

تقارين - محولة

5^{min} Maths



الأعداد المركبة

● للشعب العلوية



” من تقديم الأستاذ شعبان أسامة

تمارين محلولة في الأعداد المركبة

١. المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

لتكن في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = 0 \dots (E)$

حل المعادلة (E) علما أنها تقبل حلين صنفين مترافقين.

٢. نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها على الترتيب: $z_A = -i\sqrt{3}$, $z_B = 3 + 2i\sqrt{3}$ و $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$.

1. عين الكتابة الأسية للعدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

2. عين زاوية الدوران r الذي مركزه A ويحول B الى C ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3. عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

4. أ- عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

ب- عين z_D لاحقة النقطة D صورة A بالتحويل T .

نعتبر المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. أ- نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها على الترتيب: $a = 2$, $b = 3 + i\sqrt{3}$ و $c = 2i\sqrt{3}$. حدد قياس الزاوية $\hat{ABC}$.

ب- استنتج أن ω لاحقة النقطة Ω مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC هي $1 + i\sqrt{3}$.

2. لتكن (z_n) المتتالية المعرفة كما يلي:
$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2 \end{cases}$$
 من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، نضع النقطة A_n التي لاحقتها z_n .

أ- بين أن النقط A_2, A_3, A_4 هي النقط التي لاحقتها على التوالي $3 + i\sqrt{3}$, $2 + 2i\sqrt{3}$ و $2i\sqrt{3}$.

(لاحظ أن: $A_1 = A$, $A_2 = B$, و $A_4 = C$).

ب- قارن أطوال القطع $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ و $[A_3A_4]$.

3. أ- بين أن من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (z_n - \omega)$.

ب- استنتج أن A_{n+1} هي صورة A_n بتحويل يطلب تحديد طبيعته وعناصره المميزة.

ج- بين أن من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $A_{n+6} = A_n$ ثم حدد لاحقة A_{2012} .

د- حدد طول القطعة $[A_n A_{n+1}]$.

I- نعتبر العدد المركب $Z = 2 + \sqrt{3} + i$.

1. بين أن طولية Z هي $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

2. تحقق من أن: $Z = 2 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] + 2i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

3. أ- باستعمال قوانين موافرين أن: $1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)$.

ب- بين أن: $Z = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4i \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (نذكر أن: $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$) ثم أكتب العدد

المركب Z على شكله المثلثي.

ج- بين أن: $Z^6 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 i$.

II- نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقطتين Ω و P اللتين لاحقتهما

$\omega = \sqrt{3}$ و Z على الترتيب ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته 2.

1. بين أن d لاحقة النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هي $(4 + \sqrt{3}) + 2i$.

2. حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $|z - 4 - \sqrt{3} - 2i| = |Z|$.

التورين الرابع:

في كل حالة من الحالات الخمس الآتية اقترحت أربع اجابات، اجابة واحدة فقط منها صحيحة ، حددها مع التعليل:

①. z عدد مركب يحقق $|z| + \bar{z} = 6 + 2i$ ، الشكل الجبري للعدد هو:

أ- $\frac{8}{3} - 2i$ ، ب- $-\frac{8}{3} - 2i$ ، ج- $\frac{8}{3} + 2i$ ، د- $-\frac{8}{3} + 2i$.

②. في المستوي المركب، مجموعة النقط M ذات اللاحقة $z = x + iy$ التي تحقق: $|z - 1| = |z + i|$ هي المستقيم ذو المعادلة:

أ- $y = x - 1$ ، ب- $y = -x$ ، ج- $y = -x + 1$ ، د- $y = x$.

③. ليكن n عددا طبيعيا، العدد $(1 + i\sqrt{3})^n$ حقيقي معناه n من الشكل:

أ- $3k + 1$ ، ب- $3k + 2$ ، ج- $3k$ ، د- $6k$ ، حيث $k \in \mathbb{N}$.

④. نعتبر المعادلة $(E): z = \frac{6-z}{3-z}$ مع $z \in \mathbb{C}$ ، حل للمعادلة (E) هو:

أ- $-2 - i\sqrt{2}$ ، ب- $2 + i\sqrt{2}$ ، ج- $1 - i$ ، د- $-1 - i$.

5. لتكن A و B نقطتان لاحقتهما على الترتيب $z_A = i$ و $z_B = \sqrt{3}$ في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. اللاحقة z_c

لنقطة C بحيث يكون ABC مثلثا متقايس الأضلاع مع $(\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$ هي:

أ- $-i$ ، ب- $2i$ ، ج- $\sqrt{3} + i$ ، د- $\sqrt{3} + 2i$

التمرين الخامس:

ليكن z و z' عددان مركبان يحققان: $|z| = |z'| = 1$ و $z \cdot z' + 1 \neq 0$.

بين أن العدد $Z = \frac{z + z'}{1 + zz'}$ حقيقي.

التمرين السادس:

1. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث: $(a+i)^2 = 2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2 = 2-2i\sqrt{3}$.

2. أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $z^2 - 4z + 16 = 0$.

ب- استنتج في المجموعة $\mathbb{C}$ حلول المعادلة: $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$.

3. نعتبر العدد المركب z_k المعروف كما يلي: $z_k = \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ حيث k عدد صحيح.

أ- بين أن: $z_k = \frac{i}{2^{k-1}} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ ثم استنتج أن: $z_{2013} = 0$.

ب- أكتب العدد z_{2015} على الشكل $i\sqrt{n}$ حيث n عدد طبيعي يطلب تحديده.

4. المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B ذات الاحقتين على الترتيب:

$z_A = 2 + 2i\sqrt{3}$ و $z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$ لتكن C النقطة ذات اللاحقة: $z_c = 5 - 2^{2015} z_{2015}$

أ- تحقق أن: $z_c = \frac{3}{2} z_B + z_B$.

ب- بين أن: $\frac{z_B - z_c}{z_A - z_c} = -2^{2015} z_{2015}$ ثم عين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة A الى B معينا عناصره المميزة ثم جد

العبارة المركبة له.

5. لتكن A_0 النقطة ذات اللاحقة $z_0 = \sqrt{3} - i$ من أجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1} = f(A_n)$ حيث z_n لاحقة A_n .

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = A_0 A_1 \\ u_n = A_n A_{n+1} \end{cases}$ من أجل كل عدد طبيعي n . $(A_0 A_1)$ يمثل الطول بين النقطتين

أ- بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول u_0 وأساسها q .

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n .

أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

1. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$.
2. استنتج حلول المعادلة: $0 = 2 - 2\left(\frac{1}{z} + 1\right) + 2$ حيث $\bar{z}$ هو مرافق z .
3. في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 1+i$ ' $z_B = 1-i$ و $z_C = 1+\sqrt{3}$.
- أ- أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل الأسّي للعديدين $\frac{1}{z_B}$ و $(z_A)^{2019}$.
- ب- عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $0 = |z-1-i| - |z-1+i|$.
- ج- عين طولية وعمدة العدد المركب L حيث: $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
- د- عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .
4. عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $0 = (\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) \cdot (\overline{MA} - \overline{MB})$.

