

طرائق في الحساب

01. كيف نحسب باقي القسمة الإقليدية للعدد الصحيح a على العدد الصحيح غير المعدوم b ؟

طريقة:

نكتب العدد الصحيح a على الشكل $a = bq + r$ حيث $(q; r) \in \mathbb{Z}^2$ و $0 \leq r < |b|$.
العدد الموجب r هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b .

مثال 01 :

عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b في كل من الحالات التالية:

$$(1) \quad a = 57 \text{ و } b = 23$$

$$(2) \quad a = -147 \text{ و } b = 17$$

$$(3) \quad a = -439 \text{ و } b = -107$$

الحل :

(1) لدينا $57 = 2 \times 23 + 11$ و $0 \leq 11 < 23$ وبالتالي 11 هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 57 على العدد 23.

(2) لدينا $-147 = 17 \times (-9) + 6$ و $0 \leq 6 < 17$ وبالتالي 6 هو باقي القسمة الإقليدية للعدد -147 على العدد 17.

(3) لدينا $-439 = -107 \times (5) + 96$ و $0 \leq 96 < 107$ أي وبالتالي 96 هو باقي القسمة الإقليدية للعدد -439 على العدد -107.

مثال 02 :

a و n عددان طبيعيين بحيث $a = 28n + 123$.

- عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 28 .
- عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4 .

الحل :

• $a = 28n + 123$ على الشكل $a = qn + r$ ولكن $123 > 28$ وبالتالي لا يمكن أن يكون 123 هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 28 .

نكتب a على الشكل $a = 28q + r$ حيث $0 \leq r < 28$.

لدينا $123 = 28 \times 4 + 11$. وبالتالي $a = 28n + 123 = 28n + 28 \times 4 + 11 = 28(n + 4) + 11$ ومنه 11 هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 28 .

• نكتب a على الشكل $a = 4q + r$ حيث $0 \leq r < 4$.

لدينا $123 = 4 \times 30 + 3$. وبالتالي $a = 28n + 123 = 28n + 4 \times 30 + 3 = 4(7n + 30) + 3$ ومنه 3 هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4 .

مثال 03 :

n عدد طبيعي . عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $7n+43$ على $n+5$.

الحل :

$$7n+43 = 7(n+5) + 8$$

• إذا كان $0 \leq 8 < n+5$ أي $n > 3$ فإن باقي القسمة الإقليدية للعدد $7n+43$ على $n+5$ هو 8 .

ندرس الحالات الباقية للعدد الطبيعي n وهي $n=3, n=2, n=1, n=0$.

• إذا كان $n=3$ فإن $7n+43=64$ و $n+5=8$ وبالتالي باقي القسمة الإقليدية للعدد $7n+43$ على $n+5$ هو 0 .

• إذا كان $n=2$ فإن $7n+43=57$ و $n+5=7$ وبالتالي باقي القسمة الإقليدية للعدد $7n+43$ على $n+5$ هو 1 .

• إذا كان $n=1$ فإن $7n+43=50$ و $n+5=6$ وبالتالي باقي القسمة الإقليدية للعدد $7n+43$ على $n+5$ هو 2 .

• إذا كان $n=0$ فإن $7n+43=43$ و $n+5=5$ وبالتالي باقي القسمة الإقليدية للعدد $7n+43$ على $n+5$ هو 3 .

02. كيف نبين أن العدد الصحيح b يقسم العدد الصحيح a ؟

طريقة:

نبين أن $a = kb$ حيث k عدد صحيح.

ملاحظة :

العبارات التالية متكافئة : b يقسم a ، b قاسم لـ a ، a مضاعف لـ b .

مثال :

(1) بين أن 7 يقسم 938 .

(2) بين أن $n+2$ يقسم $3n^3+7n^2-3n-10$ حيث $n \in \mathbb{N}$.

(3) عين قيم الأعداد الصحيحة n بحيث يكون العدد $\frac{3n+13}{n+1}$ عددا صحيحا.

الحل :

(1) لدينا $938 = 7 \times 134$ ومنه 7 يقسم 938 أي 938 مضاعف للعدد 7 .

(2) نبين أن $3n^3+7n^2-3n-10 = k(n+2)$ حيث k عدد صحيح.

$3n^3+7n^2-3n-10$ من الدرجة الثالثة و $n+2$ من الدرجة الأولى فحتما يكون k من الدرجة الثانية. أي

نعين الأعداد الصحيحة $a ; b ; c$ بحيث $3n^3+7n^2-3n-10 = (n+2)(an^2+bn+c)$.

$$3n^3+7n^2-3n-10 = (n+2)(an^2+bn+c)$$

$$3n^3+7n^2-3n-10 = an^3 + (b+2a)n^2 + (c+2b)n + 2c$$

ومنه $3n^3+7n^2-3n-10 = (n+2)(3n^2+n-5)$ وبالتالي $n+2$ يقسم $3n^3+7n^2-3n-10$.

ملاحظة : يمكن استعمال القسمة الإقليدية للعدد $3n^3 + 7n^2 - 3n - 10$ على العدد $n + 2$ فنحصل على حاصل القسمة هو $3n^2 + n - 5$ وباقي هذه القسمة معدوم.

(3) لدينا $\frac{3n+13}{n+1} = \frac{3n+3+10}{n+1} = 3 + \frac{10}{n+1}$. يكون العدد $\frac{3n+13}{n+1}$ عددا صحيحا إذا وفقط إذا كان $n+1$ قاسما للعدد 10 .

$n \in \{-11; -6; -3; -2; 0; 1; 4; 9\}$ ومنه $(n+1) \in \{-10; -5; -2; -1; 1; 2; 5; 10\}$

03. كيف نبين أنه إذا كان d يقسم a و b فإن d يقسم c ؟

طريقة:

نكتب العدد الصحيح c على شكل عبارة خطية أي $c = \alpha a + \beta b$ حيث α و β عددان صحيحان.

مثال 01 :

n و d عددان طبيعيين. نضع $a = 7n - 4$ و $b = 5n + 2$. بين أنه إذا كان d يقسم a و b فإن d يقسم 34 .

الحل:

نجد العددين الصحيحين α و β بحيث $\alpha a + \beta b = 34$

$\alpha a + \beta b = 34$ تكافئ $\alpha(7n - 4) + \beta(5n + 2) = 34$ تكافئ $(7\alpha + 5\beta)n + (-4\alpha + 2\beta) = 34$ بالمطابقة نجد $\alpha = -5$ و $\beta = 7$.

أو بطريقة أخرى :

إذا كان d يقسم $7n - 4$ و يقسم $5n + 2$ فإن d يقسم $5 \times (7n - 4)$ و يقسم $7 \times (5n + 2)$ فهو يقسم الفرق بينهما أي $(35n - 20) - (35n + 14) = -34$.

مثال 02 :

n عدد صحيح . بين أنه إذا كان $n + 3$ يقسم $3n + 19$ فإن $n + 3$ يقسم 10 .

الحل :

بما أن $n + 3$ يقسم $3n + 19$ و $n + 3$ فإن $n + 3$ يقسم كل عبارة خطية لـ $3n + 19$ و $n + 3$.

$n + 3$ يقسم $(3n + 19) - 3 \times (n + 3)$ أي يقسم 10 .

أو بطريقة أخرى : $\frac{3n+19}{n+3} = 3 + \frac{10}{n+3}$.

بما أن $n + 3$ يقسم $3n + 19$ فإن $n + 3$ يقسم 10 .

مثال 03 :

n عدد صحيح . عين قيم العدد الصحيح n بحيث $n + 1$ يقسم $3n + 15$.

الحل :

لدينا $\frac{3n+15}{n+1} = \frac{3n+3+12}{n+1} = 3 + \frac{12}{n+1}$. $n + 1$ يقسم العدد $\frac{3n+15}{n+1}$ معناه $n + 1$ يقسم العدد 12 .

$$(n+1) \in \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

$$\text{ومنه } n \in \{-13; -7; -5; -4; -3; -2; 0; 1; 2; 3; 5; 11\}$$

04. كيف نجد عدد قواسم عدد طبيعي N ؟

طريقة:

نحلل N إلى جداء عوامله الأولية مثلاً على الشكل $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma$ فيكون عدد قواسم N هو $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$.

مثال:

أوجد عدد القواسم الطبيعية لكل من 72 و 180.

الحل :

$$72 = 2^3 \times 3^2 \text{ ومنه عدد قواسم } 72 \text{ هو } (3+1)(2+1) = 12$$

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \text{ ومنه عدد قواسم } 180 \text{ هو } (2+1)(2+1)(1+1) = 18$$

05. كيف نجد مجموعة القواسم الطبيعية للعدد الطبيعي N ؟

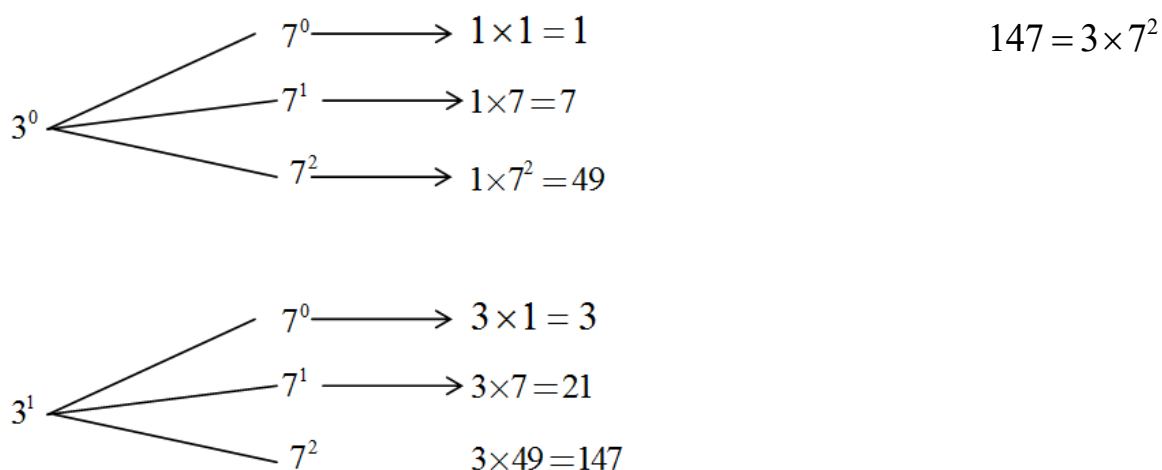
طريقة 01:

- نحلل N إلى جداء عوامله الأولية.
- نستعمل شجرة مختلف الحالات الممكنة.

مثال 01:

أوجد جميع القواسم الطبيعية للعدد 147.

الحل :



يكون عدد قواسم 147 هو $(1+1)(2+1) = 6$

إذن مجموعة قواسم العدد 147 هي $D_{147} = \{1; 3; 7; 21; 49; 147\}$.

طريقة 02 :

نحلل إلى جداء عوامله الأولية : $147 = 3 \times 7^2$

نكتب : $\left| \begin{matrix} 1, 3 \\ 1, 7, 49 \end{matrix} \right|$ أي $\left| \begin{matrix} 3^0, 3^1 \\ 7^0, 7^1, 7^2 \end{matrix} \right|$ نضرب كل عدد من السطر الثاني في كل عدده من السطر الأول فنجد مجموعة قواسم 147 وهي : $D_{147} = \{1; 3; 7; 21; 49; 147\}$.

مثال 02 : أوجد عدد ومجموعة قواسم العدد 200 .

الحل :

نحلل 200 إلى جداء عوامله الأولية فنجد $200 = 2^3 \times 5^2$

$12 = (3+1)(2+1)$ ومنه عدد قواسم 200 هو 12.

الآن نجد مجموعة هذه القواسم نكتب : $\left| \begin{matrix} 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 \\ 5^0, 5^1, 5^2 \end{matrix} \right|$ أي $\left| \begin{matrix} 1, 2, 4, 8 \\ 1, 5, 25 \end{matrix} \right|$ نضرب كل عدد من السطر الثاني في السطر الأول فنجد مجموعة قواسم 200 وهي : $D_{200} = \{1, 2, 4, 8, 5, 10, 20, 40, 25, 50, 100, 200\}$.

06. كيف نتحقق من أن العدد n إن كان أوليا أم لا؟

طريقة:

لمعرفة إذا كان عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 أوليا أم لا . نحسب $\sqrt{n}$.

• إذا كان $\sqrt{n}$ عددا طبيعيا أي n مربع تام فإن n غير أولي .

• إذا كان $\sqrt{n}$ غير طبيعي نقسم n على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب .

(أ) إذا وجدنا أحد البواقي معدوما نتوقف ونقرّ أن n غير أولي .

(ب) إذا كانت كل البواقي غير معدومة نقرّ أن n أولي .

مثال :

هل الأعداد التالية أولية 169 ، 143 ، 269 ؟

• بالنسبة للعدد 169 : لدينا $\sqrt{169} = 13$ وهو عدد طبيعي أي 169 مربع تام وبالتالي 169 غير أولي.

• بالنسبة للعدد 143 : لدينا $\sqrt{143} = 11,958$ وهو عدد غير طبيعي نقسم 143 على الأعداد الأولية

الأصغر من 11,958 وهي: 2, 3, 5, 7, 11 فنجد

المقسوم عليه	حاصل القسمة	باقي القسمة	143
2	71	1	لا يقبل القسمة على 2
3	47	1	لا يقبل القسمة على 3
5	28	3	لا يقبل القسمة على 5
7	20	3	لا يقبل القسمة على 7
11	13	0	يقبل القسمة على 11

أحد البواقي معدوم نتوقف من عملية القسمة ونقرَّب بأن العدد 143 غير أولي.

- بالنسبة للعدد 269: لدينا $\sqrt{269} = 16,401$ وهو عدد غير طبيعي نقسم 269 على الأعداد الأولية الأصغر من 16,401 وهي : 2, 3, 5, 7, 11, 13 فنجد

المقسوم عليه	حاصل القسمة	باقي القسمة	269
2	134	1	لا يقبل القسمة على 2
3	89	2	لا يقبل القسمة على 3
5	53	4	لا يقبل القسمة على 5
7	38	3	لا يقبل القسمة على 7
11	24	5	لا يقبل القسمة على 11
13	20	9	لا يقبل القسمة على 13

كل البواقي غير معدومة نتوقف من عملية القسمة ونقرَّب بأن العدد 269 أولي.

07. كيف نحسب $PGCD(a ; b)$ ؟

طريقة 01:

نحلل العددين a و b إلى جداء عواملهما الأولية.

$PGCD(a ; b)$ هو جداء العوامل المشتركة وبأصغر أس.

طريقة 02:

$PGCD(a ; b)$ هو هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمة خوارزمية إقليدس .

مثال :

أوجد $PGCD(315 ; 117)$.

الحل :

الطريقة 01:

$$315 = 3^2 \times 5 \times 7 \quad \text{و} \quad 117 = 3^2 \times 13 \quad \text{وبالتالي} \quad PGCD(315 ; 117) = 3^2 = 9$$

الطريقة 02:

4	2	1	2		الحاصل
9	36	81	117	315	المقسوم والقاسم
0	9	36	81		الباقى

إذن $PGCD(315; 117) = 9$.

08. كيف نحسب $PGCD(an+b; cn+d)$ ؟

طريقة: 01:

نطبق : إذا كان d يقسم عددين A و B فإن d يقسم كل عبارة خطية لهذين العددين ثم نستنتج قيمة أو قيم d .

مثال 01 :

من أجل كل عدد طبيعي n . عين $PGCD(n+5; 3n+14)$.

الحل:

نضع $d = PGCD(n+5; 3n+14)$.

بما أن d يقسم $3n+14$ و $n+5$ فإن d يقسم أي عبارة خطية لهما، نختار معاملين بحيث لا تظهر n : d

$$3(n+5) - (3n+14) = -3n+15-3n-14=1$$

$$d = PGCD(n+5; 3n+14) = 1$$

مثال 02 :

من أجل كل عدد طبيعي n عين $PGCD(2n+5; 3n+1)$.

الحل:

نضع $d = PGCD(2n+5; 3n+1)$.

بما أن d يقسم $2n+5$ و $3n+1$ فإن d يقسم أي عبارة خطية لهما، نختار معاملين بحيث لا تظهر n : d

$$-2(3n+1) + 3(2n+5) = -6n-2+6n+15=13$$

$$PGCD(2n+5; 3n+1) = 13 \text{ أو } PGCD(2n+5; 3n+1) = 1.$$

09. كيف نبين أن العددين a و b أوليان فيما بينهما ؟

طريقة 01:

نبين أن $PGCD(a; b) = 1$.

طريقة 02:

نستعمل مبرهنة بيزو: نعين عددين صحيحين u و v بحيث $ua+vb=1$.

مثال :

(1) بين أن العددين 143 و 136 أوليان فيما بينهما.

(2) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أن العددين $9n+13$ و $2n+3$ أوليان فيما بينهما.

