

الهندسة في الفضاء

تمارين

التمرين 01

التعامد و التوازي - المسافة بين نقطة و مستو .

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ، تمثيلا وسيطيا لمستقيم (D) و معادلة ديكارتية لمستو (P) :

$$(P): x + 2y - 3z - 1 = 0 \quad \text{و} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad (D): \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$$

اختر الجواب الصحيح في كل سطر من الجدول التالي :

	الجواب (أ)	الجواب (ب)	الجواب (ج)
السطر 1	$A(-1; 3; 2) \in (D)$	$B(2; -1; -1) \in (D)$	$C(3; 1; -4) \in (D)$
السطر 2	$\vec{u}(1; 2; 3)$ هو شعاع توجيه لـ: (D)	$\vec{v}(-2; 1; 1)$ هو شعاع توجيه لـ: (D)	$\vec{w}(3; 1; 4)$ هو شعاع توجيه لـ: (D)
السطر 3	(D) محتواة في (P)	(D) يوازي تماما (P)	(D) يثقب (P)
السطر 4	$A'(1; 3; -2) \in (P)$	$B'(1; 3; 2) \in (P)$	$C'(1; 3; -1) \in (P)$
السطر 5	المستوي (Q_1) الذي معادلته $x + 2y - 3z + 1 = 0$ يعامد المستوي (P)	المستوي (Q_2) الذي معادلته $-4x + 5y + 2z + 3 = 0$ يعامد المستوي (P)	المستوي (Q_3) الذي معادلته $-3x + 2y - z - 1 = 0$ يعامد المستوي (P)
السطر 6	المسافة بين النقطة $M_1(-1; -3; 2)$ و المستوي (P) هي $\sqrt{14}$	المسافة بين النقطة $M_1(-1; -3; 2)$ و المستوي (P) هي 14	المسافة بين النقطة $M_1(-1; -3; 2)$ و المستوي (P) هي $2\sqrt{3}$

التمرين 02

معادلة ديكارتية لمستوى ، تمثيل وسيطي لمستقيم - المرجح - المسافة بين نقطة ومستوى

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

نعتبر المستوي P الذي معادلته $2x + y - 2z + 4 = 0$ والنقط $A(3; 2; 6)$ ، $B(1; 2; 4)$ و $C(4; -2; 5)$.

(1) بيّن أن النقط A ، B و C تعيّن مستو و بيّن أن هذا المستوي هو P .

(2) (1-2) بيّن أن المثلث ABC قائم .

(2-2) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ الذي يشمل O ويعامد المستوي P .

(3-2) نسمي K المسقط العمودي للنقطة O على P . احسب المسافة OK .

(4-2) احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.

(3) نسمي G مرجح الجملة $O; 3$ ، $A; 1$ ، $B; 1$ ، $C; 1$.

(1-3) I هي مركز ثقل المثلث ABC . بيّن أن G تنتمي إلى OI .

(2-3) عيّن المسافة بين G والمستوي P .

التمرين 03

الاستقامية - مستقيم يعامد مستو - معادلة مستو - تقاطع مستقيم ومستقيم - المرجح - مجموعة نقطية .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

نعتبر النقط $A(2; 1; 3)$ ، $B(-3; -1; 7)$ و $C(3; 2; 4)$.
(1) بيّن أن A و B و C ليست على استقامة واحدة .

$$(2) \quad \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

هو تمثيل وسيطي للمستقيم d .

(1-2) بيّن أن d يعامد المستوي (ABC) .

(2-2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

(3) H هي تقاطع d و (ABC) .

(1-3) بيّن أن H هي مرجح الجملة $A; -2$ ، $B; -1$ ، $C; 2$.

(2-3) عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة Γ_1 للنقط M من الفضاء حيث :

$$-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \bullet \vec{MB} - \vec{MC} = 0$$

(3-3) عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة Γ_2 للنقط M من الفضاء حيث :

$$\| -2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \| = \sqrt{29}$$

التمرين 04

المسافة بين نقطة و مستو - تقاطع مستو و كرة .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

الجزء الأول

a, b, c و d أعداد حقيقية حيث $(a, b, c) \neq (0; 0; 0)$.

P هو المستوي الذي معادلته $ax + by + cz + d = 0$.

نعتبر النقطة $I(x_I; y_I; z_I)$ و الشعاع $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

الهدف في هذا الجزء الأول هو البرهان على أن المسافة بين I و المستوي P تساوي:

$$\frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(1) Δ هو المستقيم الذي يمر بالنقطة I و يعامد P .

عين تمثيلاً و سيطياً للمستقيم Δ بدلالة $a, b, c, d, x_I, y_I, z_I$.

(2) نسمي H نقطة تقاطع Δ و P .

(1-2) بيّن أنه يوجد عدد حقيقي k حيث $\vec{IH} = k\vec{n}$.

(2-2) عبر عن k بدلالة $a, b, c, d, x_I, y_I, z_I$.

(3-2) استنتج أن: $\frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

الجزء الثاني

المستوي Q الذي معادلته $x - y + z - 11 = 0$ يمر الكرة S التي مركزها $\Omega(1; -1; 3)$.

(1) عيّّن نصف قطر الكرة S .