التمرين الثامن:

- المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$. ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = \frac{1}{2}(1+i)z + 1$.
1. برر أن f تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة.
 2. نسمي A_0 النقطة O و من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $A_{n+1} = f(A_n)$.
 - أ- عين لاحقات النقط A_1, A_2, A_3 .
 - ب- من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $u_n = \Omega A_n$ حيث Ω مركز التحويل النقطي f .
 - بين أن المتتالية (u_n) هندسية ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$.
 - ج- ابتداء من أي رتبة n_0 تنتمي كل النقط A_n الى القرص الذي مركزه Ω ونصف قطره 1, 0 ؟
 3. ما طبيعة المثلث $\Omega A_0 A_1$ ؟ استنتج من أجل كل عدد طبيعي n ، طبيعة المثلث $\Omega A_n A_{n+1}$.
 4. من أجل كل عدد طبيعي n ، نرمز بالرمز I_n الى طول الخط المنكسر الذي يشمل النقط $A_0 A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$.
 - وعليه: $I_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$.
 - عبر عن I_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

التورين التاسع:

من أجل كل عدد مركب يختلف عن $-1+i$ ، نضع: $z' = \frac{2z-i}{z+1-i}$ حيث $z = x+iy$.

نعتبر المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط C, B, A التي للاحقاتها على الترتيب

$$-1+i, \frac{1}{2}i \text{ و } -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i.$$

1. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $\bar{z}' = -2$.

2. حدد $\text{Re}(z')$ و $\text{Im}(z')$ بدلالة x و y .

3. حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' حقيقيا.

4. حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $|z'| = 2$.

5. بين أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في C .

التورين العاشر:

نضع من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = z^3 - (1-2\sin\alpha)z^2 + (1-2\sin\alpha)z - 1$ ، حيث α وسيط حقيقي.

1. أ- احسب $P(1)$.

ب- عين الأعداد الحقيقية c, b, a حيث $P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$.

2. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

3. ليكن z_1, z_2, z_3 حلول المعادلة $P(z) = 0$ حيث $z_1 = 1$.

أ- عين طولية وعمدة الأعداد z_1, z_2, z_3 .

ب- من أجل أي قيمة للوسيط α تكون كل من $|z_1|, |z_2+1|$ و $|z_3-1|$ بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية.

التورين الحادي عشر:

من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $S_n = (1+i)^n + (1-i)^n$.

1. عين الشكل المثلثي للعدد S_n .

2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، S_n عدد حقيقي.

التورين الثاني عشر:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 3+i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3-i\sqrt{3}$ و $z_C = -\sqrt{3}+3i$.

1. أكتب العدد z_A على الشكل الأسّي ثم إستنتج الشكل الأسّي للعدد z_B .

2. n عدد طبيعي، L_n هو العدد المركب المعرف بما يلي : $L_n = \left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n$ ، أحسب L_n بدلالة n ثم إستنتج قيمة L_{2018} يكتب على الشكل الجبري .

3. تحقق أنّ : $z_C = i z_A$ ثم إستنتج طبيعة المثلث OAC .

4. لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\arg(3+i\sqrt{3}-z) - \arg(-\sqrt{3}+3i-z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

مع $k \in \mathbb{Z}$ ، تحقق أنّ النقطه O تنتمي إلى (Γ) ثم عين طبيعتها .

5. نعتبر النقطه D ذات اللاحقة $\overline{z_D} = z_C$ ، بين أنّ المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان .

6. لتكن النقطه E ذات اللاحقة $z_E = 3 - \sqrt{3}$ ، التشابه المستوي المباشر الذي مركزه E ويحول النقطه A

إلى النقطه C . عين نسبة وزاوية التشابه S ، ثم إستنتج أنّ النقط A ، E ، O و C تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathcal{C})$ يطلب تعيين عناصرها.

التمرين الثالث عشر:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $(z-4)(z^2-4z+8)=0$.

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C ، D و E التي لواحقتها على الترتيب :

$$z_A = 2 - 2i , z_B = 4 , z_C = \overline{z_A} , z_D = -z_A , z_E = -6 - 2i$$

(أ) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي ، ثم إستنتج أنّ النقطه C هي صورة النقطه B بالتشابه المستوي المباشر S

الذي مركزه النقطه A ، يطلب تعيين نسبة وزاوية التشابه S .

(ب) تحقق أنّ النقطه D هي مرجح الجملة المثقله $\{(A;1), (B;-2), (C;2)\}$.

(ج) (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|(1+i)z+4|=8$

تحقق أنّ النقطه A تنتمي إلى (Γ) ، ثم عين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميّزة .

(د) تحقق أنّ $S(D) = E$ ، ثم بين أنّ الدائرة (Γ') التي مركزها E ونصف قطرها AE هي صورة (Γ) بالتشابه S .

حلول التمارين

١. لتكن في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(E) z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = 0 \dots$

حل المعادلة (E) علما أنها تقبل حلين صريين مترافقين

لدينا: $(E) z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = 0 \dots$

نفرض أن: αi و $-\alpha i$ هما الحلان الصريان المترافقان مع $\alpha \in \mathbb{R}$.

وعليه لدينا من أجل كل عدد مركب z :

$$P(z) = (z - \alpha i)(z + \alpha i)(az^2 + bz + c)$$

$$P(z) = (z^2 + \alpha^2)(az^2 + bz + c)$$

$$P(z) = az^4 + bz^3 + (\alpha^2 a + c)z^2 + \alpha^2 bz + c\alpha^2$$

$$\alpha^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt{3} \\ \alpha = -\sqrt{3} \end{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ \alpha^2 a + c = 24 \Rightarrow a = 1, b = -6, \alpha^2 = 3, c = 21 \\ \alpha^2 b = -18 \\ \alpha^2 c = 63 \end{cases}$$

بالمطابقة ينتج: $a = 1, b = -6, \alpha^2 = 3, c = 21$

$$P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$$

$$P(z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (z^2 + 3) = 0 \Rightarrow z = i\sqrt{3}, z' = -i\sqrt{3} \\ (z^2 - 6z + 21) = 0 \Rightarrow z = 3 - 2i\sqrt{3}, z' = 3 + 2i\sqrt{3} \end{cases}$$

اذن:

$$S = \{-i\sqrt{3}, 3 - 2i\sqrt{3}, i\sqrt{3}, 3 + 2i\sqrt{3}\}$$

٢. نعتبر النقط C, B, A التي لواحقها على الترتيب: $z_A = -i\sqrt{3}, z_B = -3 + 2i\sqrt{3}, z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$.