الحل :

(1) لدينا $143 = 11 \times 13$ و $136 = 8 \times 17$ وبالتالي $PGCD(136; 143) = 1$ ومنه 136 و 143 أوليان فيما بينهما.

(2) لدينا $9 \times (2n+3) - 2(9n+13) = 1$ فحسب مبرهنة بيزو فإن العددين $9n+13$ و $2n+3$ أوليان فيما بينهما.

10. كيف نجد مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين a و b ؟

طريقة:

مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.

مثال :

أوجد مجموعة القواسم المشتركة للعددين الطبيعيين 308 و 448

الحل :

نبحث أولاً عن $PGCD(308; 448)$

5	2	1		الحاصل
28	140	308	448	المقسوم والقاسم
0	28	140		الباقى

إذن $PGCD(308; 448) = 28$ ومنه مجموعة القواسم المشتركة للعددين الطبيعيين 308 و 448 هي مجموعة قواسم 28 أي $D_{308} \cap D_{448} = \{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$.

11. كيف نحسب $PPCM(a; b)$ ؟

طريقة 01:

نحلل العددين a و b إلى جداء عواملهما الأولية.

$PPCM(a; b)$ هو جداء العوامل المشتركة وغير المشتركة في تحليلي a و b مع أخذ كل عامل مرة واحدة وبأكبر أس.

طريقة 02:

$$PPCM(a; b) = \frac{a \times b}{PGCD(a; b)}$$

مثال :

أوجد $PPCM(24; 42)$.

الحل :

الطريقة 01:

$$PPCM(24; 42) = 2^3 \times 3 \times 7 = 168 \text{ وبالتالي } 42 = 2 \times 3 \times 7 \text{ و } 24 = 2^3 \times 3$$

الطريقة 02:

$$PPCM(24; 42) = \frac{24 \times 42}{6} = 168 \quad PGCD(24; 42) = 2 \times 3 = 6 \quad \text{وبالتالي} \quad 42 = 2 \times 3 \times 7 \quad \text{و} \quad 24 = 2^3 \times 3$$

12. كيف نبين ان المعادلة $ax + by = c$ تقبل في $\mathbb{Z}^2$ حلولا أم لا؟

طريقة:

- نعين $d = PGCD(a; b)$.
- إذا كان d يقسم c فإن المعادلة تقبل حلولا وإلا لا تقبل حلولا.

مثال:

تحقق إن كانت المعادلات التالية تقبل حلولا أم لا في $\mathbb{Z}^2$:

$$(1) \quad 6x + 8y = 11$$

$$(2) \quad 24x - 18y = 30$$

$$(3) \quad 8x - 5y = 1$$

الحل:

$$(1) \quad PGCD(6; 8) = 2 \quad \text{و} \quad 2 \quad \text{لا يقسم} \quad 11 \quad \text{وبالتالي المعادلة} \quad 6x + 8y = 11 \quad \text{لا تقبل حلولا في} \quad \mathbb{Z}^2.$$

$$(2) \quad PGCD(24; -18) = PGCD(24; 18) = 6 \quad \text{وبما أن} \quad 6 \quad \text{يقسم} \quad 30 \quad \text{وبالتالي المعادلة}$$

$$24x - 18y = 30 \quad \text{تقبل حلولا في} \quad \mathbb{Z}^2.$$

$$(3) \quad PGCD(8; -5) = PGCD(8; 5) = 1 \quad \text{وبالتالي المعادلة} \quad 8x - 5y = 1 \quad \text{تقبل حلولا في} \quad \mathbb{Z}^2.$$

13. كيف نجد حلا خاصا للمعادلة $ax + by = c$ ؟

طريقة 01:

- نختزل ونبسط المعادلة إن أمكن ذلك.
- نعين حلا بسيطا بالمحاولة.

مثال:

عين حلا في $\mathbb{Z}^2$ للمعادلتين:

$$(1) \quad 3x - 2y = 1 \quad (2) \quad 16x - 24y = 8$$

الحل:

$$(1) \quad \text{ببساطة وبوضوح نلاحظ أن} \quad (1; 1) \quad \text{هو حلا للمعادلة} \quad 3x - 2y = 1.$$

$$(2) \quad \text{نختزل المعادلة} \quad 16x - 24y = 8 \quad \text{فنجد} \quad 2x - 3y = 1 \quad \text{ومنه} \quad (2; 1) \quad \text{هو حلا للمعادلة} \quad 16x - 24y = 8$$

طريقة 02:

- نختزل ونبسط المعادلة إن أمكن ذلك.
- نجد حلا $(x_0; y_0)$ للمعادلة $ax + by = 1$ لذلك نعين مضاعفين للعددين a و b يكون الفرق بينهما 1.

• أحد حلول المعادلة $ax + by = c$ هو $(cx_0; cy_0)$.

مثال:

(1) عين حلا $(x_0; y_0)$ للمعادلة $8x - 5y = 1$ واستنتج حلا للمعادلة $8x - 5y = 3$.

(2) عين حلا للمعادلة $7x - 2y = 13$.

الحل :

(1) نجد مضاعفا للعدد 8 ومضاعفا للعدد 5 الفرق بينهما واحد . نختار مثلا 16 و 15 .

$8 \times (2) - 5 \times (3) = 1$ أي $(2; 3)$ حلا للمعادلة $8x - 5y = 1$ وبالتالي $(6; 9)$ حلا للمعادلة $8x - 5y = 3$.

(2) نجد أولا حلا للمعادلة $7x - 2y = 1$. نجد مضاعفا للعدد 7 ومضاعفا للعدد 2 الفرق بينهما واحد .

نختار مثلا 21 و 20 ، فيكون $7 \times (3) - 2 \times (10) = 1$ أي $(3; 10)$ حلا للمعادلة $7x - 2y = 1$.

وبالتالي $(6 \times 13; 9 \times 13)$ أي $(78; 117)$ هو حلا للمعادلة $7x - 2y = 13$.

طريقة 03:

نستعمل مراحل خوارزمية إقليدس من الأسفل إلى الأعلى في إيجاد $PGCD(a; b)$.

مثال :

أوجد عددين صحيحين a و b بحيث $25872a + 484b = 44$

الحل :

نبحث عن $PGCD(25872, 484)$:

لدينا: $25872 = 484 \times 53 + 220$

$484 = 220 \times 2 + 44$

$PGCD(25872; 484) = 44$ ومنه $220 = 44 \times 5 + 0$

لدينا $44 = 484 - 2 \times 220$

$44 = 484 - 2 \times (25872 - 484 \times 53)$

$44 = 484 \times (1 + 2 \times 53) + 25872 \times (-2)$

$44 = 25872 \times (-2) + 484 \times (107)$ ومنه $(a; b) = (-2; 107)$.

14. كيف نجد حلول المعادلة $ax + by = c$ ؟

طريقة:

• نجد حلا خاصا للمعادلة $ax + by = c$.

• نطبق مبرهنة غوص : إذا كان a يقسم الجداء bc وكان a أوليا مع b ، فإن a يقسم c .

مثال 01 :

لتكن المعادلة $7x - 5y = 1 \dots\dots (E)$ ذات المجهولين x و y .

(1) تحقق من أن الثنائية $(3, 4)$ هي حلا خاصا للمعادلة (E) .

(2) استنتج في $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (E) .

الحل :

(1) نضع $(x_0, y_0) = (3, 4)$. نلاحظ $7(3) - 5(4) = 21 - 20 = 1$ ومنه الثنائية $(3, 4)$ هي حلا خاصا للمعادلة (E) .

(2) لدينا $7x - 5y = 1$ و $7x_0 - 5y_0 = 1$ ومنه $7x - 5y = 7x_0 - 5y_0$ تكافئ $7(x - x_0) = 5(y - y_0)$ أي $7(x - 3) = 5(y - 4)$

لدينا 5 يقسم $5(y - 4)$ ومنه 5 يقسم $7(x - 3)$ وبما أن 5 أولي مع 7 فإن 5 يقسم $x - 3$ أي $x - 3 = 5k$ ومنه $x = 3 + 5k$ حيث k عدد صحيح .

نعوض في المعادلة $7x - 5y = 1$ بقيمة $x = 3 + 5k$ فنجد $7(3 + 5k) - 5y = 1$ ومنه $y = 4 + 7k$ حلول المعادلة $7x - 5y = 1$ هي الثنائيات من الشكل $(3 + 5k, 4 + 7k)$ حيث k عدد صحيح .

مثال 02 :

(1) أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و 180 .

(2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $225x - 180y = 90$ (1) .

(3) من بين حلول المعادلة (1) عين التي تحقق $|x - y + 1| < 2$.

الحل :

(1) لدينا $225 = 3^2 \times 5^2$ و $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ ومنه $\text{PGCD}(225; 180) = 45$.

(2) $225x - 180y = 90$ تكافئ $5x - 4y = 2$. نلاحظ بسهولة أن الثنائية $(2; 2)$ حلا خاصا لها وبالتالي

$5x - 4y = 2$ تكافئ $5(x - 2) = 4(y - 2)$ وباستعمال مبرهنة غوص :

لدينا 4 يقسم $4(y - 2)$ ومنه 4 يقسم $5(x - 2)$ وبما أن 5 أولي مع 4 فإن 4 يقسم $x - 2$ أي $x - 2 = 4k$ ومنه $x = 2 + 4k$ حيث k عدد صحيح .

نعوض في المعادلة $5x - 4y = 2$ بقيمة $x = 2 + 4k$ فنجد $5(2 + 4k) - 4y = 2$ ومنه $y = 2 + 5k$

حلول المعادلة $225x - 180y = 90$ هي الثنائيات من الشكل $(2 + 4k, 2 + 5k)$ حيث k عدد صحيح .

(3) $|x - y + 1| < 2$ تكافئ $-2 < x - y + 1 < 2$ تكافئ $-2 < (2 + 4k) - (2 + 5k) + 1 < 2$

أي $-2 < -k + 1 < 2$ ومنه $-3 < -k < 1$ أي $-1 < k < 3$ وبالتالي $k = 0$ أو $k = 1$ أو $k = 2$.

• من أجل $k = 0$ نجد $x = 2$ و $y = 2$.

• من أجل $k = 1$ نجد $x = 6$ و $y = 7$.

• من أجل $k = 2$ نجد $x = 10$ و $y = 12$.

وأخيرا الثنائيات الطبيعية $(x; y)$ التي تحقق $\begin{cases} |x - y + 1| < 2 \\ 225x - 180y = 90 \end{cases}$ هي $\{(2; 2), (6; 7), (10; 12)\}$

15. كيف نجد b بحيث $a \equiv b[n]$ ؟

طريقة:

$a \equiv b[n]$ تكافئ $a = b + kn$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ وبالتالي $b = a - kn$

مثال:

عين 3 أعداد صحيحة b بحيث $12 \equiv b[7]$

الحل:

- (1) $12 \equiv b[7]$ تكافئ $b = 12 - 7k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. بإعطاء قيم مختلفة لـ k نحصل على قيم b من أجل $k = -3$ نحصل على $b = 12 - 7 \times (-3) = 33$.
 من أجل من أجل $k = 0$ نحصل على $b = 12 - 7 \times (0) = 12$.
 من أجل لـ $k = 5$ نحصل على $b = 12 - 7 \times (5) = -23$.

16. كيف نبين أن $a \equiv b[n]$ ؟

طريقة:

نبين أن $a - b$ يقبل القسمة على n أي n قاسم لـ $a - b$.

مثال 01:

- (1) بين أن $13 \equiv -12[5]$.
 (2) عين مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $n + 3 \equiv 5[11]$.
 (3) عين مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $3n \equiv 2[5]$.

الحل :

- (1) نبين أن $13 \equiv -12[7]$. بما أن $13 - (-12) = 25$ وهو مضاعف لـ 5 إذن $13 \equiv -12[7]$.
 (2) $n + 3 \equiv 5[11]$ تكافئ $n + 3 - 5 \equiv 5 - 5[11]$ أي $n - 2 \equiv 0[11]$ ومنه $n \equiv 2[11]$.
 إذن مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $n + 3 \equiv 5[11]$ هي من الشكل $n = 2 + 11k$ حيث k عدد صحيح.
 (3) لدينا $3n \equiv 2[5]$ و $2 \equiv 2[5]$ فحسب خواص الموافقات فإن $2 \times 3n \equiv 2 \times 2[5]$ أي $6n \equiv 4[5]$ ومنه $n \equiv 4[5]$ إذن مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $3n \equiv 2[5]$ هي من الشكل $n = 4 + 5k$ حيث k عدد صحيح.

ملاحظة : يمكن استعمال الجدول :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$3n \equiv$	0	3	1	4	2	$[5]$

17. كيف نحسب c بحيث $a^n \equiv c[b]$ ؟

طريقة:

- نستعمل خواص الموافقات وخاصة : إذا كان $a \equiv b[n]$ و $a' \equiv b'[n]$ فإن $a^k \equiv b^k[n]$ و $aa' \equiv bb'[n]$. لإيجاد عدد صحيح k بحيث $a^k \equiv 1[b]$ و $a^k \equiv -1[b]$.
- نعبر عن n بدلالة k أي $n = pk + r$.
- نعوض n بـ $n = pk + r$ لنكمل الحساب.

مثال :

$$(1) \text{ عين } a \text{ بحيث } 15^{123} \equiv a[7].$$

$$(2) \text{ عين } b \text{ بحيث } 3^{2015} \equiv b[10].$$

$$(3) \text{ عين } c \text{ بحيث } 5^{1433} \equiv c[11].$$

الحل :

$$(1) \text{ لدينا } 15 \equiv 1[7] \text{ ومنه } 15^{123} \equiv 1^{123}[7] \text{ أي } 15^{123} \equiv 1[7] \text{ ومنه } a = 1.$$

$$(2) \text{ لدينا } 3^2 \equiv 9[10] \text{ أي } 3^2 \equiv 10 - 1[10] \text{ أي } 3^2 \equiv -1[10]. \text{ ولدينا } 2015 = 2 \times 1007 + 1 \text{ ومنه}$$

$$3^{2015} = 3^{2 \times 1007 + 1} = (3^2)^{1007} \times 3^1 \text{ وبالتالي } 3^{2015} \equiv (-1)^{1007} \times 3[10] \text{ أي } 3^{2015} \equiv (-1) \times 3[10] \text{ وبالتالي}$$

$$3^{2015} \equiv -3[10] \text{ ومنه } b = -3. \quad (3)$$

$$5 \equiv 5[11], 5^2 \equiv 3[11], 5^3 \equiv 4[11], 5^4 \equiv 9[11], 5^5 \equiv 1[11].$$

$$\text{نقسم الأس } 1433 \text{ على } 5 \text{ فنجد } 1433 = 5 \times 286 + 3 \text{ ومنه } 5^{1433} = 5^{5 \times 286 + 3} = (5^5)^{286} \times 5^3 \text{ وبالتالي}$$

$$5^{1433} \equiv (5^5)^{286} \times 5^3[11] \text{ أي } 5^{1433} \equiv (1)^{286} \times 4[11] \text{ وأخيرا } 5^{1433} \equiv 4[11] \text{ ومنه } c = 4.$$

18. كيف نستعمل الموافقات لتعيين باقي القسمة الإقليدية لـ a على b ؟

طريقة:

$$\bullet \text{ نجد } r \text{ بحيث } a \equiv r[b] \text{ مع } 0 \leq r < b. \text{ باقي القسمة الإقليدية للعدد } a \text{ على } b \text{ هو } r.$$

مثال :

$$(1) \text{ ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد } 22^{123} \text{ على } 7.$$

$$(2) \text{ ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد } 10^{101} \text{ على } 11.$$

الحل :

$$(1) \text{ لدينا } 22 \equiv 1[7] \text{ ومنه } 22^{123} \equiv 1^{123}[7] \text{ أي } 22^{123} \equiv 1[7] \text{ ومنه باقي القسمة الإقليدية للعدد } 22^{123} \text{ على } 7 \text{ هو } 1.$$

$$(2) \text{ لدينا } 10 \equiv 10[11] \text{ أي } 10 \equiv 11 - 1[11] \text{ أي } 10 \equiv -1[11]. \text{ ومنه}$$

$$10^{101} \equiv (-1)^{101}[11] \text{ أي } 10^{101} \equiv -1[11] \text{ ولكن } -1 \equiv 10[11] \text{ وبالتالي } 10^{101} \equiv 10[11]$$

$$\text{إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد } 10^{101} \text{ على } 11 \text{ هو } 10.$$

19. كيف نعين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية لـ a^n على b ؟

طريقة:

$$\text{من أجل } n = 0; 1; 2; \dots \text{ نحسب } a^n \equiv r[b] \text{ مع } 0 \leq r < b \text{ حتى نصل إلى } a^n \equiv 1[b] \text{ فتشكل الموافقة متتالية دورية ودورها } p \text{ ثم نستعمل الخواص لحساب } r.$$

مثال :

$$(1) \text{ عين حسب قيم العدد الطبيعي } n \text{ بواقي القسمة الإقليدية للعدد } 5^n \text{ على } 7.$$

(2) استنتج باقي قسمة العدد 5^{2013} على 7

الحل :

(أ) $5^6 \equiv 1[7]$, $5^5 \equiv 3[7]$, $5^4 \equiv 2[7]$, $5^3 \equiv 6[7]$, $5^2 \equiv 4[7]$, $5 \equiv 5[7]$
الموافقة تشكل متتالية دورية ودورها 6 . نقسم الأس n على الدور 6 فنجد $n = 6k + r$ حيث $0 \leq r < 6$ و k عددا طبيعيا
من أجل كل عدد طبيعي k نلخص في الجدول التالي :

إذا كان $r =$	فإن $n = 6k + r$	وبالتالي باقي قسمة العدد 5^n على 7 هو
0	$n = 6k$	1
1	$n = 6k + 1$	5
2	$n = 6k + 2$	4
3	$n = 6k + 3$	6
4	$n = 6k + 4$	2
5	$n = 6k + 5$	3

(ب) باقي قسمة العدد 5^{2013} على 7

نقسم الأس 2013 على الدور 6 فنجد $2013 = 6 \times 335 + 3$ من الشكل $6k + 3$ وبالتالي من الجدول السابق مباشرة نجد $5^{2013} \equiv 6[7]$.