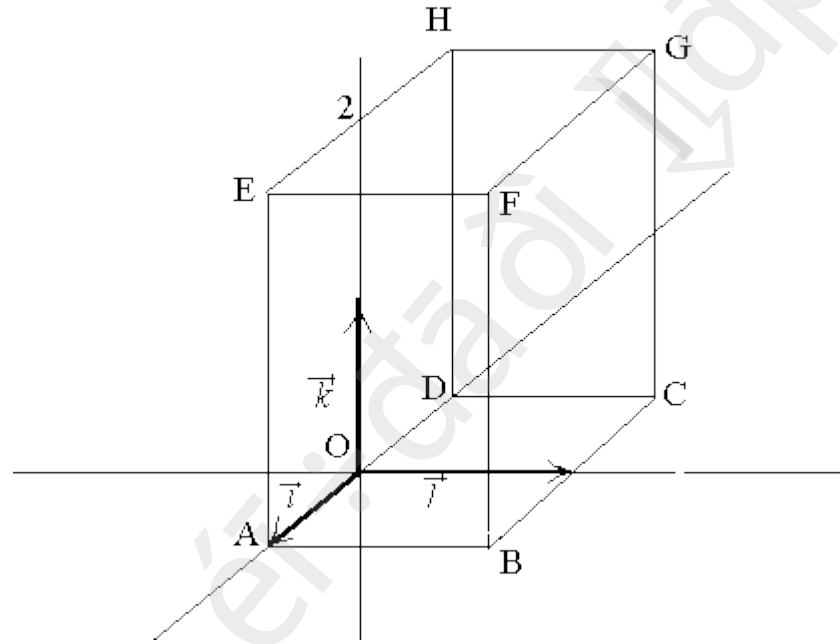
(2) اكتب تمثيلاً و سيطياً للمستقيم Δ الذي يشمل Ω و يعامد Q .

(3) استنتج احداثيات نقطة تقاطع S و Q .

التمرين 05

معادلة ديكارتية لمستوى - تمثيل وسيطي لمستقيم - تقاطع مستقيمات .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



يمثل الشكل السابق متوازي مستطيلات، O هي منتصف [AD]، P هي منتصف [EF] .

(1) (1-1) ما هي مجموعة نقط الفضاء التي معادلتها $z = 2$ ؟

(2-1) عيّن معادلة للمستوي (ABF) .

(3-1) استنتج جملة معادلتين تميّز المستقيم (EF) .

(2) (1-2) عيّن إحداثيات النقط A، G، و P .

(2-2) ارسم النقطة $Q\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$.

(3-2) اكتب معادلة للمستوي (APQ) .

(3) (1-3) ارسم القطعتين [PQ] و [AG] .

(2-3) هل $G \in APQ$ ؟ علل .

(4) ننشئ الشكل السابق باستعمال برمجة للهندسة ثم نطلب تمثيل نقطة تقاطع (AG) و (PQ) .
ما هو الجواب الذي تتوقعه؟

التمرين 06

معادلة ديكارتية لمستوى - تمثيل وسيطي لمستقيم - المسافة بين نقطة و مستوى - تقاطع مستوى و كرة .

عين في كل حالة مما يلي الجواب الصحيح .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

نعتبر النقطة $S(1; -2; 0)$ و المستوى P الذي معادلته $x + y - 3z + 4 = 0$.

(1) تمثيل وسيطي للمستقيم D الذي يمر بالنقطة S و يعامد P هو :

الجواب 1	الجواب 2	الجواب 3	الجواب 4
$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

(2) إحداثيات النقطة H تقاطع المستقيم D مع المستوى P هي :

الجواب 1	الجواب 2	الجواب 3	الجواب 4
$-4; 0; 0$	$\left(\frac{6}{5}; \frac{-9}{5}; \frac{-3}{5}\right)$	$\left(\frac{7}{9}; \frac{-2}{3}; \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{8}{11}; \frac{-25}{11}; \frac{9}{11}\right)$

(3) المسافة بين النقطة S و المستوى P تساوي :

الجواب 1	الجواب 2	الجواب 3	الجواب 4
$\frac{\sqrt{11}}{3}$	$\frac{3}{\sqrt{11}}$	$\frac{9}{\sqrt{11}}$	$\frac{9}{11}$

(4) نعتبر الكرة التي مركزها S و نصف قطرها 3 . تقاطع هذه الكرة و المستوى P هي :

الجواب 1 : النقطة $I(1; -5; 0)$

الجواب 2 : الدائرة التي مركزها H و نصف قطرها $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{11}}$