١. عين الكتابة الأسية للعدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

$$z_C - z_A = 3 + 3i\sqrt{3} = 6e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$z_B - z_A = -3 + 3i\sqrt{3} = 6e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$

وعليه

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{6e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}}{6e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}} = e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$$

٢. تعيين زاوية الدوران r الذي مركزه A ويحول B الى C .

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{6e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}}{6e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}} = e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)} \quad \text{لدينا:}$$

$$z_C - z_A = (z_B - z_A) e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$$

وهذا يعني: أن النقطة C هي صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

استنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \Rightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow (AC = AB)$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\frac{-\pi}{3}\right) \Rightarrow (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = \left(\frac{-\pi}{3}\right)$$

تعني: أن $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$

وهذا نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3. تعين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = i\sqrt{3}$$

4. أ- تعين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

لدينا: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ ومنه: $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MG}$ باستعمال علاقة شال نجد: $\overrightarrow{GM'} - \overrightarrow{GM} = 3\overrightarrow{MG}$

وبالتالي: $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$ نستنتج أن النقطة M' هي صورة نقطة M بالتحاكي الذي مركزه النقطة G ونسبته -2

من العلاقة: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ يكون لدينا:

$$z' - z = (z_A - z) + (z_B - z) + (z_C - z)$$

$$z' = -2z + (z_A + z_B + z_C) \quad \text{أي:}$$

$$z' = -2z + 3z_G$$

ب- تعين z_D لاحقة النقطة D صورة A بالتحويل T .

$$z_D = -2z_A + 3z_G$$

$$z_D = 5i\sqrt{3} \quad \text{أي:}$$

حل التمرين الثاني:

1. أ- تحدد قيس الزاوية $\hat{ABC}$. نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها على الترتيب: $a = 2, b = 3 + i\sqrt{3}, c = 2i\sqrt{3}$.

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)$$

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}}{2-3-i\sqrt{3}}$$

لدينا:

$$= -i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}$$

$$\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right) = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$$

ب-استنتاج أن ω لاحقة النقطة Ω مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC هي $1+i\sqrt{3}$.

بما أن المثلث ABC قائم في B فإن $[AC]$ يمثل قطر الدائرة المحاطة بالمثلث ABC وبالتالي: $\omega = \frac{a+c}{2} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}$

2. لتكن (z_n) المتتالية المعرفة كما يلي: $\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2 \end{cases}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، نضع A_n النقطة التي لاحقتها z_n .

أ-بين أن النقط A_2, A_3, A_4 هي النقط التي لاحقتها على التوالي $3+i\sqrt{3}$ ، $2+2i\sqrt{3}$ و $2i\sqrt{3}$.

(لاحظ أن: $A_1 = A$ ، $A_2 = B$ ، و $A_4 = C$).

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_0 + 2 = 2 = a$$

$$z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_1 + 2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (2) + 2 = 1+i\sqrt{3} + 2 = 3+i\sqrt{3} = b$$

$$z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_2 + 2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (3+i\sqrt{3}) + 2 = 2+2i\sqrt{3}$$

$$z_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_3 + 2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (2+2i\sqrt{3}) + 2 = 2i\sqrt{3} = c$$

ب-مقارنة أطوال القطع $[A_1A_2]$ ، $[A_2A_3]$ و $[A_3A_4]$.

$$A_3A_4 = |z_4 - z_3| = 2 \quad A_2A_3 = |z_3 - z_2| = 2 \quad A_1A_2 = |z_2 - z_1| = 2$$

اذن: $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$

3. أ-اثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (z_n - \omega)$

$$\begin{aligned} z_{n+1} - \omega &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2 - 1 - i\sqrt{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 1 - i\sqrt{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (z_n - (1+i\sqrt{3})) \\ &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (z_n - \omega) \end{aligned}$$

ليكن n من $\mathbb{N}$

ب-استنتاج أن A_{n+1} هي صورة A_n بتحويل يطلب تحديد طبيعته وعناصره المميزة.

$$z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega) \quad \text{بما أن :}$$

$$z_{n+1} - \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_n - \omega) \quad \text{أي:}$$

فان A_{n+1} هي صورة A_n بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

ج- اثبات أن من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $A_{n+6} = A_n$

$$v_n = -\omega \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^n = -\omega e^{i\frac{n\pi}{3}} \quad \text{نضع: } v_n = z_n - \omega \quad \text{لدينا: } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ وحدها الأول } v_0 = -\omega \quad \text{اذن:}$$

$$z_n = \omega - \omega e^{i\frac{n\pi}{3}}$$

$$z_{n+6} = \omega - \omega e^{i\frac{(n+6)\pi}{3}} = \omega - \omega e^{i\frac{(n+6)\pi}{3}} = \omega - \omega e^{i\frac{n\pi}{3}} e^{i2\pi} = \omega - \omega e^{i\frac{n\pi}{3}} = z_n$$

$$e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1 \quad \text{ومنه:}$$

$$z_{2012} = \omega - \omega e^{i\frac{(2012)\pi}{3}} = z_2 = 3 + i\sqrt{3}$$

د- تحدد طول القطعة $[A_n A_{n+1}]$:

$$d_n = A_n A_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| \quad \text{نضع}$$

$$d_n = d_1 = A_1 A_2 = 2 \quad \text{بحساب } d_{n+1} \text{ نجد: } d_{n+1} = d_n \quad \text{اذن: } (d_n) \text{ متتالية ثابتة ومنه:}$$

$$A_n A_{n+1} = 2$$

حل التمرين الثالث:

1- نعتبر العدد المركب $Z = 2 + \sqrt{3} + i$.

1. بين أن طويته Z هي $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

$$|Z| = |2 + \sqrt{3} + i| = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$2. \text{التحقق من أن: } Z = 2 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] + 2i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$Z = 2 + \sqrt{3} + i = 2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + i \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) + 2i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$3. \text{أ- اثبات أن: } 1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)$$

نعلم أن:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\cos^2(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2i\theta} + 2e^{2i\theta} \cdot e^{-2i\theta} + e^{-2i\theta}}{4} = \frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4} \quad \text{ومن هنا:}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} + 1 \right) = \frac{1}{2} [\cos(2\theta) + 1]$$

$$\Rightarrow 1 + \cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta)$$

$$Z = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4i \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{ب- اثبات أن:}$$

$$(\sin(2\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta) : \text{نذكر أن})$$

$$Z = 2 \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) + 2i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{12}\right) \right) + 2i \sin\left(\frac{2\pi}{12}\right)$$

$$= 2 \times 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + i 2 \times 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{لدينا:}$$

$$= 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4i \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= 4 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right]$$

كتابة العدد المركب Z على شكله المثلثي: بما أن:

$$4 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0 \Rightarrow |Z| = 4 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$Z = 4 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right]$$

$$\text{ج- اثبات أن: } Z^6 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^6 i$$

$$Z^6 = \left(|Z| \left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right] \right)^6$$

$$= |Z|^6 \times \left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right]^6$$

$$= \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^6 \left[\cos\left(\frac{6\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{6\pi}{12}\right) \right] \quad \text{ومن هنا حسب موافق:}$$

$$= \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^6 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$Z^6 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^6 i$$

II- نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقطتين Ω و P اللتين لاحقتهما

$\omega = \sqrt{3}$ و Z على الترتيب ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته 2.