20. كيف نبين أن a يقبل القسمة على b باستعمال الموافقات ؟

طريقة:

• نبين أن $a \equiv 0[b]$.

مثال 01:

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $3^{2n} - 2^n$ يقبل القسمة على 7 .

الحل :

نبين أن $3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$.

لدينا $3^{2n} = 9^n$ ومنه $3^{2n} \equiv 2^n[7]$ وبالتالي $3^{2n} - 2^n \equiv 2^n - 2^n[7]$ أي $3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$.

مثال 02:

بين أنه من أجل كل عدد صحيح n فإن $n(n^4 - 1)$ يقبل القسمة على 5

الحل :

$n(n^4 - 1)$ يقبل القسمة على 5 معناه $n(n^4 - 1) \equiv 0[5]$. نستعمل الجدول التالي :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$n^4 - 1 \equiv$	-1	0	0	0	0	[5]
$n(n^4 - 1) \equiv$	0	0	0	0	0	[5]

إذن من أجل كل عدد صحيح n فإن $n(n^4 - 1)$ يقبل القسمة على 5 .

21. كيف نحل معادلة معطاة بالموافقات ؟

طريقة 01:

المعادلات من الشكل $ax \equiv b [n]$ مع a و n ليسا زوجيان معا.

- نحاول إن أمكن التخلص من معامل المجهول x .
- نجد k بحيث $ka \equiv 1 [n]$ أو $ka \equiv -1 [n]$.
- نضرب طرفي المعادلة في k .
- نعوض ka بـ 1 أو -1 لنجد x .

مثال:

حل في $\mathbb{Z}$ المعادلات التالية ذات المجهول x :

$$(1) \quad 8x \equiv 3 [7] \quad , \quad 4x \equiv 3 [5] \quad (2) \quad , \quad 9x \equiv -4 [11] \quad (3)$$

الحل :

(1) $8x \equiv 3 [7]$ و 8 و 7 ليسا زوجيان معا وبالتالي نحاول التخلص من معامل x أي من 8 . لدينا $8 \equiv 1 [7]$ ومنه $8x \equiv 3 [7]$ تكافئ $x \equiv 3 [7]$. إذن حلول المعادلة $8x \equiv 3 [7]$ هي الأعداد الصحيحة x بحيث $x \equiv 3 [7]$.

(2) $4x \equiv 3 [5]$ و 4 و 5 ليسا زوجيان معا وبالتالي نحاول التخلص من معامل x أي من 4 . لدينا $4 \equiv -1 [5]$ ومنه $4x \equiv 3 [5]$ تكافئ $-x \equiv 3 [5]$ أي $x \equiv -3 [5]$. إذن حلول المعادلة $4x \equiv 3 [5]$ هي الأعداد الصحيحة x بحيث $x \equiv -3 [5]$.

(3) $9x \equiv -4 [11]$ و 9 و 11 ليسا زوجيان معا وبالتالي نحاول التخلص من معامل x أي من 9 . نلاحظ أن $5 \times 9 \equiv 1 [11]$ ومنه $5 \times 9x \equiv 5 \times -4 [11]$ أي $45x \equiv -20 [11]$ تكافئ $x \equiv -9 [11]$. إذن حلول المعادلة $9x \equiv -4 [11]$ هي الأعداد الصحيحة x بحيث $x \equiv -9 [11]$.

طريقة 02: المعادلات من الشكل $ax \equiv b [n]$ مع a و n زوجيان معا.

في هذه الحالة لا يمكن إيجاد k بحيث $ka \equiv 1 [n]$ أو $ka \equiv -1 [n]$.

نستعمل جدول الموافقات بتحديد n .

مثال 01:

حل في $\mathbb{Z}$ المعادلتين التاليتين ذات المجهول x :

$$(1) \quad 4x \equiv 2 [6] \quad , \quad 6x \equiv 1 [4] \quad (2)$$

الحل :

$$(1) \quad 4x \equiv 2 [6]$$

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$4x \equiv$	0	4	2	0	4	2	[6]

إذن حلول المعادلة $4x \equiv 2[6]$ هي الأعداد الصحيحة x بحيث $x \equiv 2[6]$ أو $x \equiv 5[6]$.
 $6x \equiv 1[4] \quad (2)$

$x \equiv$	0	1	2	3	[4]
$6x \equiv$	0	2	0	2	[4]

إذن المعادلة $6x \equiv 1[4]$ لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}$.

مثال 02:

حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة التالية ذات المجهول x : $x^2 - 3x \equiv 4[5]$

الحل :

$x \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$x^2 \equiv$	0	1	4	4	1	[5]
$3x \equiv$	0	3	1	4	2	[5]
$x^2 + 3x \equiv$	0	4	0	3	3	[5]

إذن حلول المعادلة $x^2 - 3x \equiv 4[5]$ هي الأعداد الصحيحة x بحيث $x \equiv 4[5]$.

22. كيف نحل جملة معادلتين من الشكل $\begin{cases} x \equiv a[n] \\ x \equiv b[m] \end{cases}$ ؟

طريقة 01:

نكتب الجملة على شكل معادلة من الشكل $ax + by = c$ ثم نحل هذه المعادلة في $\mathbb{Z}$.

مثال :

حل في $\mathbb{Z}$ الجملة التالية $\begin{cases} x \equiv 1[4] \\ x \equiv 2[3] \end{cases}$

الحل :

$x \equiv 1[4]$ معناه يوجد عدد صحيح a بحيث $x = 1 + 4a$ و $x \equiv 2[3]$ معناه يوجد عدد صحيح b بحيث $x = 2 + 3b$.

تكافئ $1 + 4a = 2 + 3b$ أي $4a - 3b = 1$ $\begin{cases} x \equiv 1[4] \\ x \equiv 2[3] \end{cases}$

نجد حلاً خاصاً للمعادلة $4a - 3b = 1$ وليكن $(1; 1)$ ثم نحل المعادلة فنجد $a = 1 + 3k$ و $b = 1 + 4k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

نعوض a و b في $x = 1 + 4a$ و $x = 2 + 3b$ فنجد $x = 5 + 12k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ أي $x \equiv 5[12]$.

طريقة 02:

نكتب المعادلتين بنفس التردد .

مثال :

$$\text{حل في } \mathbb{Z} \text{ الجملة التالية } \begin{cases} x \equiv 1[4] \\ x \equiv 2[3] \end{cases}$$

الحل :

$$\begin{cases} x \equiv 1[4] \\ x \equiv 2[3] \end{cases} \text{ نكتبها على الشكل } \begin{cases} 3x \equiv 3[12] \\ 4x \equiv 8[12] \end{cases} \text{ بالطرح نجد } (4x - 3x) \equiv (8 - 3)[12] \text{ أي } x \equiv 5[12]$$

23. كيف نكتب عددا طبيعيا a في النظام ذي الأساس x ؟

طريقة:

 x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1.(1) إذا كان $a < x$ ، a يمثل برمزوحيد يسمى رقما.(2) إذا كان $a \geq x$ ، ننشر a بطريقة وحيدة وفق العدد x :

$$a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \dots + r_2x^2 + r_1x + r_0 \text{ حيث}$$

$$0 < q < x \text{ و } 0 \leq r_\alpha < x \text{ مع } \alpha \in 0; 1; 2; \dots; n-1$$

يمثل العدد a كما يلي $a = \overline{qr_{n-1}r_{n-2}\dots r_1r_0}$ في النظام ذي الأساس x .

$$\text{إذا كان } x = 10 \text{ نكتب : } a = \overline{qr_{n-1}r_{n-2}\dots r_1r_0}$$

مثال 01

 a عدد طبيعي يكتب $\overline{235}$ في النظام ذي الأساس 8 . أكتب a في النظام العشري .

الحل :

$$a = 2 \times 8^2 + 3 \times 8 + 5 = 157 \text{ ومنه } a \text{ يكتب } 157 \text{ في النظام العشري .}$$

مثال 02

 a عدد طبيعي يكتب 1324 في النظام ذي الأساس 10 . أكتب a في النظام ذي الأساس 7 .

الحل :

$$1324 = 7 \times 189 + 1$$

$$189 = 7 \times 27 + 0$$

$$27 = 7 \times 3 + 6$$

$$3 = 7 \times 0 + 3$$

ومنه a يكتب $\overline{3601}$ في النظام ذي الأساس 7.

مثال 03

 a عدد طبيعي يكتب $\overline{643}$ في النظام ذي الأساس 8 . أكتب a في النظام ذي الأساس 2 .

الحل:

نكتب في a في النظام العشري ثم ننتقل الى النظام ذي الأساس 8.

• $a = 6 \times 8^2 + 4 \times 8 + 3 = 419$ ومنه a يكتب 419 في النظام العشري .

$$419 = 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$$

إذن a يكتب $\overline{110100011}$ في النظام ذي الأساس 2.

الدرس مع أمثلة محلولة

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

(1) تعريف

a و b عددان صحيحان و a غير معدوم. نقول أن العدد a يقسم العدد b إذا وجد عدد صحيح k بحيث : $b = ka$. نقول a قاسم للعدد b أو نقول كذلك b مضاعف للعدد a .

العبارات التالية متكافئة :

- العدد a يقسم العدد b
- العدد a قاسم للعدد b
- العدد b يقبل القسمة على العدد a
- العدد b مضاعف للعدد a

مثال :

$-42 = 6 \times -7$	$56 = -7 \times -8$	$8 \times 9 = 72$	العبارات متكافئة
$6 \mid -42$	$-7 \mid 56$	$9 \mid 72$	
$-7 \mid -42$	$-8 \mid 56$	$8 \mid 72$	
-42 يقبل القسمة على 6	56 يقبل القسمة على -7	72 يقبل القسمة على 9	
-42 يقبل القسمة على -7	56 يقبل القسمة على -8	72 يقبل القسمة على 8	
-42 مضاعف للعدد 6	56 مضاعف للعدد -7	72 مضاعف للعدد 9	
-42 مضاعف للعدد -7	56 مضاعف للعدد -8	72 مضاعف للعدد 8	

ملاحظة:

في $\mathbb{Z}$ للعددين a و $-a$ نفس القواسم .

مثال :

قواسم 12 الطبيعية (في $\mathbb{N}$) هي $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
 قواسم 12 الصحيحة (في $\mathbb{Z}$) هي $\{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ وهي نفسها قواسم -12 .

(2) خواص

خاصية 1: a , b , c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c .

مثال :

$3 \mid 6$ و $6 \mid 12$ فإن $3 \mid 12$

خاصية 2: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح k ، a يقسم kb

مثال :

$$3 \mid 6 \quad \text{فإن} \quad 3 \mid 6 \times 5, \quad 3 \mid 6 \times 7, \quad 3 \mid 6 \times 2013, \quad 3 \mid 6 \times k$$

خاصية 3: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم k ، ka يقسم kb

$$3 \mid 6 \quad \text{فإن} \quad 3 \times 5 \mid 6 \times 5, \quad 3 \times 7 \mid 6 \times 7, \quad 3 \times 2013 \mid 6 \times 2013, \quad 3 \times k \mid 6 \times k$$

القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

مبرهنة: a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم . توجد ثنائية وحيدة (q, r) من الأعداد الصحيحة حيث $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

تسمى عملية البحث عن الثنائية (q, r) بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b . يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل و باقي

القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b .

مثال 01: عين حاصل وباقي قسمة العدد الصحيح a على العدد الطبيعي غير المعدوم b في كل من الحالات :

$$(a = 72, b = 7) \quad (a = -58, b = 7) \quad (a = -105, b = 3) \quad (a = -105, b = 11)$$

الحل :

$$(1) \quad 72 = 7 \times 10 + 2 \quad \text{الباقي هو } 2 \quad \text{وحاصل القسمة هو } 10.$$

$$(2) \quad -58 = 7 \times (-9) + 5 \quad \text{الباقي هو } 5 \quad \text{وحاصل القسمة هو } -9.$$

$$(3) \quad -105 = 9 \times (-12) + 3 \quad \text{الباقي هو } 3 \quad \text{وحاصل القسمة هو } -12.$$

مثال 02 :

عين كل الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها حاصل القسمة الإقليدية لـ n على 5 يساوي باقي هذه القسمة.

الحل :

$$n = 5q + q \quad \text{و} \quad 0 \leq q < 5 \quad \text{أي} \quad n = 6q$$

$$\text{بما أن } 0 \leq q < 5 \quad \text{فإن} \quad q \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

$$\text{ومنه} \quad n \in \{0; 6; 12; 18; 24\}$$

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

a عدد طبيعي غير معدوم . نرمز به D_a إلى مجموعة قواسم العدد الطبيعي a غير المعدوم .

مثال: مجموعة قواسم 8 هي $D_{12} = 1; 2; 3; 4; 6; 12$ ، مجموعة قواسم 0 هي $\mathbb{N}^*$.

تعريف: a و b عددان طبيعيين غير معدومين. D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب .

$D_a \cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b .

يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a \cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ونرمز له بـ

$PGCD \ a; b$.

مثال : $D_{12} = 1; 2; 3; 4; 6; 12$ و $D_{18} = 1; 2; 3; 6; 9; 18$ فإن $D_{12} \cap D_{18} = 1; 2; 3; 6$ و $PGCD\ 12; 18 = 6$

ملاحظات: $PGCD\ a, a = a$ و $PGCD\ 1; a = 1$ و $PGCD\ 0; a = a$ (غير معدوم)

$PGCD\ 24; 24 = 24$; $PGCD\ 1; 2013 = 1$; $PGCD\ 0; 2012 = 2012$

حساب $PGCD\ a; b$

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمة خوارزمية إقليدس .

مثال : أوجد $PGCD\ 315; 117$

4	2	1	2		الحاصل
9	36	81	117	315	المقسوم و القاسم
0	9	36	81		الباقي

إذن $PGCD\ 315; 117 = 9$

مجموعة القواسم المشتركة

مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم قاسميهما المشترك الأكبر.

مثال : أوجد مجموعة القواسم المشتركة للعددين الطبيعيين 308 و 448

الحل : نبحث أولاً عن $PGCD\ 308; 448$

5	2	1		الحاصل
28	140	308	448	المقسوم و القاسم
0	28	140		الباقي

إذن $PGCD\ 308; 448 = 28$ ومنه مجموعة القواسم المشتركة للعددين الطبيعيين 308 و 448 هي

مجموعة قواسم 28 أي $D_{308} \cap D_{448} = \{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$.

العددان الأوليان فيما بينهما

a و b عددان طبيعيان غير معدومين.

يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1 .