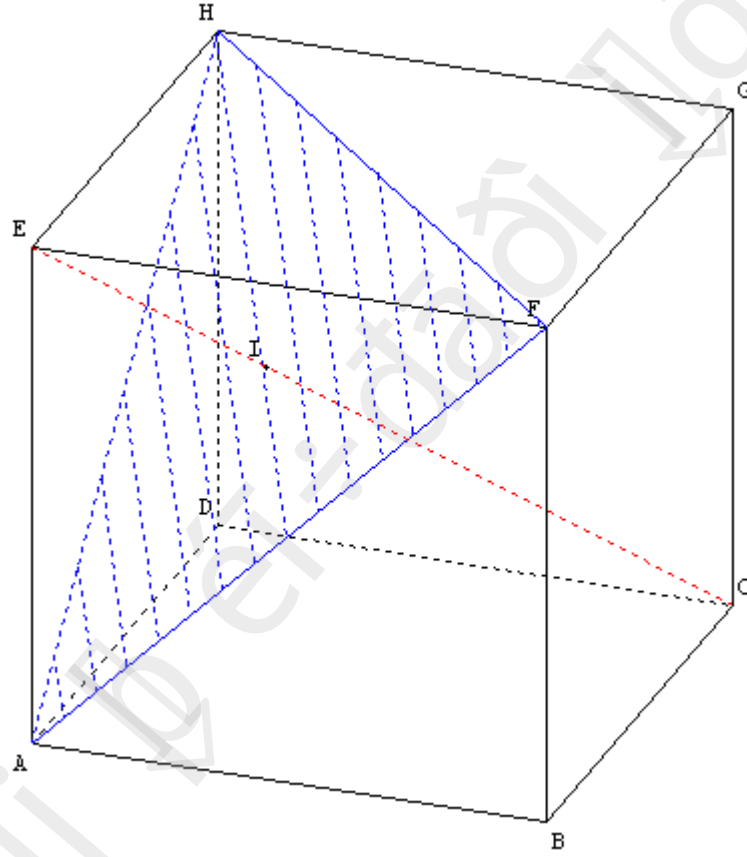
الجواب 3 : الدائرة التي مركزها S و نصف قطرها 2

الجواب 4 : الدائرة التي مركزها S و نصف قطرها $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{11}}$

التمرين 07

الجداء السلمي - التعامد .

مكعب $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه a (a عدد حقيقي موجب تماما).
نسمي I نقطة تقاطع المستقيم (EC) و المستوي (AFH) .



(1) (HF) يبين أن المستقيم يعامد المستقيم (AG) .

(2) احسب بدلالة a الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AF}$ ، $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF}$.

(2-2) استنتج أن $\overrightarrow{EC}$ يعامد $\overrightarrow{AF}$.

التمرين 08

الجداء السلمي - التعامد - أقصر مسافة بين مستقيمين .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. نعتبر المستقيمين :

$$(D_2): \begin{cases} x = -6\beta \\ y = 1 + \beta \\ z = 2 + 2\beta \\ \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ و } (D_1): \begin{cases} x = 3 - 4\alpha \\ y = -2 + \alpha \\ z = -1 + \alpha \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(1) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيمين (Δ) تاذي يعامد (D_1) و (D_2) .

(2) احسب أقصر مسافة بين المستقيمين (D_1) و (D_2) .

التمرين 09

الجداء السلمي - التعامد - المسافة بين نقطة و مستو .

$ABCDEFGH$ مكعب مركزه O و طول حرفه 1 .

نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

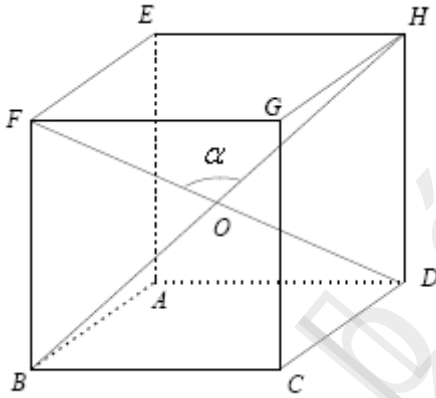
(1) احسب BH و FD .

(2) احسب قيمة مقربة للزاوية $\alpha = HOF$.

(3) برهن أن المستقيم (FD) يعامد المستوي (EGB) .

(4) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (EGB) .

(5) احسب المسافة بين النقطة O و المستوي (EGB) .



حلول

التمرين 01

• في السطر 1 : الجواب الصحيح هو الجواب (ج) $(C(3;1;-4) \in (D))$ ، لأنه يوجد عدد حقيقي

$$\lambda \text{ حيث } \begin{cases} 3 = 1 + 2\lambda \\ 1 = 2 - \lambda \\ -4 = -3 - \lambda \end{cases} . (\lambda = 1)$$

• في السطر 2 : الجواب الصحيح هو الجواب (ب) لأن :

$$\text{التمثيل الوسيط المعطى } \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \text{ يبين أن } \vec{r}(2;-1;-1) \text{ شعاع توجيه}$$

للمستقيم (D) و $\vec{v}(-2;1;1)$ يوازي $\vec{r}(2;-1;-1)$ لأنه يوجد عدد حقيقي t حيث $\vec{r} = t\vec{v}$ ($t = -1$).

$\vec{v}(-2;1;1)$ هو شعاعا توجيه آخر للمستقيم (D) .

• في السطر 3 : الجواب الصحيح هو الجواب (ج) لأن :

$\vec{r}(2;-1;-1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D)

$\vec{n}(1;2;-3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P)

لدينا $\vec{r} \cdot \vec{n} \neq 0$ إذن $\vec{r}$ لا يعامد $\vec{n}$ و منه (D) لا يوازي (P)

$((D) \text{ لا يوازي } (P) \text{ تماما و ليس محتواة في } (P))$

ملاحظة:

نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء تنتمي إلى (P) و إلى (D) إذا و فقط إذا كان

$$\begin{cases} \lambda = -\frac{13}{3} \\ x = -\frac{23}{3} \\ y = \frac{19}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} (1+2\lambda)+2(2-\lambda)-3(-3-\lambda)-1=0 \\ x = 1+2\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = -3-\lambda \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x+2y-3z-1=0 \\ x = 1+2\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = -3-\lambda \end{cases}$$

إذن (D) يثقب (P) في النقطة التي إحداثياتها $(-\frac{23}{3}; \frac{19}{3}; \frac{4}{3})$

• في السطر 4 : الجواب الصحيح هو الجواب (ب) لأن الاحداثيات (1;3;2) للنقطة ' B تحقق معادلة المستوي (P) (التي هي $x + 2y - 3z - 1 = 0$).