1. البرهان على أن d لاحقة النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هي $(4 + \sqrt{3}) + 2i$.

$$\begin{aligned} d - \omega &= 2(p - \omega) \\ \text{أي: } d &= 2p - \omega \quad \text{اذن : لاحقة النقطة } D \text{ صورة النقطة } P \text{ بالتحاكي } h \text{ هي } (4 + \sqrt{3}) + 2i. \\ d &= (4 + \sqrt{3}) + 2i \end{aligned}$$

2. تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z - 4 - \sqrt{3} - 2i| = |Z|$.

$$|z - d| = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \quad \text{تكافئ : } |z - 4 - \sqrt{3} - 2i| = |Z|$$

اذن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z هي دائرة مركزها النقطة D ونصف قطرها $4(2 + \sqrt{3})$.

حل التمرين الرابع:

①. z عدد مركب يحقق $\bar{z} + |z| = 6 + 2i$.

$$\frac{8}{3} + 2i + \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2} + 4 = \frac{8}{3} + 2i + \frac{10}{3} = 6 + 2i \quad \text{يكفي التعويض في الشكل الجبري في العلاقة المعطاة نجد:}$$

$$\frac{8}{3} - 2i \quad \text{الشكل الجبري للعدد هو:} \quad \text{الاجابة (أ)}$$

②. ليكن عدد مركب z ، نضع $z = x + iy$.

$$|z - 1| = |z + i| \quad \text{معناه:}$$

$$\begin{aligned} |z - 1|^2 &= |z + i|^2 \\ (x - 1)^2 + y^2 &= x^2 + (y + 1)^2 \quad \text{أي:} \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 &= x^2 + y^2 + 2y + 1 \\ y &= -x \end{aligned}$$

الاجابة (ب)

③. n عدد طبيعي،

$$|1+i\sqrt{3}|=2$$

$$1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

أي:

$$(1+i\sqrt{3})^n=2^n\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

العدد $(1+i\sqrt{3})^n$ حقيقي معناه: $2^n \sin \frac{n\pi}{3} = 0 \Rightarrow \frac{n\pi}{3} = k\pi$ الاجابة (ج).

$$n=3k, (k \in \mathbb{N})$$

4. حل للمعادلة (E):

$$z = \frac{6-z}{3-z} \Leftrightarrow \frac{z(3-z)}{3-z} = \frac{6-z}{3-z} \Leftrightarrow 3z - z^2 = 6 - z$$

ومنه:

$$\Rightarrow z^2 - 4z + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 + i\sqrt{2} \\ z_2 = 2 - i\sqrt{2} \end{cases}$$

الاجابة (ب)

5. لتكن A و B نقطتان لاحتهما على الترتيب $z_A = i$ و $z_B = \sqrt{3}$ في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. اللاحقة z_c للنقطة C بحيث يكون ABC مثلثا متقايس الأضلاع مع $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ هي:

ABC مثلث متقايس الأضلاع اذا كانت C هي صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

$$z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$$

بعد النشر نجد: $z_C = \sqrt{3} + 2i$ الاجابة (د).

$$z_C - i = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} - i)$$

حل التمرين الخامس:

ليكن z و z' عدنان مركبان يحققان: $|z|=|z'|=1$ و $z.z'+1 \neq 0$.

$$Z = \frac{z+z'}{1+zz'} \text{ حقيقي معناه: } Z = \overline{Z}$$

$$\overline{Z} = \overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)} = \frac{\overline{z} + \overline{z'}}{\overline{1+zz'}} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}}{1 + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z'}} = \frac{\frac{z+z'}{zz'}}{1 + \frac{1}{zz'}} = \frac{z+z'}{1+zz'}$$

اذن: $\overline{Z} = Z$

وبالتالي: العدد $Z = \frac{z+z'}{1+zz'}$ حقيقي

1. تعين العددين الحقيقيين a و b بحيث: $(a+i)^2 = 2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2 = 2-2i\sqrt{3}$.

لدينا: بالمطابقة نجد: $(a+i)^2 = 2+2i\sqrt{3} \Rightarrow a^2 + 2ai - 1 = 2 + 2i\sqrt{3}$

$$2ai = 2i\sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

بنفس العملية: $(b-i)^2 = 2-2i\sqrt{3} \Rightarrow b^2 - 2bi - 1 = 2 - 2i\sqrt{3}$

$$-2bi = -2i\sqrt{3} \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

وبالتالي: $a = b = \sqrt{3}$.

2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 4z + 16 = 0$

$$z^2 - 4z + 16 = 0$$

$$\Delta = -48 = (4i\sqrt{3})^2$$

$$z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}, z_2 = 2 - 2i\sqrt{3} \text{ أي:}$$

$$S = \{2 + 2i\sqrt{3}; 2 - 2i\sqrt{3}\}$$

ب- استنتاج حلول المعادلة: $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$.

نضع: $z' = z^2$ المعادلة: $z'^2 - 4z' + 16 = 0$ تصبح: $z'^2 - 4z' + 16 = 0$

$$z_1^2 = z_1' = 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$z_2^2 = z_2' = 2 - 2i\sqrt{3} \text{ معناه مما سبق:}$$

علينا حساب الجذران التربيعيان لكل من: z_1' و z_2' .

نلاحظ من السؤال 1. لدينا: الجذر التربيعي للعدد $2 + 2i\sqrt{3}$ هو: $\sqrt{3} + i$ أو $-\sqrt{3} - i$

الجذر التربيعي للعدد $2 - 2i\sqrt{3}$ هو: $\sqrt{3} - i$ أو $-\sqrt{3} + i$.