مثل 12 و 7 ، 8 و 15

خواص : a و b و k أعداد طبيعية غير معدومة

خواص	مثال
$PGCD\ ka;kb = k \times PGCD\ a;b$	$PGCD\ 20;32 = 4 \times PGCD\ 5;8 = 4 \times 1 = 4$
$PGCD\ a;1 = 1$	$PGCD\ 12;1 = 12$
$PGCD\ a;a = a$	$PGCD\ 36;36 = 36$
$PGCD\ a;0 = a$	$PGCD\ 14;0 = 14$
$PGCD\ a;b = PGCD\ b;a$	$PGCD\ 12;18 = PGCD\ 18;12$
إذا كان $a b$ فإن $PGCD\ a;b = a$	$PGCD\ 6;18 = 6$
إذا كان $k a$ و $k b$ فإن $PGCD\ \left(\frac{a}{k}; \frac{b}{k}\right) = \frac{1}{k} \times PGCD\ a;b$	$PGCD\ \left(\frac{12}{6}; \frac{18}{6}\right) = \frac{1}{6} \times PGCD\ 12;18$

خاصية مهمة جدا :

a و b عددان طبيعيان غير معدومين. إذا كان d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b فإنه يوجد عدنان طبيعيان a' و b' أوليين فيما بينهما بحيث . $a = da'$ و $b = db'$

مثال :

عين كل الثنائيات $a;b$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث :

$$\begin{cases} a+b=42 \\ PGCD\ a;b=6 \end{cases}$$

الحل:

نضع $a = 6a'$ و $b = 6b'$ حيث a' و b' عدنان أوليان فيما بينهما .

$$a+b=42 \text{ تعني } 6a'+6b'=42 \text{ ومنه } a'+b'=7$$

$$a';b' \in 1;6, 2;5, 3;4, 4;3, 5;2, 6;1$$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S = 6;36, 12;30, 18;24, 24;18, 30;12, 36;6$

الموافقات في $\mathbb{Z}$

تعريف: n عدد طبيعي غير معدوم. نقول أن العددين الصحيحين a و b متوافقان بتريديد n معناه أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n . ونرمز $a \equiv b \pmod{n}$ ونقرأ a يوافق b بتريديد n .

العبارات التالية متكافئة :

$$1. a \equiv b \pmod{n}$$

$$2. a \text{ و } b \text{ لهما نفس الباقي في القسمة على } n.$$

$$3. a - b \text{ مضاعف للعدد الطبيعي } n$$

$$\text{مثل : } 17 \equiv 12 \pmod{5}, 33 \equiv 25 \pmod{8}, -49 \equiv -5 \pmod{11}$$

خواص الموافقات

n عدد طبيعي غير معدوم . a, b, c, d, k أعداد صحيحة:

خواص	
كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n ، بتريديد n حيث $n \geq 2$	1
من أجل كل عدد صحيح a لدينا $a \equiv a \pmod{n}$.	2
إذا كان $a \equiv b \pmod{n}$ فإن $b \equiv a \pmod{n}$.	3
إذا كان $(a \equiv b \pmod{n} \text{ و } b \equiv c \pmod{n})$ فإن $a \equiv c \pmod{n}$.	4
إذا كان $(a \equiv b \pmod{n} \text{ و } c \equiv d \pmod{n})$ فإن $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.	5
إذا كان $(a \equiv b \pmod{n} \text{ و } c \equiv d \pmod{n})$ فإن $ac \equiv bd \pmod{n}$.	6
إذا كان $a \equiv b \pmod{n}$ فإن $ka \equiv kb \pmod{n}$.	7
إذا كان $a \equiv b \pmod{n}$ فإن $a^p \equiv b^p \pmod{n}$. p عدد طبيعي غير معدوم	8

مثال 01:

(1) عين مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $n+3 \equiv 5 \pmod{11}$.

(2) عين مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $3n \equiv 2 \pmod{5}$.

الحل :

$$(1) \quad n+3 \equiv 5 \pmod{11} \text{ تكافئ } n+3-5 \equiv 5-5 \pmod{11} \text{ أي } n \equiv 2 \pmod{11} .$$

إذن مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $n+3 \equiv 5 \pmod{11}$ هي من الشكل $n=2+11k$ حيث k عدد صحيح.

(2) لدينا $3n \equiv 2 \pmod{5}$ و $2 \equiv 2 \pmod{5}$ فحسب الخاصية 6 من الجدول السابق فإن $2 \times 3n \equiv 2 \times 2 \pmod{5}$ أي

$6n \equiv 4 \pmod{5}$ ومنه $n \equiv 4 \pmod{5}$ إذن مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $3n \equiv 2 \pmod{5}$ هي من الشكل

$$n=4+5k \text{ حيث } k \text{ عدد صحيح.}$$

ملاحظة يمكن استعمال الجدول :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$3n \equiv$	0	3	1	4	2	$[5]$

مثال 02 :

بين أنه من أجل كل عدد صحيح n فإن $n(n^4 - 1)$ يقبل القسمة على 5

الحل :

$n(n^4 - 1)$ يقبل القسمة على 5 معناه $n(n^4 - 1) \equiv 0[5]$. نستعمل الجدول التالي :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$n^4 - 1 \equiv$	-1	0	0	0	0	$[5]$
$n(n^4 - 1) \equiv$	0	0	0	0	0	$[5]$

إذن من أجل كل عدد صحيح n فإن $n(n^4 - 1)$ يقبل القسمة على 5

مثال :

(1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الأقلدية للعدد 5^n على 7 .

(2) استنتج باقي قسمة العدد 5^{2013} على 7

الحل :

أ) $5^6 \equiv 1[7]$, $5^5 \equiv 3[7]$, $5^4 \equiv 2[7]$, $5^3 \equiv 6[7]$, $5^2 \equiv 4[7]$, $5 \equiv 5[7]$

الموافقة تشكل متتالية دورية ودورها 6 . نقسم الأس n على الدور 6 فنجد $n = 6k + r$ حيث $0 \leq r < 6$

من أجل كل عدد طبيعي k نلخص في الجدول التالي

وبالتالي باقي قسمة العدد 5^n على 7 هو.	فإن $n = 6k + r$	إذا كان $r =$
1	$n = 6k$	0
5	$n = 6k + 1$	1
4	$n = 6k + 2$	2
6	$n = 6k + 3$	3
2	$n = 6k + 4$	4
3	$n = 6k + 5$	5

ب) باقي قسمة العدد 5^{2013} على 7

نقسم الأس 2013 على الدور 6 فنجد $2013 = 6 \times 335 + 3$ من الشكل $6k + 3$ وبالتالي من الجدول

السابق مباشرة نجد $5^{2013} \equiv 6[7]$.

التعداد في الأساس x

مبرهنة: x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماماً من 1 . كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة

على الشكل $a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \dots + r_2x^2 + r_1x + r_0$ حيث

$0 < q < x$ و $0 \leq r_\alpha < x$ مع $\alpha \in 0; 1; 2; \dots; n-1$

(1) إذا كان $a < x$: a يمثل برمز وحيد يسمى رقماً .

(2) إذا كان $a \geq x$: يمثل العدد a كما يلي $a = \overline{qr_{n-1}r_{n-2}\dots r_1r_0}$. وهي كتابة العدد a في النظام ذي الأساس x
إذا كان $x=10$ ، نكتب : $a = qr_{n-1}r_{n-2}\dots r_1r_0$

مثال 01:

a عدد طبيعي يكتب $\overline{547}$ في النظام ذي الأساس 9 . أكتب a في الأساس 10 (النظام العشري).

الحل:

$$a = 5 \times 9^2 + 4 \times 9 + 7 = 448 \text{ ومنه } a \text{ يكتب } 448 \text{ في النظام العشري .}$$

مثال 02:

a عدد طبيعي يكتب 1955 في النظام ذي الأساس 10 . أكتب a في الأساس 7.

الحل:

$$1955 = 279 \times 7 + 2$$

$$279 = 39 \times 7 + 6$$

$$39 = 5 \times 7 + 4$$

$$5 = 0 \times 7 + 5$$

ومنه $1955 = 5 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 6 \times 7 + 2$ ومنه a يكتب $\overline{5462}$ في الأساس 7 .

الأعداد الأولية

تعريف: نقول عن العدد الطبيعي n أنه عدد أولي إذا وفقط إذا كان يقبل قاسمين فقط في $\mathbb{N}$ هما: 1 و n

نفسه .

✓ 0 غير أولي لأنه يقبل ما لانهاية من القواسم .

✓ 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد فقط هو 1 .

✓ 2 هو العدد الأولي الزوجي الوحيد . (كل الأعداد الأولية فردية ما عدا 2)

✓ 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 , 29 , 31 , 37 , 41 , 43 , 47 هي الأعداد الأولية الأصغر من

50 .

خواص	
مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية	1
كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 يقبل على الأقل قاسما أوليا .	2
كل عدد طبيعي n غير أولي أكبر تماما من 1 يقبل قاسما أوليا a حيث $a \leq \sqrt{n}$.	3

معرفة هل العدد أولي أم لا

لمعرفة إذا كان عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 أوليا أم لا . نحسب $\sqrt{n}$.

• إذا كان $\sqrt{n}$ عددا طبيعيا أي n مربع تام فإن n غير أولي .

• إذا كان $\sqrt{n}$ غير طبيعي نقسم n على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب .

(أ) إذا وجدنا أحد البواقي معدوما نتوقف ونقرّ أن n غير أولي .

(ب) إذا كانت كل البواقي غير معدومة نقرّ أن n أولي .

مثال :

هل الأعداد التالية أولية ؟ 169 ، 143 ، 269

بالنسبة للعدد 169 : لدينا $\sqrt{169} = 13$ وهو عدد طبيعي أي 169 مربع تام وبالتالي 169 غير أولي.

بالنسبة للعدد 143 : لدينا $\sqrt{143} = 11,958$ وهو عدد غير طبيعي نقسم 143 على الأعداد الأولية الأصغر من 11,958 وهي: 2, 3, 5, 7, 11 فنجد

المقسوم عليه	حاصل القسمة	باقي القسمة	143
2	71	1	لا يقبل القسمة على 2
3	47	1	لا يقبل القسمة على 3
5	28	3	لا يقبل القسمة على 5
7	20	3	لا يقبل القسمة على 7
11	13	0 نتوقف	يقبل القسمة على 11

أحد البواقي معدوم نتوقف من عملية القسمة ونقرّب بأن العدد 143 غير أولي.

بالنسبة للعدد 269 : لدينا $\sqrt{269} = 16,401$ وهو عدد غير طبيعي نقسم 269 على الأعداد الأولية الأصغر من 16,401 وهي: 2, 3, 5, 7, 11, 13 فنجد

المقسوم عليه	حاصل القسمة	باقي القسمة	269
2	134	1	لا يقبل القسمة على 2
3	89	2	لا يقبل القسمة على 3
5	53	4	لا يقبل القسمة على 5
7	38	3	لا يقبل القسمة على 7
11	24	5	لا يقبل القسمة على 11
13	20	9 نتوقف	لا يقبل القسمة على 13

كل البواقي غير معدومة نتوقف من عملية القسمة ونقرّب بأن العدد 269 أولي.

إيجاد عدد ومجموعة قواسم عدد طبيعي

لإيجاد عدد قواسم عدد طبيعي a نحلل a إلى جداء عوامل أولية . نضيف 1 إلى كل أس في التحليل ثم نحسب جداء الأعداد المحصل عليها . أما مجموعة القواسم نتبع الطريقة المبينة في المثال التالي :

مثال :

أوجد عدد ومجموعة قواسم العدد 200.

الحل : نحلل 200 إلى جداء عوامله الأولية فنجد $200 = 2^3 \times 5^2$

نضيف 1 على كل أس ونحسب جداء الأعداد المحصل عليها: $(3+1)(2+1)=12$ ومنه عدد قواسم 200 هو 12.

الآن نجد مجموعة هذه القواسم نكتب : $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ أي $1, 2, 4, 8$ نضرب كل عدد من $5^0, 5^1, 5^2$ أي $1, 5, 25$

السطر الثاني في السطر الأول فنجد مجموعة قواسم 200 وهي :

$$D_{200} = \{1, 2, 4, 8, 5, 10, 20, 40, 25, 50, 100, 200\}$$

المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين غير معدومين

نرمز بـ M_a لمجموعة مضاعفات العدد الطبيعي غير المعدوم a .

نرمز بـ M_b لمجموعة مضاعفات العدد الطبيعي غير المعدوم b .

$M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b

يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b ، ونرمز له

بـ $PPCM\ a;b$.

ملاحظات وخواص

a و b و k أعداد طبيعية غير معدومة

ملاحظات و خواص	
$PPCM\ ka;kb = k \times PPCM\ a;b$	1
$PPCM\ a;1 = a$	2
$PPCM\ a;a = a$	3
$PPCM\ a;b = PPCM\ b;a$	4
إذا كان $a b$ فإن $PPCM\ a;b = b$	5
إذا كان a و b أوليين فيما بينهما فإن $PPCM\ a;b = a \times b$	6
مجموعة المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة مضاعفات المضاعف المشترك الأصغر لهما.	7

حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية.

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماماً من 1 : نحلل كلا من a و b ونأخذ جداء العوامل الأولية المشتركة مرة واحدة وبأصغر أس في تحليلهما .

حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية.

المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماماً من 1 : نحلل كلا من a و b ونأخذ جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة مرة واحدة وبأكبر أس في تحليلهما .

مثال :

باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية أوجد $PPCM\ 120;756$ و $PGCD\ 120;756$

الحل :

$$\text{لدينا } 120 = 2^3 \times 3 \times 5 \text{ و } 750 = 2^2 \times 3^3 \times 7$$

$$PGCD\ 120;756 = 2^2 \times 3 = 12 \text{ و } PPCM\ 120;756 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 7560$$

العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقسام المشترك الأكبر لعددتين طبيعيتين

$$PGCD\ a;b \times PPCM\ a;b = a \times b$$

• إذا كان d هو $PGCD(a,b)$ و m هو $PPCM(a,b)$ فإنه يوجد عدنان طبيعيان أوليان فيما بينهما a' و b' بحيث : $m = a'b'd$

مثال :

باستعمال العلاقة بين القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر للعددين 308 و 364. عين المضاعف المشترك الأصغر لهما.

الحل :

لدينا $308 = 2^2 \times 7 \times 11$ و $364 = 2^2 \times 7 \times 13$ فيكون $PGCD(308,364) = 2^2 \times 7 = 28$ وبالتالي :

$$PPCM(308, 364) = \frac{308 \times 364}{PGCD(308, 364)} = \frac{308 \times 364}{28} = 4004$$

مبرهنات وخواص :

مبرهنة بيزو :

يكون عدنان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عدنان صحيحان u و v حيث :

$$au + bv = 1$$

مثال :

ليكن n عددا طبيعيا . باستعمال مبرهنة بيزو .

أثبت أن العددين $A = 2n + 1$ و $B = 9n + 4$ عدنان أوليان فيما بينهما .

الحل :

$$\text{نحسب } 9A - 2B = 9(2n + 1) - 2(9n + 4) = 18n + 9 - 18n - 8 = 1: 9A - 2B$$

ومنه وحسب مبرهنة بيزو A و B عدنان أوليان فيما بينهما .

خاصية 1: إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عدنان صحيحان u و v حيث :

$$au + bv = d$$

مثال :

عين عددين صحيحين u و v حيث أن $27u + 11v = 9$.

الحل :

$$27 = 11 \times 2 + 5 \text{ ومنه } 5 = 27 \times (1) - 11 \times (2)$$

$$11 = 5 \times 2 + 1 \text{ ومنه } 1 = 11 \times (1) - 5 \times (2)$$

$$11 \times (1) - 5 \times (2) = 1 \text{ ومنه } 11 \times (1) - [27 \times (1) - 11 \times (2)] \times (2) = 1 \text{ أي } 27 \times (-2) + 11 \times (5) = 1 \text{ ومنه}$$

$$27 \times (-18) + 11 \times (45) = 9 \text{ فنحصل على } u = -18 \text{ و } v = 45$$

خاصية 2: إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد الأصغر منها .

مثال : العدد 5 أولي فهو أولي مع كلا من 2 , 4 , 3

خاصية 3: إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b \times c$

مثال :

ليكن n عددا صحيحا .

(1) أثبت أن $n+2$ و $2n+5$ أوليان فيما بينهما .

(2) أثبت أن $n+2$ و $3n+7$ أوليان فيما بينهما .

(3) استنتج أن $n+2$ و $6n^2 + 29n + 35$ أوليان فيما بينهما .

الحل:

(1) نلاحظ أن :

$$-2(n+2) + 1(2n+5) = 1$$

(2) نلاحظ أن :

$$-3(n+2) + 1(3n+7) = 1$$

(3) نلاحظ أن :

$$3n+7 \quad 2n+5 = 6n^2 + 29n + 35$$

بما أن $n+2$ أولي مع كل من $2n+5$ و $3n+7$ فإن $n+2$ أولي مع جدائهما $6n^2 + 29n + 35$

وهذا حسب الخاصية 3 .

مبرهنة غووس :

a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a يقسم الجداء bc وكان a أوليا مع b ، فإن a يقسم c .

مثال 01:

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول x, y : $3x - 5y = 0$.

الحل :

$$3x - 5y = 0 \text{ تكافئ } 3x = 5y$$

3 تقسم الجداء $3x$ ومنه 3 تقسم الجداء $5y$. بما أن 3 أولي مع 5 فإن 3 تقسم y وبالتالي $y = 3k$ حيث k عدد صحيح .

نعوض في المعادلة $3x = 5y$ بقيمة $y = 3k$ فنجد $3x = 5(3k)$ ومنه $x = 5k$

حلول المعادلة $3x - 5y = 0$ هي الثنائيات من الشكل $(5k, 3k)$ حيث k عدد صحيح .