• في السطر 5 : الجواب الصحيح هو الجواب (ب) لأن:
 $\vec{n}(1;2;-3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P)
 $\vec{n}_2(-4;5;2)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (Q₂)
 و $\vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0$ إذن $\vec{n}$ يعامد $\vec{n}_2$ ، نستنتج أن (Q₂) يعامد (P) .

• في السطر 6 : الجواب الصحيح هو الجواب (أ) لأن:
 المسافة بين النقطة $M_1(-1;-3;2)$ و المستوي الذي معادلته $1x + 2y - 3z - 1 = 0$ هي

$$\frac{|1 \times (-1) + 2 \times (-3) - 3 \times (2) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-14|}{\sqrt{14}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \frac{14\sqrt{14}}{14} = \sqrt{14}$$

التمرين 02

(1) نبين أن النقط A ، B و C تعين مستو
 لدينا $\vec{AB}(-2;0;-2)$ و $\vec{AC}(1;-4;-1)$.

$$\vec{AB} = k \vec{AC} \text{ تكافئ } \begin{cases} -2 = k \\ 0 = -4k \\ -2 = k \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} k = -2 \\ k = 0 \\ k = -2 \end{cases}$$

لا يمكن للعدد الحقيقي k أن يكون 0 و -2 في آن واحد إذن لا يوجد أي عدد k حيث $\vec{AB} = k \vec{AC}$ و منه $\vec{AB}$ لا يوازي $\vec{AC}$ ، نستنتج أن النقط A ، B و C تعين مستو، هو المستوي (ABC) .

نبين أن هذا المستوي هو P

إذن النقطة A تنتمي إلى P . $2 \times 3 + 2 - 2 \times 6 + 4 = 0$
 إذن النقطة B تنتمي إلى P . $2 \times 1 + 2 - 2 \times 4 + 4 = 0$
 إذن النقطة C تنتمي إلى P . $2 \times 1 + 2 - 2 \times 4 + 4 = 0$
 النقط A ، B و C تنتمي إلى P ، إذن المستوي P هو المستوي (ABC) .

(2) (1-2) نبين أن المثلث ABC قائم

لدينا $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -2 \times 1 + 0 \times -4 + -2 \times -1 = 0$
 الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ متعامدان إذن المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان و منه المثلث ABC قائم في A .

(2-2) تمثيل و سيطي للمستقيم Δ

بصفة عامة $\vec{n} a; b; c$ يعامد المستوي الذي معادلته $ax + by + cz + d = 0$.
 لدينا $\vec{n} 2; 1; -2$ يعامد P و هو أيضا شعاع توجيه للمستقيم Δ .

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ و } \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \text{ تكافئ } \overrightarrow{OM} = \lambda \vec{n} \text{ إذن } M(x; y; z) \in \Delta$$

(3-2) حساب المسافة OK

لدينا $P \perp (OK)$ و $(OK) = \Delta$ النقطة K تنتمي إلى P و إلى Δ إذن

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \\ \lambda = -\frac{4}{9} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \\ 4\lambda + \lambda + 4\lambda + 4 = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \\ 2x + y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{و أخيرا } \begin{cases} x = -\frac{4}{9} \\ y = \frac{4}{9} \\ z = \frac{8}{9} \\ \lambda = -\frac{4}{9} \end{cases} \text{ نجد عندئذ إحداثيات } K \left(-\frac{8}{9}; -\frac{4}{9}; \frac{8}{9} \right).$$

$$\text{نستنتج حساب } OK = \sqrt{\left(-\frac{8}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2} = \frac{4}{3}$$

(4-2) حساب حجم رباعي الوجوه OABC

قاعدة رباعي الوجوه OABC هي ABC و ارتفاعه [OK].

لدينا $AB^2 = 4 + 4 = 8$ إذن $AB = 2\sqrt{2}$ و نجد كذلك $AC = 3\sqrt{2}$.

$$\text{مساحة المثلث } ABC = \frac{AB \times AC}{2} = 6\text{cm}^2 \text{ هي : } Aire \ ABC$$

$$\text{نستنتج حجم رباعي الوجوه OABC : } Volume \ OABC = \frac{6 \times OK}{3} = \frac{8}{3}\text{cm}^3$$

(3) (1-3) نبين أن G تنتمي إلى OI

" I مركز ثقل المثلث ABC " يعني " I مرجح الجملة A;1 , B;1 , C;1 "

G هي مرجح الجملة $O;3 , A;1 , B;1 , C;1$.

نستعمل خواص المرجح (التجميعية): G هي مرجح الجملة $O;3 , I;3$

أي G هي منتصف $[OI]$ إذن G تنتمي إلى المستقيم (OI) .