وبالتالي: $S = \{\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} - i; \sqrt{3} - i; -\sqrt{3} + i\}$.

$$3. \text{ أ- لدينا: } z_k = \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$$

اثبات أن:

$$\begin{aligned}
z_k &= \left(\frac{1}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right)^k - \left(\frac{1}{4} - i \frac{\sqrt{3}}{4} \right)^k \\
z_k &= \left(\frac{1}{2} \right)^k \left[\left(\cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3} \right) - \left(\cos \frac{k\pi}{3} - i \sin \frac{k\pi}{3} \right) \right] \\
&= z_k = \frac{1}{2^k} 2i \sin \left(\frac{k\pi}{3} \right) \\
z_k &= \frac{i}{2^{k-1}} \sin \left(\frac{k\pi}{3} \right)
\end{aligned}$$

استنتاج أن: $z_{2013} = 0$

$$z_{2013} = \frac{i}{2^{2013-1}} \sin \left(\frac{2013\pi}{3} \right) = \frac{i}{2^{2012}} \sin(\pi) = 0$$

ب-كتابة العدد $-2^{2015} z_{2015}$ على الشكل $i\sqrt{n}$ حيث n .

$$\begin{aligned}
-2^{2015} z_{2015} &= -2^{2015} z_{2015} = -2^{2015} \frac{i}{2^{2014}} \sin \left(\frac{2015\pi}{3} \right) \\
&= -2i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) + 671\pi = -2i \sin \left(\frac{-\pi}{3} \right) = \sqrt{3}i
\end{aligned}$$

والتالي: $n = 3$

4. $z_A = 2 + 2i\sqrt{3}$ و $z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$ لتكن C النقطة ذات الاحقة: $z_c = 5 - 2^{2015} z_{2015}$

أ-التحقق أن: $z_c = \frac{3}{2} z_B + z_B$.

لدينا: $z_c = 5 - 2^{2015} z_{2015} = 5 + i\sqrt{3}$ ولدينا كذلك:

$$\begin{aligned}
z_c &= \frac{3}{2} z_B + z_B \\
&\text{أي:} \\
z_c &= \frac{3}{2} (2 + 2i\sqrt{3}) + (2 - 2i\sqrt{3}) = 5 + i\sqrt{3}
\end{aligned}$$

ب-اثبات أن:

$$\begin{aligned}
\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} &= -2^{2015} z_{2015} \\
\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} &= \frac{2 - 2i\sqrt{3} - 5 - i\sqrt{3}}{2 + 2i\sqrt{3} - 5 - i\sqrt{3}} = \frac{-3 - 3i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} \\
&= i\sqrt{3} = -2^{2015} z_{2015}
\end{aligned}$$

تعين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة A الى B .

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i\sqrt{3} \Leftrightarrow z_B - z_C = i\sqrt{3}(z_A - z_C)$$

اذن : التحويل النقطي f هو تشابه مباشر مركزه C ونسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{cases} |z_B - z_C| = \sqrt{3}|z_A - z_C| \\ \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CB = \sqrt{3}CA \\ (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

العبارة المركبة: تكتب من الشكل:

$$Z' = a'Z + b'$$

$$\begin{cases} a' = i\sqrt{3} \\ b' = z_C(1 - a') \Rightarrow b' = 8 - 4i\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow Z' = i\sqrt{3}Z + 8 - 4i\sqrt{3}$$

5. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = A_0.A_1 \\ u_n = A_n.A_{n+1} \end{cases}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ-بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول u_0 وأساسها q .

لدينا:

$$u_{n+1} = A_{n+1}A_{n+2} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = |i\sqrt{3}z_{n+1} + 8 - 4i\sqrt{3} - i\sqrt{3}z_n - 8 + 4i\sqrt{3}|$$

$$u_{n+1} = |i\sqrt{3}z_{n+1} - i\sqrt{3}z_n| = |i\sqrt{3}(z_{n+1} - z_n)| = |i\sqrt{3}||z_{n+1} - z_n| = \sqrt{3}u_n$$

وبالتالي:

$$\Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{3}u_n$$

اذن: $q = \sqrt{3}$ هو أساس هذه المتتالية وحدها الأول:

$$u_0 = A_0.A_1 = |z_1 - z_0| = |i\sqrt{3}z_0 + 8 - 4i\sqrt{3} - z_0|$$

$$z_0 = \sqrt{3} - i$$

نعلم أن:

$$u_0 = |i\sqrt{3}(\sqrt{3} - i) + 8 - 4i\sqrt{3} - (\sqrt{3} - i)| = \sqrt{128 - 32\sqrt{3}}$$

ب- استنتاج عبارة u_n بدلالة n : $u_n = u_0 \times q^n = (\sqrt{3})^n \sqrt{128 - 32\sqrt{3}}$

ج- حساب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

$$S_n = \sqrt{128 - 32\sqrt{3}} \left(\frac{1 - (\sqrt{3})^{n+1}}{1 - (\sqrt{3})} \right) = \left[\frac{\sqrt{128 - 32\sqrt{3}}}{1 - \sqrt{3}} \right] (1 - (\sqrt{3})^{n+1})$$

حل التمرين السابع:

1. حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$.

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$\Delta = -4 = 4i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2i \quad \text{أي:}$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1-i \\ z_2 = \overline{z_1} = 1+i \end{cases} \Rightarrow S = \{1+i; 1-i\}$$

$$2. \text{ استنتاج حلول المعادلة: } \left(\frac{1}{z} + 1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{z} + 1\right) + 2 = 0$$

$$\text{نضع: } z' = \frac{1}{z} + 1 \quad \text{المعادلة تصبح: } z'^2 - 2z' + 2 = 0 \quad \text{تكافئ المعادلة: } z^2 - 2z + 2 = 0.$$

$$\begin{cases} z'_1 = \frac{2-2i}{2} = 1-i \\ z'_2 = \overline{z'_1} = 1+i \end{cases}$$

$$\frac{1}{z} + 1 = 1-i \Rightarrow \frac{1}{z} = -i \Rightarrow \frac{1}{z} = i \Rightarrow z_3 = -i \quad \text{ومنه:}$$

$$z_4 = \overline{z_3} = \overline{-i} = i$$

$$S = \{-i; i\}$$

3.

$$\text{لدينا: } z_A = 1+i \quad z_B = 1-i \quad \text{و } z_C = 1+\sqrt{3}$$

أ- أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي:

$$\begin{cases} |z_A| = \sqrt{2} \\ \arg(z_A) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow z_A = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_B = \overline{z_A} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{استنتاج الشكل الأسّي للعددين } \frac{1}{z_B} \text{ و } (z_A)^{2019}:$$

$$\frac{1}{z_B} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(z_A)^{2019} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2019} = (\sqrt{2})^{2019}e^{i\frac{2019\pi}{4}} \quad \text{وبالتالي:}$$

$$(z_A)^{2019} = (\sqrt{2})^{2019}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

ب- تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z-1-i| - |z-1+i| = 0$.

$$|z-1-i| - |z-1+i| = 0$$

$$|z-1-i| = |z-1+i|$$

لدينا: $|z-(1+i)| = |z-(1-i)|$ اذن مجموعة النقط هي محور القطعة $[AB]$.

$$|z_M - z_A| = |z_M - z_B|$$

$$AM = BM$$

ج- تعين طولية وعمدة العدد المركب L حيث: $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$

$$L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1+i-1-\sqrt{3}}{1-i-1-\sqrt{3}} = \frac{i-\sqrt{3}}{-i-\sqrt{3}} = \frac{(i-\sqrt{3})}{(-i-\sqrt{3})} \times \frac{(-\sqrt{3}+i)}{(-\sqrt{3}+i)}$$

$$L = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} |L| = \left| \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1 \\ \arg(L) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

ومنه نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

$$\begin{cases} \left| \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right| = 1 \Rightarrow CA = CB \\ \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

د-تعين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ ومنه نجد: } z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{1+i+1-i+1+\sqrt{3}}{3} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

4. تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0$

بما أن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1)(B;1)(C;1)\}$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

باستعمال علاقة شال لدينا: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

ومنه:

$$\begin{aligned} (3\overrightarrow{MG})(-\overrightarrow{AB}) &= 0 \\ -3(\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{AB}) &= 0 \Rightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{aligned} \quad \text{تصبح: } (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0$$

اذن مجموعة النقط هي المستقيم الذي يشمل النقطة G و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له.