مثال 02 :

لتكن المعادلة $7x - 5y = 1 \dots\dots\dots (E)$ ذات المجهول x, y .

(1) تحقق من أن الثنائية $(3, 4)$ هي حلا خاصا للمعادلة (E) .

(2) استنتج في $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (E) .

الحل :

(1) نضع $(x_0, y_0) = (3, 4)$. نلاحظ $7(3) - 5(4) = 21 - 20 = 1$ ومنه الثنائية $(3, 4)$ هي حلا خاصا للمعادلة (E) .

(2) لدينا $7x - 5y = 1$ و $7x_0 - 5y_0 = 1$ ومنه $7x - 5y = 7x_0 - 5y_0$ تكافئ $7(x - x_0) = 5(y - y_0)$ أي $7(x - 3) = 5(y - 4)$

لدينا 5 يقسم $5(y - 4)$ ومنه 5 يقسم $7(x - 3)$ و. بما أن 5 أولي مع 7 فإن 5 يقسم $x - 3$ أي $x - 3 = 5k$ ومنه $x = 3 + 5k$ حيث k عدد صحيح .

نعوض في المعادلة $7x - 5y = 1$ بقيمة $x = 3 + 5k$ فنجد $7(3 + 5k) - 5y = 1$ ومنه $y = 4 + 7k$ حلول المعادلة $7x - 5y = 1$ هي الثنائيات من الشكل $(3 + 5k, 4 + 7k)$ حيث k عدد صحيح .

خاصية:

a و b و c أعداد طبيعية غير معدومة .

إذا كان a يقبل القسمة على كل من b و c وكان b و c أوليين فيما بينهما فإن a يقبل القسمة على الجداء

 bc

مثال :

برهن أنه من أجل كل عدد صحيح n ، فإن $n^5 - n$ يقبل القسمة على 15 .

الحل :

لبرهان على أن العدد $n^5 - n$ يقبل القسمة على 15 يكفي البرهان على أن $n^5 - n$ يقبل القسمة على 3 وعلى 5، لأن 3 و 5 أوليان فيما بينهما.

(1) نبين أن $n^5 - n$ يقبل القسمة على 3 :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n \equiv 0[3]$ أو $n \equiv 1[3]$ أو $n \equiv 2[3]$

• إذا كان $n \equiv 0[3]$ فإن $n^5 - n \equiv 0[3]$.

• إذا كان $n \equiv 1[3]$ فإن $n^5 - n \equiv 1 - 1[3]$ أي $n^5 - n \equiv 0[3]$

• إذا كان $n \equiv 2[3]$ فإن $n^5 - n \equiv 32 - 2[3]$ أي $n^5 - n \equiv 0[3]$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n^5 - n \equiv 0[3]$.

(2) نبين أن $n^5 - n$ يقبل القسمة على 5 :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n \equiv 0[5]$ أو $n \equiv 1[5]$ أو $n \equiv 2[5]$ أو $n \equiv 3[5]$ أو $n \equiv 4[5]$.

• إذا كان $n \equiv 0[5]$ فإن $n^5 - n \equiv 0[5]$.

• إذا كان $n \equiv 1[5]$ فإن $n^5 - n \equiv 1 - 1[5]$ أي $n^5 - n \equiv 0[5]$

• إذا كان $n \equiv 2[5]$ فإن $n^5 - n \equiv 32 - 2[5]$ أي $n^5 - n \equiv 0[5]$

• إذا كان $n \equiv 3[5]$ فإن $n^5 - n \equiv 243 - 3[5]$ أي $n^5 - n \equiv 0[5]$

• إذا كان $n \equiv 4[5]$ فإن $n^5 - n \equiv 1024 - 4[5]$ أي $n^5 - n \equiv 0[5]$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n^5 - n \equiv 0[5]$.

تمارين تدريبية محلولة

التمرين رقم 01 :

أثبت أن مجموع عددين فرديين متتابعين يقبل القسمة على 4 .

التمرين رقم 02 :

إذا كان العدد الطبيعي d يقسم في آن واحد كلا من العددين الطبيعيين $(2n+3)$ و $(5n+9)$. عين القيم الممكنة لـ d .

التمرين رقم 03 :

كيف يجب إختيار العدد الطبيعي n حتى يكون n قاسما لعدد $(n+8)$ ؟

التمرين رقم 04 :

عين الأعداد الصحيحة n التي من أجلها يكون $(n-4)$ قاسما للعدد $(n+2)$.

التمرين رقم 05 :

n عدد طبيعي غير معدوم . عين قيم n الممكنة حتى يكون العدد $\frac{n+6}{n}$ طبيعيا .

التمرين رقم 06 :

عين العددين الصحيحين a و b بحيث $a-b=538$. حاصل وباقي القسمة الإقليدية للعدد a على b هما على الترتيب 13 و 22 .

التمرين رقم 07 :

عين جميع قيم العدد الطبيعي a بحيث باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 45 يساوي مربع حاصل هذه القسمة .

التمرين رقم 08 :

برهن أن باقي القسمة الإقليدية للعدد $[a^2 + (a-1)^2]^2$ على $4a^2$ هو $(2a-1)^2$.

التمرين رقم 09 :

(1) عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 36 ثم للعدد 48 .

(2) أوجد جميع القواسم المشتركة بينهما .

(3) استنتج $PGCD(48; 36)$

التمرين رقم 10 :

أحسب $PGCD(280; 105)$ باستعمال الطرح في خوارزمية إقليدس .

التمرين رقم 11 :

باستعمال خوارزمية إقليدس ، أحسب $PGCD(1275, 900)$

التمرين رقم 12:

عين كل القواسم المشتركة للعددين 456 و 792 .

(1) حسب شفعية n ، $PGCD(n+1, n+3)$

(2) حلل كلا من $n^2 + 3n + 2$ و $n^2 + 5n + 6$.

(3) استنتج $PGCD(n^2 + 3n + 2, n^2 + 5n + 6)$ بدلالة n .

التمرين رقم 13:

n عدد طبيعي أكبر تماما من الواحد.

بين أنه إذا كان $\begin{cases} d|n+3 \\ d|n+1 \end{cases}$ فإن $d \in \{1, 2\}$.

التمرين رقم 14:

عين الثنائيات الطبيعية (a, b) بحيث $\begin{cases} a+b=72 \\ PGCD(a,b)=8 \end{cases}$.

التمرين رقم 15:

أحسب $PGCD(24; 18)$ و استنتج $PPCM(24; 18)$.

التمرين رقم 16:

n عدد طبيعي أكبر تماما من الواحد

(1) أحسب $PGCD(n^3 + n; n^2)$.

(2) استنتج $PPCM(n^3 + n; n^2)$.

التمرين رقم 17:

عين الثنائيات الطبيعية (a, b) بحيث $\begin{cases} PGCD(a,b)=9 \\ PPCM(a,b)=2430 \end{cases}$ مع $a < b$.

التمرين رقم 18:

عين الثنائيات الطبيعية (a, b) بحيث $\begin{cases} a \times b = 300 \\ PPCM(a,b) = 60 \end{cases}$.

التمرين رقم 19:

(1) عين جميع القواسم الطبيعية للعدد 108 .

(2) نضع $d = PGCD(a, b)$ و $m = PPCM(a, b)$. عين الثنائيات الطبيعية (a, b) بحيث

$$\begin{cases} 10 < d < 15 \\ m - 3d = 108 \end{cases}$$

التمرين رقم 20:

(1) عين جميع القواسم الطبيعية للعدد 72 .

(2) نضع $d = \text{PGCD}(a, b)$ و $m = \text{PPCM}(a, b)$. عين الثنائيات الطبيعية (a, b) بحيث

$$\begin{cases} 30 < d < 40 \\ m - 4d = 72 \end{cases}$$

التمرين رقم 21:

نضع $d = \text{PGCD}(a, b)$ و $m = \text{PPCM}(a, b)$. عين الثنائيات الطبيعية (a, b) بحيث

$$\begin{cases} m = d^2 \\ m + d = 156 \\ a \geq b \end{cases}$$

التمرين رقم 22:

نضع $m = \text{PPCM}(a, b)$. عين الثنائيات الطبيعية (a, b) بحيث

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases}$$

التمرين رقم 23:

أوجد عددين صحيحين a و b بحيث $25872a + 482b = 44$

التمرين رقم 24:

ليكن $N = 32^5 \times 9^4$ ما هو عدد قواسم N ؟

التمرين رقم 25:

(1) عين جميع القواسم الطبيعية للعدد 246 .

(2) باقي القسمة الإقليدية لـ 321 على العدد الطبيعي b هو 75. عين القيم الممكنة لـ b وحاصل القسمة.

التمرين رقم 26:

هل العدد 257 أولي ؟ هل العدد 319 أولي ؟

التمرين رقم 27:

a و b عددان أوليان فيما بينهما. بين أن العددين $5a + b$ و $9a + 2b$ أوليان فيما بينهما .

حلول التمارين التدريبية

حل التمرين رقم 01 : كل عددين فرديين متتابعين نستطيع كتابتهما على الشكل $2n+1$ و $2n+3$.
إذن $(2n+1) + (2n+3) = 4n+4 = 4(n+1)$ وهو مضاعف للعدد 4 أي يقبل القسمة على 4 .

حل التمرين رقم 02 :

إذا كان العدد الطبيعي d يقسم في آن واحد كلا من العددين الطبيعيين $(2n+3)$ و $(5n+9)$ فإن d يقسم $2(5n+9)$ و يقسم $5(2n+3)$ وكذلك يقسم الفرق بين هذين العددين أي
 $2(5n+9) - 5(2n+3) = 10n+18 - 10n-15 = 3$
أي d يقسم 3 ومنه القيم الممكنة لـ d هي 1 و 3 .

حل التمرين رقم 03 :

إذا كان n يقسم $n+8$ فهو حتما يقسم 8 وبالتالي مجموعة القيم الممكنة لـ n هي 1 , 2 , 4 , 8)
قواسم 8 .

حل التمرين رقم 04 :

نكتب $(n+2)$ على الشكل $n+2 = (n-4) + 6$. يكون $(n-4)$ قاسما للعدد $(n+2)$ إذا وفقط إذا كان $(n-4)$ قاسما للعدد 6 أي $(n-4) \in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$ ومنه
 $n \in \{-2, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10\}$

حل التمرين رقم 05 :

نكتب العدد $\frac{n+6}{n}$ كما يلي : $\frac{n+6}{n} = \frac{n}{n} + \frac{6}{n} = 1 + \frac{6}{n}$.
إذن يكون $\frac{n+6}{n}$ طبيعيا إذا كان n قاسما للعدد 6 أي $n \in \{1, 2, 3, 6\}$.

حل التمرين رقم 06 :

لدينا : $\begin{cases} a - b = 538 \\ a = 13b + 22 \\ b > 22 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = b + 538 \\ b + 538 = 13b + 22 \\ b > 22 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a = 581 \\ b = 43 \end{cases}$

حل التمرين رقم 07 :

لدينا : $\begin{cases} a = 45q + q^2 \\ 0 \leq q^2 < 45 \end{cases}$. $0 \leq q^2 < 45$

q	0	1	2	3	4	5	6
q^2	0	1	4	9	16	25	36
$45q$	0	45	90	135	180	225	270
$a = 45q + q^2$	0	46	94	144	196	250	306

$$q \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ ومنه } q^2 \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36\} \text{ أي}$$

حل التمرين رقم 08:

$$\left[a^2 + (a-1)^2 \right]^2 = 4a^2(a-1)^2 + (2a-1)^2 \text{ ومنه } \left[a^2 + (a-1)^2 \right]^2 - (2a-1)^2 = 4a^2(a-1)^2$$

بما أن $a \geq 1$ ، $2a-1 \geq 0$ ولكن $2a-1 < 2a$ وبالتالي $0 \leq 2a-1 < 2a$ ومنه $0 \leq (2a-1)^2 < 4a^2$ وهذا يعني في القسمة الإقليدية $\left[a^2 + (a-1)^2 \right]^2$ على $4a^2$ يكون حاصل القسمة $(a-1)^2$ والباقي هو $(2a-1)^2$.

حل التمرين رقم 09:

$$\begin{aligned} (1) \quad D_{36} &= \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \\ D_{48} &= \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\} \\ (2) \quad D_{36} \cap D_{48} &= \{1; 2; 3; 4; 6; 12\} \\ (3) \quad PGCD(48; 36) &= 12 \end{aligned}$$

حل التمرين رقم 10:

في كل مرحلة نعوض العدد الأكبر بفرق الأكبر والأصغر.

$$\begin{aligned} PGCD(280; 105) &= PGCD(175; 105) \dots\dots\dots 280 - 105 = 175 \\ PGCD(175; 105) &= PGCD(105; 70) \dots\dots\dots 175 - 105 = 70 \\ PGCD(105; 70) &= PGCD(70; 35) \dots\dots\dots 105 - 70 = 35 \\ PGCD(70; 35) &= PGCD(35; 35) = 35 \dots\dots\dots 70 - 35 = 35 \end{aligned}$$

وأخيرا $PGCD(280; 105) = 35$

حل التمرين رقم 11:

2	2	2	1		الحاصل
75	150	375	900	1275	المقسوم والقاسم
0	75	150	375		الباقي

$$PGCD(1275; 900) = 75 \text{ إذن}$$

حل التمرين رقم 12 : نجد أولا $PGCD(792; 456)$

4	1	2	1	1		الحاصل
24	96	120	336	456	792	المقسوم والقاسم
0	24	96	120	336		الباقي

$$PGCD(792; 456) = 24 \text{ إذن ومنه مجموعة القواسم المشتركة للعددين 456 و 792 هي مجموعة قواسم}$$

$$24 \text{ أي } \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}.$$

حل التمرين رقم 13:

$$(1) \begin{cases} d|n+3 \\ d|n+1 \end{cases} \text{ يكافئ } d|(n+3)-(n+1) \text{ يكافئ } d|2 \text{ أي } d \in \{1, 2\}$$

$$(2) \text{ حسب ما سبق } PGCD(n+1, n+3) \text{ يساوي إما 1 وإما 2.}$$

$$\bullet \text{ إذا كان } n \text{ فرديا فإن } n+1 \text{ و } n+3 \text{ زوجيان وبالتالي } PGCD(n+1, n+3)=2$$

$$\bullet \text{ إذا كان } n \text{ زوجيا فإن } n+1 \text{ و } n+3 \text{ فرديان وبالتالي } PGCD(n+1, n+3)=1$$

$$(3) \quad n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2) \quad \text{و} \quad n^2 + 5n + 6 = (n+2)(n+3)$$

$$(4) \quad PGCD(n^2 + 3n + 2, n^2 + 5n + 6) = PGCD[(n+1)(n+2); (n+2)(n+3)] \\ = (n+2)PGCD(n+1; n+3)$$

$$PGCD(n^2 + 3n + 2, n^2 + 5n + 6) = n+2 \text{ إذا كان } n \text{ زوجيا.}$$

$$PGCD(n^2 + 3n + 2, n^2 + 5n + 6) = 2n+4 \text{ إذا كان } n \text{ فرديا.}$$

حل التمرين رقم 14:

$$\text{نضع } a = 8a' \text{ و } b = 8b' \text{ حيث } a' \text{ و } b' \text{ أوليان فيما بينهما أي } PGCD(a', b') = 1$$

$$\text{فيكون لدينا } \begin{cases} a+b=72 \\ PGCD(a,b)=8 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} a'+b'=9 \\ PGCD(a',b')=1 \end{cases} \text{ ونحصل على}$$

$$(a', b') \in \{(1,8); (2,7); (4,5); (5,4); (7,2); (8,1)\}$$

$$(a, b) \in \{(8,64); (16,56); (32,40); (40,32); (56,16); (64,8)\}$$

حل التمرين رقم 15:

$$(1) \quad PGCD(24; 18) = 6$$

$$(2) \quad PPCM(24; 18) = \frac{24 \times 18}{6} = 72$$

حل التمرين رقم 16:

$$(1) \quad PGCD(n^3 + n; n^2) = n \text{ ومنه } n^2 = nn + 0 \text{ و } n^3 + n = n^2n + n$$

$$(2) \quad PPCM(n^3 + n; n^2) = \frac{(n^3 + n)(n^2)}{PGCD(n^3 + n; n^2)} = \frac{(n^3 + n)(n^2)}{n} = n^4 + n^2$$

حل التمرين رقم 17:

$$\text{نضع } a = 9a' \text{ و } b = 9b' \text{ حيث } a' \text{ و } b' \text{ أوليان فيما بينهما أي } PGCD(a', b') = 1$$

$$\begin{cases} a \times b = 2430 \\ PGCD(a, b) = 9 \end{cases} \text{ إذن } PPCM(a, b) \times PGCD(a, b) = a \times b$$

$$\text{نعلم أن } \begin{cases} a' \times b' = 30 \\ PGCD(a', b') = 1 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 9a' \times 9b' = 2430 \\ PGCD(a', b') = 1 \end{cases} \text{ فيكون لدينا}$$