(2-3) حساب المسافة بين G و المستوي P

$$\begin{cases} x_I = \frac{8}{3} \\ y_I = \frac{2}{3} \\ z_I = 5 \end{cases} \text{ لدينا } \vec{OI} = \frac{1}{3} \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \text{ إذن إحداثيات } I \text{ هي}$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{4}{3} \\ y_G = \frac{1}{3} \\ z_G = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ } G \text{ هي منتصف } [OI] \text{ إذن } \vec{OG} = \frac{1}{2} \vec{OI} \text{ ، نستنتج إحداثيات } G : \begin{cases} x_G = \frac{4}{3} \\ y_G = \frac{1}{3} \\ z_G = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$2x + y - 2z + 4 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي P ، المسافة بين G و المستوي P

$$\text{هي } \frac{|2x_G + y_G - 2z_G + 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}$$

التمرين 03

(1) A و B و C ليست على استقامة واحدة

لدينا $\vec{AB} = -5; -2; 4$ و $\vec{AC} = 1; 1; 1$.

$$\begin{cases} -5 = k \\ -2 = k \\ 4 = k \end{cases} \vec{AB} = k \vec{AC} \text{ تكافئ}$$

لا يمكن للعدد الحقيقي k أن يكون -5 ، -2 و 4 في آن واحد إذن لا يوجد أي عدد k حيث $\vec{AB} = k \vec{AC}$ و منه $\vec{AB}$ لا يوازي $\vec{AC}$ ، نستنتج أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة .

(2) (1-2) d يعامد المستوي (ABC)

نعين شعاعا $\vec{n} \alpha; \beta; \gamma$ يعامد المستوي (ABC)

$$\vec{n} \alpha; \beta; \gamma \perp \overrightarrow{AC} 1; 1; 1 \text{ و } \vec{n} \alpha; \beta; \gamma \perp \overrightarrow{AB} -5; -2; 4$$

$$\begin{cases} -5 - \beta - \lambda - 2\beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha = -\beta - \gamma \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} -5\alpha - 2\beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \vec{n} \bullet \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \bullet \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \text{ إذن}$$

$$\text{إذن } \begin{cases} 3\beta + 9\gamma = 0 \\ \alpha = -\beta - \gamma \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \beta = -3\gamma \\ \alpha = 2\gamma \end{cases} \text{ و منه } \vec{n} 2\gamma; -3\gamma; \gamma$$

لاحظ أن $\vec{v} 2; -3; 1$ شعاع توجيه للمستقيم (d) (انظر التمثيل الوسيط المعطى للمستقيم ((d)).

$\vec{v} 2; -3; 1$ يعامد أيضا المستوي (ABC) ، إذن (d) يعامد (ABC) .

(2-2) معادلة ديكرتية للمستوي (ABC)

$M x; y; z$ تنتمي إلى (ABC) إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AM} \perp \vec{v}$ أي $\overrightarrow{AM} \bullet \vec{v} = 0$.

لدينا $\overrightarrow{AM} x - 2; y - 1; z - 3$ و $\vec{v} 2; -3; 1$ ، إذن :

$$2x - 2 - 3y - 1 + z - 3 = 0 \text{ إذا وفقط إذا كان } M x; y; z \text{ تنتمي إلى (ABC)}$$

$$\text{أي } 2x - 3y + z - 4 = 0$$

$2x - 3y + z - 4 = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

(3) (1-3) H هي مرجح الجملة $A; -2, B; -1, C; 2$

• $H(x; y; z)$ تنتمي إلى (ABC) و إلى إحداثياتها إذن (d) تحقق :

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 4 = 0 \\ x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} 2x - 3y + z - 4 = 0 \\ x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

$$\text{أي } \begin{cases} t = 1 \\ x = -7 + 2t = -5 \\ y = -3t = -3 \\ z = 4 + t = 5 \end{cases} \text{ و منه } H(-5; -3; 5)$$

• لدينا $\overrightarrow{HA} 7; 4; -2$ ، $\overrightarrow{HB} 2; 2; 2$ ، $\overrightarrow{HC} 8; 5; -1$ إذن :

$$-2\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HC} = \vec{0} \text{ ، نستنتج أن H هي مرجح الجملة } A; -2, B; -1, C; 2$$

:

(2-3) المجموعة Γ_1

- H هي مرجح الجملة $A; -2, B; -1, C; 2$ إذن : $-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} = -\vec{MH}$
- $\vec{MB} - \vec{MC} = \vec{CM} + \vec{MB} = \vec{CB}$
- إذن M تنتمي إلى Γ_1 إذا وفقط إذا كان $-\vec{MH} \bullet \vec{CB} = 0$ ، نستنتج Γ_1 هي المستوي الذي يشمل النقطة H و $\vec{BC}$ هو شعاع ناظمي له.

(3-3) المجموعة Γ_2

- H هي مرجح الجملة $A; -2, B; -1, C; 2$ إذن : $-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} = -\vec{MH}$
- إذن : M تنتمي إلى Γ_2 إذا وفقط إذا كان $\|\vec{MH}\| = \sqrt{29}$ ، نستنتج أن Γ_2 هي الكرة التي مركزها H و نصف قطرها $\sqrt{29}$.

التمرين 04 الجزء الأول

- (1) $a; b; c; \vec{n}$ هو في نفس الوقت شعاع ناظمي للمستوي P و شعاع توجيهي للمستقيم Δ الذي يشمل I و يعامد P .