حل التمرين الثامن:

$$1. \text{ لدينا: } z' = \frac{1}{2}(1+i)z + 1 \text{ حيث: } M(z) \xrightarrow{f} M'(z')$$

العبارة المركبة للتحويل النقطي f هي من الشكل: $z' = az + b$ حيث a عدد مركب غير معدوم و b عدد مركب

$$\text{لدينا: } a = \frac{1}{2}(1+i) \text{ ومنه: } a = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ نستنتج أن: } k = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{ومن جهة ثانية فان } \omega \text{ لاحقة النقطة } \Omega: \omega = \frac{b}{1-a} = 1+i.$$

اذن التحويل النقطي f هو تشابه مباشر نسبته $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{4}$ ومركزه النقطة Ω .

2. أ- نضع: $A_{n+1} = f(A_n)$ و منه $z_{n+1} = \frac{1}{2}(1+i)z_n + 1$

$$z_1 = \frac{1}{2}(1+i)z_0 + 1 \Rightarrow z_1 = 1$$

وعليه: $z_2 = \frac{1}{2}(1+i)z_1 + 1 \Rightarrow z_2 = \frac{1}{2}(3+i)$

$$z_3 = \frac{1}{2}(1+i)z_2 + 1 \Rightarrow z_3 = \frac{3}{2} + i$$

ب- من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $u_n = \Omega A_n$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega A_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Omega A_n \\ \left(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{\Omega A_{n+1}} \right) = \frac{\pi}{4} \end{array} \right. \text{ لدينا: } u_{n+1} = \Omega A_{n+1} \text{ و بما أن: } A_{n+1} = f(A_n) \text{ فإن:}$$

ومنه: $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} u_n$ نستنتج أن المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و حدها الأول $u_0 = \sqrt{2}$.

وبالتالي: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$

ج- تنتمي كل النقط A_n الى القرص الذي مركزه Ω و نصف قطره 0,1 اذا و فقط اذا $\Omega A_n \leq 0,1$

$$u_n \leq 0,1 \Rightarrow \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \leq 0,1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \leq \frac{0,1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \leq \ln \left(\frac{0,1}{\sqrt{2}} \right)$$

لأن: $\ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) < 0$ يعني: $n \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \leq \ln \left(\frac{0,1}{\sqrt{2}} \right)$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln \left(\frac{0,1}{\sqrt{2}} \right)}{\ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)}$$

بالتقريب نجد: $n \geq 7,57$ و منه $n_0 = 8$.

3.أ- طبيعة المثلث $\Omega A_0 A_1$:

المثلث $\Omega A_0 A_1$ قائم في A_1 و متساوي الساقين لأن: $\Omega A_1 = A_0 A_1 = 1$ و كذلك $(\Omega A_1) \perp (A_0 A_1)$.

من خواص التشابه المباشر نستنتج أن المثلث $\Omega A_n A_{n+1}$ قائم في A_{n+1} و متساوي الساقين.

4. لدينا: $I_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$ و منه: $I_n = \Omega A_1 + \Omega A_2 + \dots + \Omega A_n$

و بالتالي: $I_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

بما أن متتالية هندسية فان :

$$I_n = u_1 \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \right)$$

لأن $-1 < q < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

حل التمرين التاسع:

نضع: $z' = \frac{2z-i}{z+1-i}$ حيث $z = x+iy$.

1. حل المعادلة: $\bar{z}' = -2$ يعني: $\overline{\left(\frac{2z-i}{z+1-i} \right)} = -2$ معناه:

$$\frac{\overline{2z-i}}{\overline{z+1-i}} = -2 \Rightarrow 2\bar{z}-i = -2(\bar{z}+1-i)$$

$$\Rightarrow \bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i \quad \text{أي}$$

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}i$$

2. تحدد $\text{Re}(z')$ و $\text{Im}(z')$ بدلالة x و y .

$$\text{Re}(z') = \text{Re}\left(\frac{2z-i}{z+1-i} \right) = \text{Re}\left(\frac{2(x+iy)-i}{x+iy+1-i} \right) = \frac{2x^2+2y^2+2x+3y+1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow \text{Im}(z') = \frac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

3. تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' حقيقيا.

$$\frac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2y-1=0 \\ (x+1)^2+(y-1)^2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{يعني: } \text{Im}(z') = 0 \quad \text{حقيقي معناه: } z' \text{ حقيقي}$$

اذن مجموعة النقط M هي المستقيم ذا المعادلة $x+2y-1=0$ ما عدا النقطه $A(-1;1)$.

4. تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $|z'| = 2$.

معناه: $|z'| = 2$

$$\left| \frac{2z-i}{z+1-i} \right| = 2 \Rightarrow \frac{|2z-i|}{|z+1-i|} = 2$$

$$\frac{\left| 2\left(z - \frac{1}{2}i\right) \right|}{|z+1-i|} = 2 \Rightarrow \left| z - \frac{1}{2}i \right| = |z+1-i| \quad \text{ومنّه:}$$

$$|z - z_B| = |z - z_A|$$

$$AM = AB$$

ومنّه مجموعة النقط M التي تحقق $|z| = 2$ هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

5. اثبات المثلث ABC متساوي الساقين وفي قائم النقطه C .

$$\left\{ \begin{array}{l} |z_A - z_C| = \frac{1}{4}\sqrt{10} \\ |z_B - z_C| = \frac{1}{4}\sqrt{10} \\ |z_A - z_B| = \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{array} \right. \quad \text{لدينا:} \quad \text{ومنّه نستنتج أن } AC = BC \text{ اذن المثلث } ABC \text{ متساوي الساقين....(1)}$$

ولدينا: $AC^2 + BC^2 = BA^2$ اذن المثلث ABC قائم في C(2)

ومن (1) و (2) نستنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين وفي قائم النقطه C .