ونحصل على $(a', b') \in \{(1, 30); (2, 15); (3, 10); (5, 6)\}$ وأخيرا :
 $(a, b) \in \{(9, 270); (18, 135); (27, 90); (45, 54)\}$

حل التمرين رقم 18:

نعلم أن $PPCM(a, b) \times PGCD(a, b) = a \times b$ إذن تكافئ

$$PGCD(a, b) = \frac{a \times b}{PPCM(a, b)} = \frac{300}{60} = 5$$

نضع $a = 5a'$ و $b = 5b'$ حيث a' و b' أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a', b') = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} a' \times b' = 12 \\ PGCD(a', b') = 1 \end{array} \right\} \text{ تكافئ } \left\{ \begin{array}{l} a \times b = 300 \\ PGCD(a, b) = 5 \end{array} \right\} \text{ تكافئ } \left\{ \begin{array}{l} a \times b = 300 \\ PPCM(a, b) = 60 \end{array} \right.$$

ونحصل على $(a', b') \in \{(1, 12); (3, 4); (4, 3); (12, 1)\}$ وأخيرا :
 $(a, b) \in \{(5, 60); (15, 20); (20, 15); (60, 5)\}$

حل التمرين رقم 19:

$108 = 2^2 \times 3^3$. إن عدد قواسم 108 هو $(2+1)(3+1) = 12$. نكتب $\left| \begin{array}{l} 2^0 ; 2^1, 2^2 \\ 3^0 ; 3^1, 3^2, 3^3 \end{array} \right|$ أي

$$\left| \begin{array}{l} 1; 2, 4 \\ 1; 3, 9; 27 \end{array} \right.$$

ومنه $D_{108} = \{1, 2, 4; 3; 6; 12; 9; 18; 36; 27, 54; 108\}$

(2) نضع $a = a'd$ و $b = b'd$ حيث a' و b' أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a', b') = 1$. نعلم أن

$m.d = a.b$ ومنه $m.d = a'.b'd^2$ وبالتالي $m = a'.b'd$ إذن $m - 3d = d(a'b' - 3)$

$$d = 12 \quad \left\{ \begin{array}{l} 10 < d < 15 \\ d(a'b' - 3) = 108 \end{array} \right\} \text{ تكافئ } \left\{ \begin{array}{l} 10 < d < 15 \\ m - 3d = 108 \end{array} \right.$$

$$\text{وبالتالي } a'b' - 3 = \frac{108}{12} = 9 \text{ أي } a'b' = 12$$

ونحصل على $(a', b') \in \{(1, 12); (3, 4); (4, 3); (12, 1)\}$ وأخيرا :

$$(a, b) \in \{(12, 144); (36, 48); (48, 36); (144, 12)\}$$

حل التمرين رقم 20:

$72 = 2^3 \times 3^2$. إن عدد قواسم 108 هو $(2+1)(3+1) = 12$. نكتب $\left| \begin{array}{l} 2^0 ; 2^1, 2^2; 2^3 \\ 3^0 ; 3^1, 3^2 \end{array} \right|$ أي

$$\left| \begin{array}{l} 1; 2, 4, 8 \\ 1; 3, 9 \end{array} \right.$$

ومنه $D_{72} = \{1, 2, 4; 8; 3; 6; 12; 24; 9; 18, 36; 72\}$

(2) نضع $a = a'd$ و $b = b'd$ حيث a' و b' أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a', b') = 1$. نعلم أن

$m.d = a.b$ ومنه $m.d = a'.b'd^2$ وبالتالي $m = a'.b'd$ إذن $m - 4d = d(a'b' - 4)$

$d = 36$ نستنتج أن d قاسم للعدد 72 و $30 < d < 40$ أي $30 < d < 40$ تكافئ $\begin{cases} 30 < d < 40 \\ (a'b' - 4)d = 72 \end{cases}$ وبالتالي $a'b' - 4 = \frac{72}{36} = 2$ أي $a'b' = 6$

ونحصل على $(a', b') \in \{(1, 6); (2, 3); (3, 2); (6, 1)\}$ وأخيرا : $(a, b) \in \{(36, 216); (72, 108); (108, 72); (216, 36)\}$

حل التمرين رقم 21:

نضع $a = a'd$ و $b = b'd$ حيث a' و b' أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a', b') = 1$

ومنه $d(d+1) = 12 \times 13$ ومنه $d = 12$ يكافئ $\begin{cases} m = d^2 \\ m + d = 156 \\ a \geq b \end{cases}$

$m = d^2$ تكافئ $a'b'd = d^2$ أي $a'b' = d$ إذن $a'b' = 12$ ونحصل على $(a', b') \in \{(12, 1); (4, 3)\}$ وأخيرا : $(a, b) \in \{(144, 12); (48, 36)\}$

حل التمرين رقم 22:

نضع $a = a'd$ و $b = b'd$ حيث a' و b' أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a', b') = 1$

حيث $d = PGCD(a, b)$ تكافئ $\begin{cases} (a'^2 - b'^2)d^2 = 405 \\ d = 3 \\ 3m = ab \end{cases}$

ومنه $9(a'^2 - b'^2) = 405$ وبالتالي $a'^2 - b'^2 = 45$ أي $(a' - b')(a' + b') = 45$ ونحصل على الجمل التالية:

$\begin{cases} a' + b' = 9 \\ a' - b' = 5 \end{cases} (3) \quad \begin{cases} a' + b' = 15 \\ a' - b' = 3 \end{cases} (2) \quad \begin{cases} a' + b' = 45 \\ a' - b' = 1 \end{cases} (1)$

حل الجملة (1) $(a', b') = (23; 22)$ ومنه $(a, b) = (69; 66)$

حل الجملة (2) $(a', b') = (9; 6)$ غير أوليين ومنه الجملة (2) حلولها مرفوضة

حل الجملة (3) $(a', b') = (7; 2)$ ومنه $(a, b) = (21; 6)$

وأخيرا الثنائيات الطبيعية (a, b) بحيث $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases}$ هي $(a, b) = (69; 66)$

$(a, b) = (21; 6)$

حل التمرين رقم 23:

نبحث عن $PGCD(25872, 482)$

لدينا: $25872 = 484 \times 53 + 220$

$484 = 220 \times 2 + 44$

$220 = 44 \times 5 + 0$

إذن $PGCD(25872, 482) = 44$

$44 = 484 - 2 \times 220$

$$44 = 484 - 2 \cdot (25872 - 484 \times 53)$$

$$44 = 484 \times (1 + 2 \times 53) + 25872 \times (-2)$$

$$(a, b) = (-2, 107) \text{ ومنه } 44 = 25872 \times (-2) + 484 \times (107)$$

حل التمرين رقم 24 :

نحلل هذا العدد إلى جداء عوامله الأولية : $N = 32^5 \times 9^4 = (2^5)^5 \times (3^2)^4 = 2^{25} \times 3^8$ ومنه عدد قواسم N هو $(25+1)(8+1) = 26 \times 9 = 234$.

حل التمرين رقم 25 :

(1) تعيين قواسم 246

$$D_{246} = \{1, 2, 3, 6, 41, 82, 123, 246\} \text{ ومنه } 246 = 2 \times 3 \times 41$$

(2) باقي القسمة الإقليدية لـ 321 على العدد الطبيعي b هو 75 وحاصل القسمة هو q نعبر عنها كما يلي

$$\text{نحصل على مجموعة الثنائيات } (b, q) \text{ التي تحقق } \begin{cases} b \in D_{246} \\ bq = 246 \\ b > 75 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} bq = 246 \\ b > 75 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} 321 = bq + 75 \\ 0 \leq 75 < b \end{cases}$$

$$S = \{(82, 3), (123, 2), (246, 1)\} \text{ التمرين وهي}$$

حل التمرين رقم 26 :

بالنسبة للعدد 257:

لدينا $\sqrt{257} \approx 16,03$ وهو عدد غير طبيعي نقسم 257 على الأعداد الأولية الأصغر من 16,03 وهي : 2, 3, 5, 7, 11, 13 فنجد

المقسوم عليه	حاصل القسمة	باقي القسمة	257
2	128	1	لا يقبل القسمة على 2
3	85	2	لا يقبل القسمة على 3
5	51	2	لا يقبل القسمة على 5
7	36	5	لا يقبل القسمة على 7
11	23	4	لا يقبل القسمة على 11
13	19	10	لا يقبل القسمة على 13

كل البواقي غير معدومة نتوقف من عملية القسمة ونقر بأن العدد 257 أولي.

بالنسبة للعدد 319:

لدينا $\sqrt{319} \approx 17,86$ وهو عدد غير طبيعي نقسم 319 على الأعداد الأولية الأصغر من 17,86 وهي : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 فنجد

المقسوم عليه	حاصل القسمة	باقي القسمة	319
2	159	1	لا يقبل القسمة على 2
3	106	1	لا يقبل القسمة على 3
5	63	4	لا يقبل القسمة على 5
7	45	4	لا يقبل القسمة على 7
11	29	0	يقبل القسمة على 11

أحد البواقي معدوم نتوقف من عملية القسمة ونقرّ بأن العدد 319 غير أولي.

حل التمرين رقم 27:

ليكن d هو قاسم موجب مشترك للعددين $5a + b$ و $9a + 2b$.

d يقسم $5a + b$ و $9a + 2b$ فهو يقسم $9(5a + b)$ و يقسم $5(9a + 2b)$ فهو يقسم الفرق بينهما
 $5(9a + 2b) - 9(5a + b) = b$.

بما أن a و b عددان أوليان فيما بينهما فإن القاسم المشترك الموجب الوحيد هو 1 إذن $d = 1$ وبما أن d لا يأخذ إلا القيمة 1 فإن $5a + b$ و $9a + 2b$ أوليان فيما بينهما.

استعد للبكالوريا تمارين محلولة

التمرين رقم 01 :

- (1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 5 .
- (2) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7 .
- (3) استنتج قيم n التي يكون من أجلها باقي قسمة 2^n على 5 وعلى 7 هو 4 .

التمرين رقم 02 :

- (1) حلل العدد 1998 إلى جداء عوامله الأولية ثم عين مجموعة قواسمه.
- (2) a و b عدنان طبيعيان ، d هو القاسم المشترك الأكبر لهما ، m المضاعف المشترك الأصغر لهما بحيث :

$$\begin{cases} m + d = 1998 \\ 27 < d < 54 \end{cases} \dots (1)$$

- (أ) بين أن d يقسم 1998 ثم عين d .
- (ب) عين الثنائيات الطبيعية غير المعدومة (a, b) التي تحقق الجملة (1)

التمرين رقم 03 :

- (1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 7 .
- (2) استنتج باقي قسمة العدد $3^{1954} + (2019)^{1962} + 3^{1962} + (1830)^{2014}$ على 7 .
- (3) بين أن العدد $3\alpha + 3^{2\alpha} \times \alpha$ يقبل القسمة على 4 من أجل كل عدد طبيعي α .
- (4) عين مجموعة الأعداد الطبيعية α بحيث $3\alpha + 3^{2\alpha} \times \alpha \equiv 0 [28]$

التمرين رقم 04 :

- (1) أوجد مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث $5x \equiv 12 [13]$.
- (2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $5x - 13y = 12$.
- (3) n عدد طبيعي يكتب $3\alpha 0 \alpha 2$ في نظام التعداد الذي أساسه 5 ويكتب $5\beta 6\beta$ في نظام التعداد الذي أساسه 7 .
- أوجد قيمة كل من α و β ثم استنتج قيمة n .

التمرين رقم 05 :

- N عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد الذي أساسه 7 على الشكل : $N = \overline{63\alpha 4}$.
- عين العدد الطبيعي α حتى يكون N قابلا للقسمة على 6 .

التمرين رقم 06 :

- α و β عدنان طبيعيان أوليان فيما بينهما.
- (1) عين α و β بحيث $35\beta = \alpha(\alpha^2 - 19)$ مع $\alpha > \beta$.
- (2) (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q حيث u_0 و q أوليان فيما بينهما مع $u_0 < q$.

أوجد u_0 و q علما أن $35u_0^2 + 19u_1 = u_0q^3$.

(3) نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$. أحسب S_n و P_n بدلالة n .

(4) أوجد قيم العدد الطبيعي n حتى يكون S_n قابلا للقسمة على 30.

التمرين رقم 07 :

n عدد طبيعي غير معدوم ، a و b عدنان طبيعيان بحيث : $a = 3^n(11^{n+2} - 11^n)$ و $b = 11^n(3^{n+1} - 3^n)$. عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b .

التمرين رقم 08

n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 6 .

نضع $a = 3n + 2$ ، $b = n - 5$.

(1) أحسب $a - 3b$.

(2) استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(a; b)$.

(3) عين قيمة n الطبيعية التي من أجلها يكون $\begin{cases} PGCD(a; b) = 17 \\ PPCM(a; b) \leq 150 \\ a > b \end{cases}$

التمرين رقم 09

a و b عدنان طبيعيان حيث $0 < a \leq b$. نضع $m^2 - 5d^2 = 2000$ حيث $PGCD(a; b) = d$ و $m = PPCM(a; b)$.

(1) عين الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2000.

(2) بين أنه إذا كانت الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة $m^2 - 5d^2 = 2000$ فإن d^2 يقسم العدد 2000.

(3) استنتج القيم الممكنة للعددين a و b .

التمرين رقم 10

(1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $9a - 14b = 13$ علما أن $(3; 1)$ حل خاص لها.

(2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $45x - 28y = 130$ (1).

بين أنه إذا كانت الثنائية حلا للمعادلة (1) فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5

واستنتج حلول المعادلة (1).

(3) N عدد طبيعي يكتب $2\alpha\alpha3$ في نظام التعداد ذو الأساس 9 ويكتب $5\beta\beta6$ في نظام التعداد ذو

الأساس 7. عين α و β ثم أكتب N في الأساس 10.

التمرين رقم 11

(1) أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 180 و 225.

(2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $225x - 180y = 90$ (1).

(3) من بين حلول المعادلة (1) عين التي تحقق $|x - y + 1| < 2$.

- (4) a و b عدنان طبيعيان يكتبان على الترتيب 52 و 252 في النظام ذو الأساس α ويكتبان 44 و 206 في النظام ذو الأساس β .
- (5) عين α و β ثم استنتج a و b .

التمرين رقم 12

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10 .
- (2) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $7^{1422} - 9^{2001} \times 63$ على 10 .
- (3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $[10] \times 3^{2n+1} \equiv (n-1) \times 3n \times 9^n + 7^{2n+1}$.
- (4) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $[10] \equiv 3n \times 9^n + 7^{2n+1}$.

التمرين رقم 13 :

- (1) أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2009 على 11 .
- ب) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{10} على 11 .
- ج) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2^{2009} + 2009$ على 11 .
- (2) p عدد طبيعي . نعتبر من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، العدد A_n حيث $A_n = 2^n + p$ ونرمز d_n إلى $PGCD$ لـ A_n و A_{n+1} .
- أ) بيّن أن d_n يقسم 2^n .
- ب) عيّن شفعية A_n بدلالة شفعية p .
- ج) عيّن شفعية d_n بدلالة شفعية p .
- استنتج $PGCD$ للعددين $2^{2009} + 2009$ و $2^{2010} + 2009$.

التمرين رقم 14 :

- (1) أكتب مجموعة الأعداد الصحيحة التي تقسم العدد 6 .
- (2) عيّن الأعداد الصحيحة n حيث $n-4$ يقسم 6 .
- (3) عيّن الأعداد الصحيحة n حيث $n-4$ يقسم $n+2$.
- (4) عيّن الأعداد الصحيحة n حيث $n+1$ يقسم $3n-4$.

التمرين رقم 15:

- (1) تحقق أن 7 يقسم الأعداد : $2^6 - 1$ ؛ $3^6 - 1$ ؛ $4^6 - 1$ و $5^6 - 1$.
- (2) ليكن n عدد طبيعي . نعتبر العدد A_n حيث $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$. بيّن أن $A_{n+6} \equiv A_n [7]$.
- (3) ليكن n عدد طبيعي ، q و r حاصل وباقي قسمة n على 6 .
- أ) بيّن أن A_n و A_r لهما نفس باقي قسمتهما على 7 .

(ب) عيّن قيم r التي من أجلها يكون $A_r \equiv 0[7]$. استنتج قيم n التي من أجلها يكون A_n يقبل القسمة على 7 .

(4) ليكن $B_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$.

(أ) يّين أن $B_n - A_n$ مضاعف للعدد 7 .

(ب) هل العدد B_{2006} يقبل القسمة على 7 ؟

التمرين رقم 16:

(1أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $3n^3 - 11n + 48$ يقبل القسمة على $n + 3$.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد طبيعي غير معدوم .