Δ يكافئ $M(x; y; z) \in \Delta$ يوازي $\vec{IM}$ أي يوجد عدد

$$* \dots \begin{cases} x = x_I + ta \\ y = y_I + tb \\ z = z_I + tb \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x - x_I = ta \\ y - y_I = tb \\ z - z_I = tb \end{cases} \text{ حيث } \vec{IM} = t\vec{n} \text{ ، إذن } t \text{ حقيقي}$$

الجملة * تشك تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ .

- (2)(1-2) H و I نقطتان من Δ ، إذن $\vec{IH}$ يوازي $\vec{n}$ لأن $\vec{n}$ شعاع توجيهي لـ Δ إذن يوجد عدد حقيقي k حيث $\vec{IH} = k\vec{n}$

$$\begin{cases} x_H = x_I + ka \\ y_H = y_I + kb \\ z_H = z_I + kb \\ ax_H + by_H + cz_H + d = 0 \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} \vec{IH} = k\vec{n} \\ H \in P \end{cases} \quad (2-2)$$

و منه $ax_I + ka + by_I + kb + cz_I + kb + d = 0$

أي $ax_I + ka^2 + by_I + kb^2 + cz_I + kb^2 + d = 0$

أي $ka^2 + b^2 + c^2 = -ax_I + by_I + cz_I + d$

لدينا $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ لأن $a; b; c \neq 0; 0; 0$ إذن $k = \frac{-ax_I + by_I + cz_I + d}{a^2 + b^2 + c^2}$

$$\|\vec{IH}\| = |k| \times \|\vec{n}\| = |k| \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \left| \frac{-ax_I + by_I + cz_I + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (3-2)$$

$$\cdot \|\vec{IH}\| = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{منه}$$

الجزء الثاني

المستوي Q الذي معادلته $x - y + z - 11 = 0$ مماس للكرة S الذي مركزها $\Omega(1; -1; 3)$.
(4) نصف القطر r للكرة S يساوي المسافة بين Ω و Q ، و بتطبيق نتيجة الجزء الأول ، نجد :

$$r = \frac{|x_{\Omega} - y_{\Omega} + z_{\Omega} - 11|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = 2\sqrt{3}$$

(2) $\vec{n}(1; -1; 1)$ شعاع ناظمي للمستوي Q .

$\vec{n}(1; -1; 1)$ يوازي $\vec{\Omega M}$ $x-1; y+1; z-1$ يكافئ $M(x; y; z) \in \Delta$

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t - 1 \\ z = t + 3 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x - 1 = t \\ y + 1 = -t \\ z - 3 = t \end{cases} \quad \text{إذن أي} \quad \vec{\Omega M} = t \vec{n} \quad \text{حيث } t \text{ عدد حقيقي}$$

(3) النقطة T تقاطع الكرة S و المستوي Q ن هي نقطة تقاطع Q و المستقيم Δ

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t - 1 \\ z = t + 3 \\ t + 1 - (-t - 1) + t + 3 - 11 = 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t - 1 \\ z = t + 3 \\ x - y + z - 11 = 0 \end{cases} \quad \text{إذن إحداثيات } T \text{ تحقق الجملة :}$$

$$\cdot T(3; -3; 5) \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t - 1 \\ z = t + 3 \\ t = 2 \end{cases}$$

التمرين 05

(1-1) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء حيث $z = 2$ هي المستوي الذي يمر بالنقطة التي إحداثياتها $(0; 0; 2)$ و يوازي المستوي (xOy) ، هو المستوي (EFH) .

(2-1) للنقط A ، B و F نفس الفاصلة 1، إذن $M(x; y; z) \in ABF$ يكافئ $x = 1$.

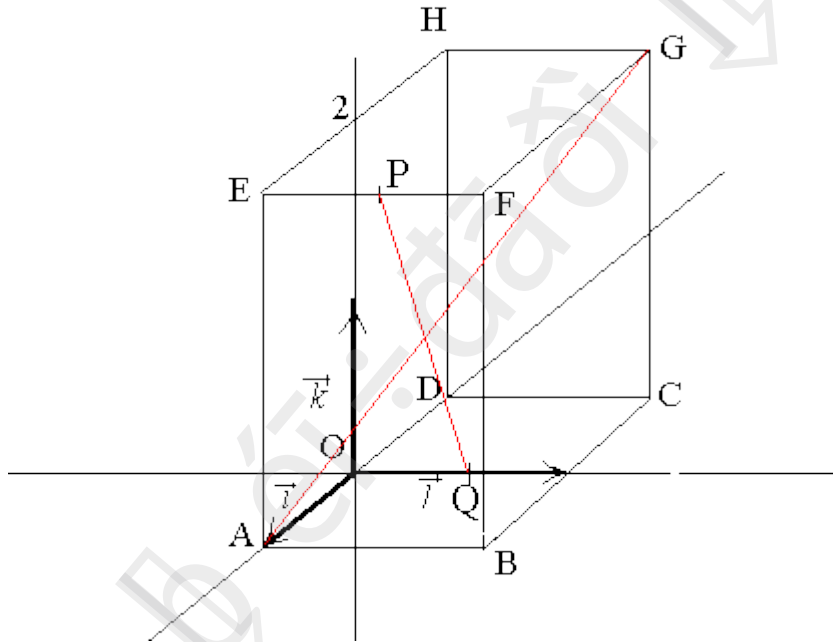
معادلة المستوي ABF هي $x = 1$.