حل التمرين العاشر:

1. أ- احسب $P(1)$:

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^3 - (1 - 2\sin \alpha)(1)^2 + (1 - 2\sin \alpha) - 1 \\ &= 1 - (1 - 2\sin \alpha) + (1 - 2\sin \alpha) - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنّه: $P(1) = 0$.

ب- تعين الاعداد الحقيقية c, b, a :

$$\begin{aligned} P(z) &= (z-1)(az^2 + bz + c) \\ &= az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = -(1 - 2\sin \alpha) \\ c - b = 1 - 2\sin \alpha \\ -c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2\sin \alpha \\ c = 1 \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد:}$$

$$P(z) = (z-1)(z^2 + (2\sin \alpha)z + 1)$$

2. حل المعادلة $P(z) = 0$:

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow P(z) = (z-1)(z^2 + (2\sin \alpha)z + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} z-1=0 \\ z^2 + (2\sin \alpha)z + 1=0 \end{cases}$$

$$z_1 = 1$$

$$z^2 + (2\sin \alpha)z + 1 = 0 \Rightarrow \Delta' = (i\cos \alpha)^2 \quad \text{اذن:}$$

$$\begin{cases} z' = -\sin \alpha + i\cos \alpha \\ z'' = -\sin \alpha - i\cos \alpha \end{cases}$$

$$S = \{1; -\sin \alpha + i\cos \alpha; -\sin \alpha - i\cos \alpha\}$$

$$\text{لأن: } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

3. ليكن z_1, z_2, z_3 حلول المعادلة $P(z) = 0$ حيث $z_1 = 1$.

أ- تعين طويلة وعمدة الأعداد z_1, z_2, z_3 :

$$z_1 = 1 = 1.e^{i0}$$

$$z_2 = -\sin \alpha + i\cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 1e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$$

$$z_3 = -\sin \alpha - i\cos \alpha = \overline{z_2} = 1.e^{i\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

ب- الحدود $|z_1|, |z_2 + 1|$ و $|z_3 - 1|$ بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية معناه:

حسب خاصية الوسط الهندسي نجد:

$$|z_1|^2 = |z_2 + 1| \times |z_3 - 1|$$

$$\Leftrightarrow 1 = |z_2 \cdot z_3 - z_2 + z_3 - 1|$$

$$\Leftrightarrow 1 = |1 - z_2 + \overline{z_2} - 1| \quad \text{يعني:} \quad \text{و بالتالي: } \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ أو } \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 = |-2i\cos \alpha|$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2|\cos \alpha| \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \cos \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

حل التمرين الحادي عشر:

لدينا:

$$\begin{cases} |1+i| = \sqrt{2} \\ \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

وبما أن: $1-i = \overline{1+i} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2. لدينا: نعلم أن: $\cos x = \cos(-x)$ و $\sin(-x) = -\sin x$ إذن:

$$\begin{aligned} S_n &= (1+i)^n + (1-i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n + \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n \\ &= (\sqrt{2})^n \left(e^{in\frac{\pi}{4}} + e^{-in\frac{\pi}{4}}\right) \\ &= (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-n\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-n\frac{\pi}{4}\right)\right) \quad \text{باستعمال خاصية موافر:} \\ &= (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2(\sqrt{2})^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

حل التمرين الثاني عشر:

لدينا: $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ و $z_C = -\sqrt{3} + 3i$.

(1) كتابة العدد z_A على الشكل الأسّي ثم إستنتاج الشكل الأسّي للعدد z_B :

لدينا: $z_A = 3 + i\sqrt{3}$

حساب الطويلة: $|z_A| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$

تعيين عمدة للعدد z_A : نضع $\theta_A = \arg(z_A)$

$$\theta_A = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} \cos \theta_A = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{إذن:}$$

الشكل الأسّي للعدد z_A هو: $z_A = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

إستنتاج الشكل الأسّي للعدد z_B : $z_B = \overline{z_A} = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

(2) لدينا: العدد المركب $L_n = \left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n$

حساب L_n بدلالة n :

$$L_n = \left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n = \left(\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}}\right)^n + \left(\frac{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}}\right)^n = e^{in\frac{\pi}{6}} + e^{-in\frac{\pi}{6}} \quad \text{لدينا:}$$

$$L_n = e^{in\frac{\pi}{6}} + e^{-in\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6} + \cos\left(-\frac{n\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{6}\right) \quad \text{ومنه:}$$

$$L_n = e^{i\frac{n\pi}{6}} + e^{-i\frac{n\pi}{6}} = \cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} + \cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6} \text{ أي}$$

$$L_n = 2 \cos \frac{n\pi}{6} \text{ وبالتالي}$$

إستنتاج قيمة L_{2018} :

$$L_{2018} = 2 \cos \left(\frac{2018\pi}{6} \right) = 2 \cos \left(336\pi + \frac{2\pi}{6} \right) = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$L_{2018} = 1 \text{ إذن}$$

(3) التحقق أن $z_C = i z_A$ ثم إستنتاج طبيعة المثلث OAC :

$$\text{لدينا : } i z_A = i(3 + i\sqrt{3}) = 3i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + 3i = z_C$$

$$\text{أي } z_C = i z_A$$

إستنتاج طبيعة المثلث OAC :

$$\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O} = i \text{ أي } \frac{z_C}{z_A} = i \text{ ومنه } z_C = i z_A$$

$$\text{إذن لدينا : } \arg \left(\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O} \right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \text{ و } \left| \frac{z_C - z_O}{z_A - z_O} \right| = |i| = 1$$

$$\text{وبالتالي : } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \text{ و } \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه المثلث OAC قائم ومتساوي الساقين

(4) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث :

$$k \in \mathbb{Z} \text{ مع } \arg(3 + i\sqrt{3} - z) - \arg(-\sqrt{3} + 3i - z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

التحقق أن النقطة O تنتمي إلى (Γ) ثم تعيين طبيعتها :

$$\arg(3 + i\sqrt{3} - z_O) - \arg(-\sqrt{3} + 3i - z_O) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ يعني } O \text{ تنتمي إلى } (\Gamma)$$

$$\text{لدينا : } \arg(3 + i\sqrt{3} - z_O) - \arg(-\sqrt{3} + 3i - z_O) = \arg(3 + i\sqrt{3}) - \arg(-\sqrt{3} + 3i)$$

$$\text{أي } \arg(-\sqrt{3} + 3i - z_O) - \arg(3 + i\sqrt{3} - z_O) = \arg(z_A) - \arg(z_C) = \arg(z_A) - \arg(i \times z_A)$$

$$\text{ومنه : } \arg(-\sqrt{3} + 3i - z_O) - \arg(3 + i\sqrt{3} - z_O) = \arg(z_A) - \arg(z_A) - \arg(i) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{ومنه } O \in (\Gamma)$$