(2) بين أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة a , b , c فإن المساواة التالية دوما صحيحة

$$PGCD(a, b) = PGCD(bc - a, b)$$

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 فإن المساواة التالية دوما صحيحة

$$PGCD(3n^3 - 11n, n + 3) = PGCD(48, n + 3)$$

(4 أ) عين جميع القواسم الطبيعية للعدد 48 .

(ب) استنتج مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث : $\frac{3n^3 - 11n}{n + 3}$ يكون عددا طبيعيا .

التمرين رقم 17:

(1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_1) ذات المجهول (x, y) : $11x + 8y = 79$

(أ) بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حل للمعادلة (E_1) فإن $y \equiv 3[11]$.

(ب) حل المعادلة (E_1) .

(2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_2) ذات المجهول (y, z) : $3y + 11z = 372$

(أ) بين أنه إذا كانت الثنائية (y, z) حل للمعادلة (E_2) فإن $z \equiv 0[3]$.

(ب) حل المعادلة (E_2) .

(3) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_3) ذات المجهول (x, z) : $3x - 8z = -249$

(4) السعر الكلي ل 41 قطعة حديدية ، موزعة في ثلاث علب هو $480DA$.

سعر كل قطعة من العلبة الأولى هو $48DA$

سعر كل قطعة من العلبة الثانية هو $36DA$

سعر كل قطعة من العلبة الثالثة هو $4DA$

عين عدد القطع في كل علبة .

التمرين رقم 18:

(1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $5x - 3y = 2$

(2) A عدد طبيعي يكتب $\overline{55}$ في النظام ذي الأساس x ويكتب $\overline{37}$ في النظام ذي الأساس y حيث

$x \leq 12$ و $y \leq 20$ عين القيم الممكنة للعددين x و y ثم أكتب A في النظام ذي الأساس 10 .

التمرين رقم 19:

 n عدد طبيعي

$$(1) \text{ بين أن } PGCD(n^2 + 5n + 7, n + 1) = PGCD(n + 1, 3)$$

(2) استنتج قيم n الطبيعية التي من أجلها يكون $n^2 + 5n + 7$ و $n + 1$ أوليين فيما بينهما.

التمرين رقم 20:

$$(1) \text{ بين أنه من أجل كل } (a, b, q) \in \mathbb{Z}^3 : PGCD(a, b) = PGCD(b, a - bq)$$

$$(2) \text{ بين أنه من أجل كل } n \in \mathbb{Z}, PGCD(5n^3 - n, n + 2) = PGCD(n + 2, 38)$$

$$(3) \text{ عين مجموعة قيم } n \text{ الصحيحة بحيث } (n + 2) \text{ يقسم } (5n^3 - n).$$

التمرين رقم 21:

 N عدد طبيعي .

$$(1) \text{ أعط في جدول البواقي الممكنة لـ } N \text{ بترديد 9 ثم لـ } N^2 \text{ بترديد 9}$$

$$(2) \text{ نفرض أنه يوجد عدداً طبيعياً } a \text{ و } b \text{ بحيث : } a^2 - 250507 = b^2. \text{ عين البواقي الممكنة لـ}$$

$$a^2 - 250507 \text{ بترديد 9 واستنتج البواقي الممكنة لـ } a^2 \text{ بترديد 9.}$$

$$(3) \text{ بين أن البواقي الممكنة لـ } a \text{ بترديد 9 هي فقط 1 و 8.}$$

التمرين رقم 22:

$$(1) \text{ عين حسب قيم العدد الطبيعي } n \text{ بواقي قسمة } 5^n \text{ على 13.}$$

$$(2) \text{ استنتج أن العدد } 5 - 1981^{1981} \text{ يقبل القسمة على 13}$$

$$(3) \text{ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ أكبر من أو يساوي 1 فإن العدد } 31^{4n+1} + 18^{4n-1} \text{ يقبل القسمة}$$

على 13

التمرين رقم 23:

$$c \text{ طبيعي عدد أولي. عين } c \text{ حتى يكون } 11c + 1 \text{ مربعاً تاماً.}$$

حلول استعداد للبيكالوريا

حل التمرين رقم 01 :

$$(1) \quad 2^4 \equiv 1[5], \quad 2^3 \equiv 3[5], \quad 2^2 \equiv 4[5], \quad 2^1 \equiv 2[5], \quad 2^0 \equiv 1[5]$$

الموافقة تشكل متتالية دورية ودورها 4 . نقسم الأس n على الدور 4 فنجد $n = 4k + r$ حيث $0 \leq r < 4$ من أجل كل عدد طبيعي k نلخص في الجدول التالي :

وبالتالي باقي قسمة العدد 2^n على 5 هو	فإن $n =$	إذا كان $r =$
1	$n = 4k$	0
2	$n = 4k + 1$	1
4	$n = 4k + 2$	2
3	$n = 4k + 3$	3

$$(2) \quad 2^3 \equiv 1[7], \quad 2^2 \equiv 4[7], \quad 2^1 \equiv 2[7], \quad 2^0 \equiv 1[7]$$

الموافقة تشكل متتالية دورية ودورها 3 . نقسم الأس n على الدور 3 فنجد $n = 3k' + r$ حيث $0 \leq r < 3$ من أجل كل عدد طبيعي k' نلخص في الجدول التالي :

وبالتالي باقي قسمة العدد 2^n على 7 هو	فإن $n =$	إذا كان $r =$
1	$n = 3k'$	0
2	$n = 3k' + 1$	1
4	$n = 3k' + 2$	2

(3) باقي قسمة 2^n على 5 وعلى 7 هو 4 يعني $4k + 2 = 3k' + 2$ أي $4k = 3k'$

لدينا 3 يقسم الجداء $4k$ و 3 أولي مع 4 إذن حسب مبرهنة غوص 3 يقسم k أي $k = 3\alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$ وبالتالي $n = 12\alpha + 2$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$.

حل التمرين رقم 02 :

$$(1) \quad \text{تحليل العدد } 1998 : 1998 = 2 \times 3^3 \times 37$$

مجموعة قواسم العدد 1998:

1 2

نضرب كل عدد من السطر الثاني في السطر الأول ونضرب هذا الناتج في السطر الثالث نحصل على

1 37

كل قواسم العدد 1998 :

$$D_{1998} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 37, 74, 111, 222, 333, 666, 999, 1998\}$$

وبالتالي لدينا $\left\{ \begin{array}{l} a = a'd \\ b = b'd \\ PGCD(a', b') = 1 \end{array} \right.$ و $m \times d = a \times b$ ومنه $m = a'b'd$

وبما أن $27 < d < 54$ فإن $d = 37$

وبالتالي $(\mathbf{a}', \mathbf{b}') = (53, 1)$ أو $(\mathbf{a}', \mathbf{b}') = (1, 53)$ تكافئ $\begin{cases} \mathbf{a}'\mathbf{b}' = 53 \\ PGCD(\mathbf{a}', \mathbf{b}') = 1 \end{cases}$ لدينا $\begin{cases} (\mathbf{a}'\mathbf{b}'+1)\mathbf{d} = 1998 \\ PGCD(\mathbf{a}', \mathbf{b}') = 1 \end{cases}$ ومنه $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (1961, 37)$ أو $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (37, 1961)$.

الموافقة تشكل متتالية دورية ودورها 6 . نقسم الأس n على الدور 6 فنجد $n = 6k + r$ حيث $0 \leq r < 6$ من أجل كل عدد طبيعي k نلخص في الجدول التالي :

وبالتالي باقي قسمة العدد 3^n على 7 هو	فإن $n =$	إذا كان $r =$
1	$n = 6k$	0
3	$n = 6k + 1$	1
2	$n = 6k + 2$	2
6	$n = 6k + 3$	3
4	$n = 6k + 4$	4
5	$n = 6k + 5$	5

(4) تعيين مجموعة الأعداد الطبيعية α بحيث $\alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv 0 [28]$

$$\begin{cases} 28 = 4 \times 7 \\ \text{PGCD}(4, 7) = 1 \end{cases} \quad \alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv 0 [7] \text{ و } \alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv 0 [4] \text{ تكافئ } \alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv 0 [28]$$

- $\alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv 0 [4]$ من أجل كل عدد طبيعي α . بينهاها سابقا.
- $\alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv 0 [7]$ كل عدد طبيعي α يكتب على الشكل $\alpha = 3\lambda$ أو $\alpha = 3\lambda + 1$ أو $\alpha = 3\lambda + 2$ حيث $\lambda \in \mathbb{N}$.

✓ من أجل $\alpha = 3\lambda$ لدينا $\alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv 3\lambda \times 3^{6\lambda} + 9\lambda [7]$ أي $\alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv 5\lambda [7]$ ومنه $5\lambda \equiv 0 [7]$ إذا كان $\lambda = 7\beta$ حيث $\beta \in \mathbb{N}$ إذن $\alpha = 21\beta$.

✓ من أجل $\alpha = 3\lambda + 1$ لدينا $\alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv (3\lambda + 1) \times 3^{6\lambda+2} + 9\lambda + 3 [7]$ أي $\alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv (3\lambda + 1) \times 2 + 9\lambda + 3 [7]$ ومنه $\alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv \lambda + 5 [7]$ أي $\alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv (3\lambda + 1) \times 2 + 9\lambda + 3 [7]$ ومنه $\lambda + 5 \equiv 0 [7]$ إذا كان $\lambda = 2 + 7\beta$ حيث $\beta \in \mathbb{N}$ إذن $\alpha = 7 + 21\beta$.

✓ من أجل $\alpha = 3\lambda + 2$ لدينا $\alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv (3\lambda + 2) \times 3^{6\lambda+4} + 9\lambda + 6 [7]$ أي $\alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv (3\lambda + 1) \times 4 + 9\lambda + 3 [7]$ ومنه $\alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv 21\lambda + 7 [7]$ أي $\alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv (3\lambda + 1) \times 4 + 9\lambda + 3 [7]$.

إذن قيم α التي من أجلها $\alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv 0 [7]$ هي $\alpha = 21\beta$ ، $\alpha = 7 + 21\beta$ ، $\alpha = 3\beta + 2$ حيث $\beta \in \mathbb{N}$. أي $\alpha \equiv 0 [21]$; $\alpha \equiv 7 [21]$; $\alpha \equiv 2 [3]$.

حل التمرين رقم 04 :

(1) $5x \equiv 12 [13]$ تكافئ $15x \equiv 36 [13]$ أي $2x \equiv 10 [13]$ وأخيرا $x \equiv 5 [13]$ وبالتالي $x = 5 + 13k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

(2) نحل المعادلة $5x - 13y = 12$

$5x - 13y = 12$ تكافئ $5x \equiv 12 [13]$ ومنه حلول المعادلة $5x - 13y = 12$ هي $\{(5 + 13k ; 1 + 5k) ; k \in \mathbb{Z}\}$.

(3) لدينا $\begin{cases} n = 3 \times 5^4 + \alpha \times 5^3 + 5\alpha + 2 \\ 0 \leq \alpha < 5 \end{cases}$ و $\begin{cases} n = 5 \times 7^3 + \beta \times 7^2 + 6 \times 7 + \beta \\ 0 \leq \beta < 7 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} 3 \times 5^4 + \alpha \times 5^3 + 5\alpha + 2 = 5 \times 7^3 + \beta \times 7^2 + 6 \times 7 + \beta \\ 0 \leq \alpha < 5 \text{ و } 0 \leq \beta < 7 \end{cases}$ معناه $\overline{3\alpha 0 \alpha 2}^5 = \overline{5\beta 6 \beta}^7$

تستنتج من السؤال السابق $\alpha = 1$ و $\begin{cases} 5\beta - 13\alpha = 12 \\ 0 \leq \alpha < 5 \text{ و } 0 \leq \beta < 7 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 50\beta - 130\alpha = 120 \\ 0 \leq \alpha < 5 \text{ و } 0 \leq \beta < 7 \end{cases}$

$\beta = 5$ وتكون عندئذ $n = 2007$

حل التمرين رقم 05 :

$N = \overline{63\alpha 4}^7$ الشرط $0 \leq \alpha < 7$.

$N = \overline{63\alpha 4}^7 = 6 \times 7^3 + 3 \times 7^2 + \alpha \times 7^1 + 4$.

$N \equiv 0 [6]$ تكافئ $3 + \alpha + 4 \equiv 0 [6]$ ومنه $\alpha + 1 \equiv 0 [6]$ أي $\alpha \equiv 5 [6]$ ومنه $\alpha = 5$ لأن $0 \leq \alpha < 7$

حل التمرين رقم 06 :

(1) تعيين α و β بحيث $35\beta = \alpha(\alpha^2 - 19)$ مع $\alpha > \beta$.

α يقسم الجداء 35β و α أولي مع β ، فحسب مبرهنة غوص α يقسم 35 ، ومنه $\alpha \in \{1; 5; 7; 35\}$.

• في حالة $\alpha = 1$ نحصل على $35\beta = -18$ أي $\beta = -\frac{18}{35} \notin \mathbb{N}$ وهذه الحالة مرفوضة.

• في حالة $\alpha = 5$ نحصل على $35\beta = 5 \times 6$ أي $\beta = \frac{6}{7} \notin \mathbb{N}$ وهذه الحالة مرفوضة.

• في حالة $\alpha = 7$ نحصل على $35\beta = 7 \times 30$ أي $\beta = 6$ وهذه الحالة مقبولة.

في حالة $\alpha = 35$ نحصل على $35\beta = 35 \times 1206$ أي $\beta = 1206$ وهذه الحالة مرفوضة لأن $\alpha > \beta$. وأخيرا

$\alpha = 7$ و $\beta = 6$

(2) لدينا $u_1 = u_0 q$ وبالتالي تصبح المعادلة $35u_0^2 + 19u_1 = u_0 q^3$ كالتالي $35u_0^2 + 19u_0 q = u_0 q^3$ ومنه $35u_0 = q(q^2 - 19)$ حيث $u_0 \neq 0$.

حسب السؤال رقم 1) نعتبر $q = \alpha$ و $u_0 = \beta$ وبالتالي $q = 7$ و $u_0 = 6$

(3) $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = 6 \times \frac{7^{n+1} - 1}{7 - 1} = 7^{n+1} - 1$

$P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = u_0 \times (u_0 \times q) \times \dots \times (u_0 \times q^n) = u_0^{n+1} \times q^{1+2+3+\dots+n}$

المجموع $1+2+3+\dots+n$ هو مجموع حدود متتالية حسابية حدها الأول 1 وأساسها 1 وبالتالي

$P_n = 6^{n+1} \times 7^{\frac{n(n+1)}{2}}$ أي $P_n = u_0^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}}$

(4) تعيين قيم n بحيث $S_n \equiv 0[30]$ أي بحيث $7^{n+1} - 1 \equiv 0[30]$.

$7^{n+1} - 1 \equiv 0[30]$ تعني $7^{n+1} - 1 \equiv 0[6]$ و $7^{n+1} - 1 \equiv 0[5]$ لأن 5 و 6 أوليان فيما بينهما.

✓ بما أن $7 \equiv 1[6]$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n $7^{n+1} - 1 \equiv 0[6]$.

✓ ندرس بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 5

$7^0 \equiv 1[5]$, $7^1 \equiv 2[5]$, $7^2 \equiv 4[5]$, $7^3 \equiv 3[5]$, $7^4 \equiv 1[5]$

الموافقة تشكل متتالية دورية ودورها 4 . نقسم الأس n على الدور 4 فنجد $n = 4k + r$ حيث $0 \leq r < 4$ من أجل كل عدد طبيعي k نلخص في الجدول التالي :

إذا كان $r =$	فإن $n =$	وبالتالي باقي قسمة العدد 7^n على 5 هو.
0	$n = 4k$	1
1	$n = 4k + 1$	2
2	$n = 4k + 2$	4
3	$n = 4k + 3$	3

$7^{n+1} - 1 \equiv 0[5]$ معناه $7^{n+1} \equiv 1[5]$ وبالتالي $n+1 = 4k$ ومنه $n+1 \equiv 0[4]$ أي $n \equiv 3[4]$ وأخيرا $S_n \equiv 0[30]$ من أجل $n = 3 + 4p$ حيث p عدد طبيعي.