(3-1) المستويان (ABF) و (EFH) متقاطعان وفق المستقيم (EF) .

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \end{cases} \text{ يكافئ } M(x; y; z) \in (ABF) \cap (EFH)$$

(2) ، (1-2) ، (2-2)

- $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ إذن $A(1; 0; 0)$.
- $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ إذن $G(-1; 1; 2)$.
- $E(1; 0; 2)$ و $F(1; 1; 2)$ إذن $P(1; \frac{1}{2}; 2)$.



(3-2) معادلة المستوي (APQ) من الشكل $ax + by + cz + d = 0$ و a, b, c, d هي أعداد

حقيقية حيث $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

النقط $A(1; 0; 0)$ ، $P(1; 1/2; 2)$ ، $Q(0; 1/2; 0)$ تنتمي على (APQ) ، إذن إحداثياتها تحقق معادلة (APQ) أي :

$$\begin{cases} a = -d \\ b = -2d \\ c = \frac{d}{2} \end{cases} \text{ منه } \begin{cases} a = -d \\ -d - d + 2c + d = 0 \\ b = -2d \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} a + d = 0 \\ a + \frac{b}{2} + 2c + d = 0 \\ \frac{b}{2} + d = 0 \end{cases}$$

نجد معادلة للمستوي (APQ) : $-d x + -2d y + \left(\frac{d}{2}\right)z + d = 0$

$$d \left(-x - 2y + \frac{z}{2} + 1 \right) = 0 \text{ أي}$$

بمأن $d \neq 0$ فإن $a; b; c \neq 0; 0; 0$ و منه $-x - 2y + \frac{z}{2} + 1 = 0$

$$\text{أي } 2x + 4y - z - 2 = 0 .$$

$2x + 4y - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (APQ) .

(3) (1-3)، (2-3)

$G \in APQ$ يكافئ إحداثيات G تحقق معادلة المستوي APQ .

لدينا $G(-1; 1; 2)$ و $-2 + 4 - 2 - 2 \neq 0$ إذن $G \notin APQ$.

(4) $G \notin APQ$ إذن المستوي APQ لا يشمل المستقيم AG ، A هي النقطة المشتركة الوحيدة بين APQ و AG .

النقط A ، P و Q ليست على استقامة واحدة لا توجد أي نقطة مشتركة للمستقيمين (AG) و (PQ) (لا يوجد أي مستوي يشمل (AG) و (PQ) في آن واحد).

التمرين 06

(1) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي الذي معادلته $x + y - 3z + 4 = 0$.
شرح :

$D \in M \text{ يعني } x; y; z \in D$ أي يوجد عدد حقيقي k $\vec{SM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z \end{pmatrix}$ يوازي $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\text{حيث } \vec{SM} = k \vec{n} \text{ إذن : } \begin{cases} x-1 = k \\ y+2 = k \\ z = -3k \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = 1+k \\ y = -2+k \\ z = -3k \end{cases}$$

$$\text{نضع } k = t + 1 \text{ و نجد } \begin{cases} x = 1+k = 2+t \\ y = -2+k = -1+t \\ z = -3k = -3-3t \end{cases}$$

الجواب الصحيح هو الجواب 4 .

شرح آخر:

نعبر عن إحداثيات الشعاع $\vec{SM}$ بدلالة t في كل حالة :

الجواب 1	الجواب 2	الجواب 3	الجواب 4
$\overrightarrow{SM} \begin{pmatrix} t \\ 3-2t \\ -3 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{SM} \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ 1-3t \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{SM} \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ 3t \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{SM} \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ -3-3t \end{pmatrix}$

الشعاع الوحيد الذي يوازي $\vec{n} = 1; 1; -3$ هو الشعاع $\overrightarrow{SM}$ في الجواب 4 : $\overrightarrow{SM} = 1 + t \vec{n}$.

(2) الإحداثيات $x; y; z$ للنقطة H تقاطع المستقيم D و المستوي P تحقق :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$$

$$2 + t + -1 + t - 3 - 3 - 3t + 4 = 0 \quad x + y - 3z + 4 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{8}{11} \\ y = -\frac{25}{11} \\ z = \frac{9}{11} \end{cases} \quad \text{و نستنتج} \quad \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases} \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} t = -\frac{14}{11} \end{cases}$$

الجواب الصحيح هو الجواب 4 .

(3) المسافة بين النقطة S و المستوي P هي : $\frac{|1 - 2 - 3 \times 0 + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2}}$ أي $\frac{3}{\sqrt{11}}$.

الجواب الصحيح هو الجواب 2 .

(4) المسافة بين S و P أقصر من نصف قطر الكرة، إذن تقاطع المستوي P و الكرة هي الدائرة التي مركزها H (H هي المسقط العمودي لـ S على P) و نصف قطرها

$$r = 3\sqrt{\frac{10}{11}} \quad \text{أي} \quad r = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2}$$

الجواب الصحيح هو الجواب 2 .

