f(x) \geq 0 \text{ و } (a \leq b) \text{ فإن}$$

♦ المقارنة

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad \text{إذا كانت } f(x) \leq g(x) \text{ و } (a \leq b) \text{ فإن}$$

♦ القيمة المتوسطة

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad \text{القيمة المتوسطة لـ } f \text{ على } I = [a; b] \text{ هي:}$$

♦ الحصر

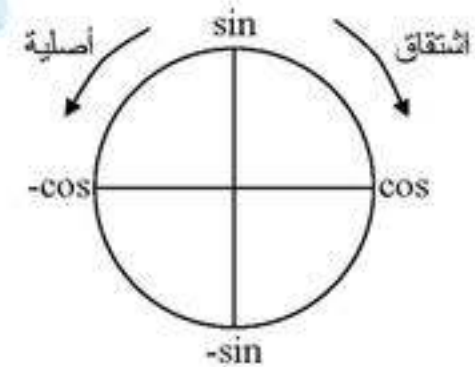
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad \text{إذا كانت } m \leq f(x) \leq M \text{ و } (a \leq b) \text{ فإن}$$

♦ التكامل بالتجزئة

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

الدوال الأصلية

$f(x)$	$F(x)$
a (حقيقي)	$ax + C$
x^n ($n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$u' \cdot u^n$ ($n \neq -1$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
$\sin(ax+b)$ ($a \neq 0$)	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$\cos(ax+b)$ ($a \neq 0$)	$\frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\frac{u'}{u}$ ($u \neq 0$)	$\ln u + C$
$u' \cdot e^u$	$e^u + C$



التحليل التوافقي

السحب

لدينا n قرصة، نسحب p قرصة:

- ♦ في أن واحد نستعمل: C_n^p
- ♦ على التوالي بدون إرجاع: A_n^p
- ♦ على التوالي بالإرجاع: n^p

الجمعيات

- ♦ ذكر وظيفة الأشخاص: A_n^p
- ♦ لا نذكر وظيفة الأشخاص: C_n^p

دستور ثنائي الحد

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p x^{n-p} y^p$$

$$= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \dots + C_n^n y^n$$

مثال

$$(x+1)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p x^{n-p} 1^p$$

$$= x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} x + 1$$

الترتيبات

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

n عدد طبيعي حيث $(n \geq p \geq 0)$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

$$A_n^p = n(n-1) \times \dots \times (n-p+1)$$

التوفيقات

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} \text{ كذلك}$$

التبديلة

$$A_n^n = n!$$

القائمة

$$n^p$$

خواص

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \quad C_n^1 = n$$

$$0! = 1! = 1 \quad C_{n+1}^n = n+1$$

التحليل التوافقي

السحب

لدينا n قرصة، نسحب p قرصة:

- ♦ في أن واحد نستعمل: C_n^p
- ♦ على التوالي بدون إرجاع: A_n^p
- ♦ على التوالي بالإرجاع: n^p

الجمعيات

- ♦ ذكر وظيفة الأشخاص: A_n^p
- ♦ لا نذكر وظيفة الأشخاص: C_n^p

دستور ثنائي الحد

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p x^{n-p} y^p$$

$$= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \dots + C_n^n y^n$$

مثال

$$(x+1)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p x^{n-p} 1^p$$

$$= x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} x + 1$$

الترتيبات

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

n عدد طبيعي حيث $(n \geq p \geq 0)$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

$$A_n^p = n(n-1) \times \dots \times (n-p+1)$$

التوفيقات

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} \text{ كذلك}$$

التبديلة

$$A_n^n = n!$$

القائمة

$$n^p$$

خواص

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \quad C_n^1 = n$$

$$0! = 1! = 1 \quad C_{n+1}^n = n+1$$