تعيين طبيعة (Γ) :

$$\arg(3 + i\sqrt{3} - z) - \arg(-\sqrt{3} + 3i - z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ يعني}$$

$$\arg \left(\frac{z_A - z}{z_C - z} \right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ومنه } \arg(z_A - z) - \arg(z_C - z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{أي } k \in \mathbb{Z} \text{ مع } \angle(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

وبالتالي مجموعة النقط (Γ) هي نصف الدائرة التي أحد أقطارها القطعة $[AC]$ والتي تشمل

النقطة O ماعدا النقطتين A و C

(5) تبيان أن المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان :

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B} = \frac{\overline{z_C - z_A}}{i z_A - z_A} = \frac{-i \overline{z_A - z_A}}{i z_A + i^2 z_A} = \frac{-(z_A + i \overline{z_A})}{i(z_A + i \overline{z_A})} = -\frac{1}{i} = i$$

$$\text{ومنه : } \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \text{ يعني } (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$$

وبالتالي: المستقيمان (AD) و (BC) متعامدان

(6) تعيين نسبة وزاوية التشابه S :

لدينا : العبارة المركبة للتشابه S من الشكل $z' = az + b$

$$\text{ولدينا : } \begin{cases} S(A) = C \\ S(E) = E \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} z_C = a z_A + b \\ z_E = a z_E + b \end{cases} \text{ وبالتالي}$$

$$a = \frac{z_C - z_E}{z_A - z_E} = \frac{-\sqrt{3} + 3i - 3 + \sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3} - 3 + \sqrt{3}} = \frac{3i - 3}{i\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{3(-1 + i)}{\sqrt{3}(1 + i)} \times \frac{1 - i}{1 - i}$$

$$\text{ومنه : } a = i\sqrt{3} \text{ إذن } a = \frac{3(-1 + i)}{\sqrt{3}(1 + i)} \times \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2i = i\sqrt{3}$$

$$\theta = \arg(a) = \frac{\pi}{2} \text{ : زاوية التشابه } S \quad k = |a| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3} \text{ : نسبة التشابه } S$$

إستنتاج أن النقط A, E, O, C تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathcal{C})$:

$$\text{لدينا : } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = -\frac{\pi}{2} \text{ و } (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) = \frac{\pi}{2} \text{ ومنه :}$$

AEC و AOC مثلثان قائمان .

وبالتالي النقط A, E, O, C تنتمي إلى

نفس الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها Ω منتصف

القطعة $[AC]$ ونصف قطرها

$$r = O\Omega = |\overline{z_\Omega}| = \left| \frac{z_C + z_A}{2} \right| = \left| \frac{i z_A + z_A}{2} \right|$$

$$r = \frac{|z_A(1 + i)|}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$$

حل التمرين الثالث عشر:

(1) الحل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $(z - 4)(z^2 - 4z + 8) = 0$

$$z^2 - 4z + 8 = 0 \text{ أو } z - 4 = 0 \text{ تكافئ } (z - 4)(z^2 - 4z + 8) = 0$$

$$z - 4 = 0 \text{ يعني } z = 4$$

حل المعادلة $z^2 - 4z + 8 = 0$:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 8 = 16 - 32 = -16 = (4i)^2 \text{ حساب المميز :}$$

المعادلة تقبل حلين متميزين هما :

$$z_1 = \frac{4-4i}{2} = 2-2i$$

$$z_2 = 2+2i$$

مجموعة حلول المعادلة : $S = \{4; 2-2i; 2+2i\}$

(2) لدينا $z_A = 2-2i$ ، $z_B = 4$ ، $z_C = z_A$ ، $z_D = -z_A$ و $z_E = -6-2i$

(أ) كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2+2i-2+2i}{4-2+2i} = \frac{4i}{2+2i} \times \frac{2-2i}{2-2i} = \frac{8i+8}{8} = 1+i$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 1+i \text{ أي}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ومنه}$$

إستنتاج أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ،
يطلب تعيين نسبة وزاوية التشابه S :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ لدينا : } \frac{AC}{AB} = \sqrt{2} \text{ ومنه } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4} \text{ و}$$

وبالتالي النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ونسبته

$$k = \sqrt{2} \text{ وزاويته } \theta = \frac{\pi}{4}$$

(ب) التحقق أن النقطة D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;-2), (C;2)\}$:

لدينا : $1-2+2=1 \neq 0$ ومنه مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;-2), (C;2)\}$ موجود

$$\frac{z_A - 2z_B + 2z_C}{1-2+2} = \frac{2-2i-8+4+4i}{1} = -2+2i = z_D \text{ لاحتقه هي}$$

ومنه D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;-2), (C;2)\}$

(ج) (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|(1+i)z+4|=8$

التحقق أن النقطة A تنتمي إلى (Γ) :

$$A \in (\Gamma) \text{ يعني } |(1+i)z_A+4|=8$$

لدينا : $|8|=8$ ومنه $A \in (\Gamma)$

تعيين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة:

$$|(1+i)z+4|=8 \text{ يكافئ } \left| (1+i)\left(z+\frac{4}{1+i}\right) \right| = 8$$

$$\sqrt{2} \times |z+2-2i|=8 \text{ ومنه } |1+i| \times \left| z+\frac{4}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} \right| = 8 \text{ أي}$$

إذن $|z - z_D| = 4\sqrt{2}$ وبالتالي $|z - (-2 + 2i)| = \frac{8}{\sqrt{2}}$
أي $DM = 4\sqrt{2}$ ومنه (Γ) هي دائرة مركزها النقطة D ونصف قطرها $R = 4\sqrt{2}$

(د) التحقق أن $S(D) = E$:

$$\frac{z_E - z_A}{z_D - z_A} = \frac{-6 - 2i - 2 + 2i}{-2 + 2i - 2 + 2i} = \frac{-8}{-4 + 4i} = \frac{-8(-4 - 4i)}{(-4 + 4i)(-4 - 4i)} = \frac{32(1 + i)}{16 + 16}$$
 لدينا :

$$\frac{z_E - z_A}{z_D - z_A} = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
 ومنه

وبالتالي : $S(D) = E$

تبيان أن الدائرة (Γ') التي مركزها E ونصف قطرها AE هي صورة (Γ) بالتشابه S :

(Γ) هي الدائرة التي مركزها النقطة D ونصف قطرها $AD = R = 4\sqrt{2}$

صورتها هي الدائرة (Γ') التي مركزها $E = S(D)$ ونصف قطرها $R' = \sqrt{2}AD = AE$ لأن

$$\frac{AE}{AD} = \sqrt{2}$$

هذا العمل يبقى عمل بشري و احتمال السهو فيه وارد فرجاء اذا كان هناك استفسار تواصل معي على :



تجدون كل منشوراتي

5min Maths

5min Maths

chbnoussama@gmail.com

Google

www.5min Maths .com

يمكنكم زيارة الموقع الالكتروني للصفحة :