التمرين 07

(1) القطران (HF) و (EG) للمربع EFGH متعامدان.
المستقيم (EA) يعامد المستوي (EFH) إذن (EA) يعامد المستقيم (HF) المحتواة في (EFH).
المستقيم (HF) الذي يعامد (EG) و (EA)، يعامد المستوي (AEG) (المستوي (AEG) يشمل المستقيمين (EG) و (EA))
(HF) يعامد كل مستقيمتين المستوي (AEG) و بالخصوص (HF) يعامد (AG).

(2)

$$(2-1) \quad \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = -EA^2 + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EF} = -a^2 + 0 = -a^2$$

لأن $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{EF}$ متعامدان.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = 0 + EA^2 = a^2$$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$ و منه $\overrightarrow{BC}$ يعامد $\overrightarrow{AF}$ إذن $\overrightarrow{BC}$ يعامد المستوي (AEF).

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF} = -a^2 + a^2 + 0 = 0 \quad (2-2)$$

إذن $\overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{AF}$ متعامدان.

التمرين 08

$$(1) \quad \begin{cases} X_1 = 3 - 4\alpha \\ Y_1 = -2 + \alpha \\ Z_1 = -1 + \alpha \end{cases} \quad \text{نقطة من } (D_1) \text{ إذن } A_1(X_1; Y_1; Z_1)$$

$$\begin{cases} X_2 = -6\beta \\ Y_2 = 1 + \beta \\ Z_2 = 2 + 2\beta \end{cases} \quad \text{نقطة من } (D_2) \text{ إذن } A_2(X_2; Y_2; Z_2)$$

$$\begin{cases} X_2 - X_1 = -3 + 4\alpha - 6\beta \\ Y_2 - Y_1 = 3 - \alpha + \beta \\ Z_2 - Z_1 = 3 - \alpha + 2\beta \end{cases} \quad \text{إحداثيات الشعاع } \overrightarrow{A_1A_2} \text{ هي}$$

$$\overrightarrow{u_1}(-4; 1; 1) \text{ هو شعاع توجيه للمستقيم } (D_1)$$

$$\overrightarrow{u_2}(-6; 1; 2) \text{ هو شعاع توجيه للمستقيم } (D_2).$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \text{ المستقيم } (A_1A_2) \text{ يعامد } (D_1) \text{ و } (D_2) \text{ إذا و فقط إذا كان}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases} \text{ نجد } \begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 2 \\ 27\alpha - 41\beta = 27 \end{cases} \text{ أي}$$

نستنتج أن $\overrightarrow{A_1A_2}(1;2;2)$ إذن $A_1(0;1;2)$ ، $A_1(-1;-1;0)$

المستقيم (Δ) الذي يعامد (D_1) و (D_2) و المستقيم (A_1A_2) الذي يمر بالنقطة $A_1(-1;-1;0)$ و شعاع توجيهه $\overrightarrow{A_1A_2}(1;2;2)$.

نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء تنتمي إلى المستقيم (Δ) يعني $\overrightarrow{A_1M} = t \overrightarrow{A_1A_2}$ ($t \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x = -1+t \\ y = -1+2t \\ z = 2t \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x+1=t \\ y+1=2t \\ z-0=2t \end{cases}$$

$$\text{هو تمثيل وسيطي للمستقيم } (\Delta) \text{ المطلوب. } \begin{cases} x = -1+t \\ y = -1+2t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$(2) \text{ اقصر مسافة بين المستقيمين } (D_1) \text{ و } (D_2) \text{ هي } \|\overrightarrow{A_1A_2}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

التمرين 09

(1) المثلث BCD قائم في C : نجد $BD = \sqrt{2}$ باستعمال مبرهنة فيثاغورس.

المثلث FBD قائم في B : نجد $FD = \sqrt{3}$ باستعمال مبرهنة فيثاغورس.

نجد بنفس الطريقة أن $BH = \sqrt{3}$.

(2) نحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OH}$ بطريقتين مختلفتين :

$$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OH} = \frac{1}{4} \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BH} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF}) \cdot \overrightarrow{BH} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BH}) \cdot$$

$$\cdot \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OH} = \frac{1}{4} (-DB^2 + BF^2) = -\frac{1}{4}$$

$$\cdot \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OH} = OF \times OH \times \cos \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha \cdot$$

نستنتج أن $\frac{3}{4} \cos \alpha = -\frac{1}{4}$ أي $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ و الحاسبة تعطينا $\alpha \approx 109^\circ$.

(3) نبين أن $\overrightarrow{FD}$ يعامد شعاعين من المستوي (EGB) :

• نبين أن $\overrightarrow{FD}$ يعامد $\overrightarrow{GE}$:
 $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{GE} = (\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HD}) \cdot \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{GE}$
 $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{GE} = -FG^2 + GH^2 + 0 = 0$
 • نحسب بنفس الطريقة $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{GB} = 0$ نجد

نستنتج أن المستقيم (FD) يعامد المستوي (EGB) .

(4) $\overrightarrow{FD}(-1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (EGB) إذن (EGB) يقبل معادلة ديكارتية من الشكل $-x + y - z + d = 0$. بمأن النقطة $B(1;0;0)$ تنتمي إلى المستوي (EGB) فإن $d = 1$.
 نستنتج أن $-x + y - z + 1 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (EGB) .

(5) المسافة بين النقطة $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ والمستوي (EGB) هي : $\frac{\left|-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