حل التمرين رقم 07 :

$$a = 3^n (11^{n+2} - 11^n) = 3^n \times 11^n (11^2 - 1) = (3 \times 11)^n \times 120 = 33^n \times 120$$

$$b = 11^n (3^{n+1} - 3^n) = 3^n \times 11^n (3 - 1) = (3 \times 11)^n \times 2 = 33^n \times 2$$

$$PPCM(a; b) = PPCM(33^n \times 120; 33^n \times 2) = 33^n \times PPCM(120; 2) = 33^n \times 120$$

$$\text{إذن } PPCM(a; b) = 33^n \times 120.$$

حل التمرين رقم 08

$$(1) \quad a - 3b = 3n + 2 - 3(n - 5) = 17$$

$$(2) \quad \text{ليكن } PGCD(a; b) = d$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d | a \\ d | 3b \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} d | a \\ d | b \end{array} \right. \text{ وبالتالي } d | (a - 3b) \text{ أي } d | 17 \text{ وأخيرا } d \in \{1; 17\}$$

$$(3) \quad PGCD(a; b) = 17 \text{ يوجد عدداً طبيعيين } a' \text{ و } b' \text{ أوليان فيما بينهما بحيث } \left\{ \begin{array}{l} a = 17a' \\ b = 17b' \end{array} \right.$$

$$\text{و } PPMC(a; b) = 17a'b'$$

$$\text{بما أن } PPMC(a; b) \leq 150 \text{ فإن } 17a'b' \leq 150 \text{ أي } a'b' \leq 8,82 \text{ أي } a'b' \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

$$\text{مع } a' > b' \text{ وبالتالي } (a', b') \in \{(2, 1); (3, 1); (4, 1); (5, 1); (6, 1); (7, 1); (8, 1); (3, 2)\}$$

$$\text{ومنه } (a, b) \in \{(34, 17); (51, 14); (68, 17); (85, 17); (102, 17); (119, 17); (136, 17); (51, 34)\}$$

$$\text{لكن مما سبق بيّنّا أن } a - 3b = 17 \text{ أي } a = 3b + 17 \text{ وبالتالي الثنائية الوحيدة التي تحقق ذلك}$$

$$\text{هي } (a; b) = (68; 17).$$

$$\text{بما أن } b = n - 5 \text{ فإن } n = b + 5 = 17 + 5 = 22.$$

$$\text{إذن قيمة } n \text{ الطبيعية التي من أجلها يكون } \left\{ \begin{array}{l} PGCD(a; b) = 17 \\ PPMC(a; b) \leq 150 \\ a < b \end{array} \right. \text{ هي } n = 22.$$

حل التمرين رقم 09

$$(1) \quad 2000 = 2^4 \times 5^3 \text{ ومنه القواسم المربعة التامة للعدد 2000 هي } \alpha^2 \in \{1; 2^4; 2^2; 5^2; 2^2 \times 5^2; 2^4 \times 5^2\}$$

$$\text{أي } \alpha \in \{1; 2; 4; 5; 10; 20\} \text{ إذن } \alpha^2 \in \{1; 4^2; 2^2; 5^2; 10^2; 20^2\}$$

$$(2) \quad PGCD(a; b) = d \text{ يوجد عدداً طبيعيين } a' \text{ و } b' \text{ أوليان فيما بينهما بحيث } \left\{ \begin{array}{l} a = a' \times d \\ b = b' \times d \end{array} \right.$$

$$\text{و } m = a'b'd \text{ وبالتالي}$$

$m^2 - 5d^2 = 2000$ تكافئ $(a'b'd)^2 - 5d^2 = 2000$ أي $((a'b')^2 - 5)d^2 = 2000$ ومنه d^2 يقسم العدد 2000.

(3) من أجل $d^2 = 1$ فإن $((a'b')^2 - 5) = 2000$ أي $(a'b')^2 = 2005$ ومنه $a'b' = \sqrt{2005}$ حالة مرفوضة.

من أجل $d^2 = 4^2$ فإن $((a'b')^2 - 5) = 125$ أي $(a'b')^2 = 130$ ومنه $a'b' = \sqrt{130}$ حالة مرفوضة.

من أجل $d^2 = 2^2$ فإن $((a'b')^2 - 5) = 500$ أي $(a'b')^2 = 505$ ومنه $a'b' = \sqrt{505}$ حالة مرفوضة.

من أجل $d^2 = 5^2$ فإن $((a'b')^2 - 5) = 80$ أي $(a'b')^2 = 85$ ومنه $a'b' = \sqrt{85}$ حالة مرفوضة.

من أجل $d^2 = 20^2$ فإن $((a'b')^2 - 5) = 5$ أي $(a'b')^2 = 10$ ومنه $a'b' = \sqrt{10}$ حالة مرفوضة.

من أجل $d^2 = 10^2$ فإن $((a'b')^2 - 5) = 20$ أي $(a'b')^2 = 25$ ومنه $a'b' = 5$ حالة مقبولة.

إذن $(a'; b') = (1; 5)$ لأن $0 < a \leq b$ وبالتالي $(a; b) = (10; 50)$

حل التمرين رقم 10

(1) لدينا $\begin{cases} 9a - 14b = 13 \\ 9(3) - 14(1) = 13 \end{cases}$ ومنه $9(a-3) = 14(b-1)$

14 يقسم الجداء $9(a-3)$ و 14 أولي مع 9 فحسب مبرهنة غوص 14 يقسم $a-3$ ومنه $a = 3 + 14k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ثم نجد $b = 1 + 9k$.

إذن حلول المعادلة $9a - 14b = 13$ هي $(a; b) = (3 + 14k; 1 + 9k)$, $k \in \mathbb{Z}$

(2) لدينا $45x - 28y = 130$ تكافئ $\begin{cases} 45x = 28y + 130 \\ 28y = 45x - 130 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 45x = 2(14y + 65) \\ 28y = 5(9x - 26) \end{cases}$

2 يقسم $45x$ و 2 أولي مع 45 فحسب مبرهنة غوص 2 يقسم x أي x مضاعف للعدد 2.

5 يقسم $28y$ و 5 أولي مع 28 فحسب مبرهنة غوص 5 يقسم y أي y مضاعف للعدد 5.

إذن $x = 2\lambda$ و $y = 5\lambda'$ حيث λ و λ' عدنان صحيحان.

$45x - 28y = 130$ تكافئ $45(2\lambda) - 28(5\lambda') = 130$ أي $9\lambda - 14\lambda' = 13$ فحسب السؤال الأول نجد

$$\begin{cases} x = 6 + 28k \\ y = 5 + 45k \end{cases} \text{ وبالتالي } \begin{cases} \lambda = 3 + 14k \\ \lambda' = 1 + 9k \end{cases}$$

وأخيرا حلول المعادلة $45x - 28y = 130$ هي $(x; y) = (6 + 28k; 5 + 45k)$, $k \in \mathbb{Z}$

(3) $N = \overline{2\alpha\alpha 3}^9 = \overline{5\beta\beta 6}^7$ حيث $0 \leq \alpha \leq 8$ و $0 \leq \beta \leq 6$

إذن : $2 \times 9^3 + \alpha \times 9^2 + 9\alpha + 3 = 5 \times 7^3 + \beta \times 7^2 + 7\beta + 6$ بعد التبسيط نجد $45\alpha - 28\beta = 130$

فحسب ما سبق نجد $\begin{cases} \alpha = 6 + 28k \\ \beta = 5 + 45k \end{cases}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ بما أن $0 \leq \alpha \leq 8$ و $0 \leq \beta \leq 6$ فنجد $\begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = 5 \end{cases}$

$$N = 2 \times 9^3 + 6 \times 9^2 + 9 \times 6 + 3 = 2001 \text{ ومنه}$$

حل التمرين رقم 11

$$(1) \text{ لدينا } 225 = 3^2 \times 5^2 \text{ و } 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \text{ ومنه } \text{PGCD}(225; 180) = 45.$$

$$(2) \quad 225x - 180y = 90 \text{ تكافئ } 5x - 4y = 2. \text{ نلاحظ بسهولة أن الثنائية } (2; 2) \text{ حلا خاصا لها}$$

$$\text{وبالتالي } 5x - 4y = 2 \text{ تكافئ } 5(x - 2) = 4(y - 2) \text{ وباستعمال مبرهنة غوص نجد}$$

$$x = 2 + 4k \text{ و } y = 2 + 5k \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}.$$

$$(3) \quad |x - y + 1| < 2 \text{ تكافئ } -2 < x - y + 1 < 2 \text{ تكافئ } -2 < (2 + 4k) - (2 + 5k) + 1 < 2 \text{ أي}$$

$$-2 < -k + 1 < 2 \text{ ومنه } -3 < -k < 1 \text{ أي } -1 < k < 3 \text{ وبالتالي } k = 0 \text{ أو } k = 1 \text{ أو } k = 2.$$

$$\bullet \text{ من أجل } k = 0 \text{ نجد } x = 2 \text{ و } y = 2.$$

$$\bullet \text{ من أجل } k = 1 \text{ نجد } x = 6 \text{ و } y = 7.$$

$$\bullet \text{ من أجل } k = 2 \text{ نجد } x = 10 \text{ و } y = 12.$$

$$\text{وأخيرا الثنائيات الطبيعية } (x; y) \text{ التي تحقق } |x - y + 1| < 2 \text{ هي } \{(2; 2), (6; 7), (10; 12)\}.$$

$$(4) \text{ لدينا } a = 52^\alpha = 44^\beta \text{ و } b = 252^\alpha = 206^\beta \text{ حيث } \alpha > 5 \text{ و } \beta > 6 \text{ وبالتالي:}$$

$$\begin{cases} 5\alpha + 2 = 4\beta + 4 \\ 2\alpha^2 + 5\alpha + 2 = 2\beta^2 + 6 \\ \alpha > 5 ; \beta > 6 \end{cases}$$

$$\text{المعادلة } 5\alpha + 2 = 4\beta + 4 \text{ تكافئ } 5\alpha - 4\beta = 2 \text{ وحسب ما سبق يكون } \alpha = 2 + 4k \text{ و } \beta = 2 + 5k$$

$$\text{حيث } k \in \mathbb{Z}. \text{ نعوض في المعادلة } 2\alpha^2 + 5\alpha + 2 = 2\beta^2 + 6 \text{ فنجد}$$

$$-18k^2 + 12k + 6 = 0 \text{ فنجد بعد التبسيط } 2(2 + 4k)^2 + 5(2 + 4k) + 2 = 2(2 + 5k)^2 + 6$$

$$\text{وبعد حل هذه المعادلة نجد } k = 1 \text{ لأن } k = -\frac{1}{3} \text{ مرفوض.}$$

$$\text{وأخيرا من أجل } k = 1 \text{ يكون } \alpha = 4 + 2 = 6 \text{ و } \beta = 5 + 2 = 7$$

$$\text{وبالتالي } a = 5\alpha + 2 = 5 \times 6 + 2 = 32$$

$$\text{و } b = 2\alpha^2 + 5\alpha + 2 = 5 \times 36 + 5 \times 6 + 2 = 104$$

حل التمرين رقم 12

$$(1) \quad 3^4 \equiv 1[10], 3^3 \equiv 7[10], 3^2 \equiv 9[10], 3^1 \equiv 3[10], 3^0 \equiv 1[10]$$

$$\text{الموافقة تشكل متتالية دورية ودورها 4. نقسم الأس } n \text{ على الدور 4 فنجد } n = 4k + r \text{ حيث } 0 \leq r < 4$$

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } k \text{ نلخص في الجدول التالي:}$$

إذا كان $r =$	فإن $n =$	وبالتالي باقي قسمة العدد 3^n على 7 هو
0	$n = 4k$	1
1	$n = 4k + 1$	3
2	$n = 4k + 2$	9
3	$n = 4k + 3$	7

(2) باقي القسمة الإقليدية للعدد $63 \times 9^{2001} - 7 \times 7^{1422}$ على 10 .

لدينا $63 \equiv 3[10]$ و $9 \equiv -1[10]$ فإن $9^{2001} \equiv -1[10]$ ومنه $63 \times 9^{2001} \equiv -3[10]$.
لدينا $7 \equiv -3[10]$ و $7^{1422} \equiv (-3)^{1422}[10]$ فإن $7^{1422} \equiv 3^{1422}[10]$. وبما أن $1422 = 4 \times 355 + 2$ فإن $3^{1422} \equiv 9[10]$ أي $7^{1422} \equiv 9[10]$ وبالتالي $63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv -12[10]$.
وأخيرا $63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv 8[10]$.

(3) نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1) \times 3^{2n+1}[10]$

$$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv n \times 3^{2n+1} + (-3)^{2n+1}[10] \text{ تكافئ } 3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 3n \times 3^{2n} + (-3)^{2n+1}[10]$$

$$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1)3^{2n+1}[10] \text{ أي } 3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv n \times 3^{2n+1} - 3^{2n+1}[10]$$

(4) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$.

$$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10] \text{ تكافئ } (n-1)3^{2n+1} \equiv 0[10] \text{ أي } n-1 \equiv 0[10] .$$

وأخيرا $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$ من أجل $n \equiv 1[10]$ أي $n = 10\lambda + 1$ حيث λ عدد طبيعي.

حل التمرين رقم 13 :

(1)

(أ) $2009 = 11 \times 182 + 7$ ومنه باقي القسمة الإقليدية للعدد 2009 على 11 هو 7 ونكتب $2009 \equiv 7[11]$

(ب) $2^{10} \equiv 2^{5 \times 2}[11]$ تكافئ $2^{10} \equiv (2^5)^2[11]$ أي $2^{10} \equiv (32)^2[11]$ ونكتب كذلك $2^{10} \equiv (-1)^2[11]$ أي

$$2^{10} \equiv 1[11]$$

(ج) $2^{2009} \equiv (2^{10})^{200} \times (2^9)[11]$ ومنه $2^{2009} \equiv (1)(-5)[4]$ وبالتالي $2^{2009} + 2009 \equiv -5 + 7[11]$

$$2^{2009} + 2009 \equiv 2[11] \text{ إذن}$$

(2) (أ) d_n يقسم A_n و A_{n+1} فهو يقسم الفرق

$$A_{n+1} - A_n = 2^{n+1} + p - 2^n - p = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$$

إذن d_n يقسم 2^n .

(ب) لدينا $n > 0$ ، 2^n زوجي ومنه $A_n = 2^n + p$ له نفس الشفعية مثل p .

(ج) A_n و A_{n+1} لهما نفس الشفعية (مثل p):

- إذا كان p فرديا فإن A_n و A_{n+1} كذلك ومنه كذلك $PGCD$ فردي.
 - إذا كان p زوجيا فإن A_n و A_{n+1} كذلك ومنه كذلك $PGCD$ زوجي .
- حسب ماسبق $PGCD$ للعددين $2^{2009} + 2009$ و $2^{2010} + 2009$ هو فردي لأن 2009 فردي. هذا من جهة ومن جهة أخرى $PGCD$ يقسم 2^{2009} . مجموعة القواسم الموجبة للعدد 2^{2009} هي $D_{2^{2009}} = \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2009}\}$.

$PGCD$ للعددين $2^{2009} + 2009$ و $2^{2010} + 2009$ هو القاسم الوحيد الفردي لـ 2^{2009} هو إذن 1.

حل التمرين رقم 14 :

- (1) $S_1 = \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$
- (2) إذا كان $(n-4) \in S_1$ فإن $n \in \{-2; 1; 2; 3; 5; 6; 7; 10\}$
- (3) $n+2 = (n-4)+6$ ومنه $n-4$ يقسم $n+2$ إذا وفقط إذا كان $n-4$ يقسم 6 . أي $n \in \{-2; 1; 2; 3; 5; 6; 7; 10\}$
- (4) $3n-4 = 3(n+1)-7$ ومنه $n+1$ يقسم $3n-4$ إذا وفقط إذا كان $n+1$ يقسم 7 أي $(n+1) \in \{-7; -1; 7\}$ ومنه $n \in \{-8; -2; 0; 6\}$.

حل التمرين رقم 15 :

(1)

- $2^6 - 1 = 63 = 7 \times 9$ ومنه $2^6 - 1$ يقبل القسمة على 7 .
- $3^6 - 1 = 728 = 7 \times 104$ ومنه $3^6 - 1$ يقبل القسمة على 7 .
- $4^6 - 1 = 4095 = 7 \times 585$ ومنه $4^6 - 1$ يقبل القسمة على 7 .
- $5^6 - 1 = 15624 = 7 \times 2232$ ومنه $5^6 - 1$ يقبل القسمة على 7 .

$$A_{n+6} - A_n = (2^{n+6} + 3^{n+6} + 4^{n+6} + 5^{n+6}) - (2^n + 3^n + 4^n + 5^n) \quad (2)$$

$$A_{n+6} - A_n = 2^{n+6} + 3^{n+6} + 4^{n+6} + 5^{n+6} - 2^n - 3^n - 4^n - 5^n$$

$$A_{n+6} - A_n = 2^{n+6} - 2^n + 3^{n+6} - 3^n + 4^{n+6} - 4^n + 5^{n+6} - 5^n$$

$$A_{n+6} - A_n = 2^n(2^6 - 1) + 3^n(3^6 - 1) + 4^n(4^6 - 1) + 5^n(5^6 - 1)$$

بما أن $2^6 - 1 \equiv 0[7]$; $3^6 - 1 \equiv 0[7]$; $4^6 - 1 \equiv 0[7]$; $5^6 - 1 \equiv 0[7]$ فإن $A_{n+6} - A_n \equiv 0[7]$ أي

$$A_{n+6} \equiv A_n[7]$$

(3) أ لدينا $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n = 2^{6q+r} + 3^{6q+r} + 4^{6q+r} + 5^{6q+r}$ أو بعبارة أخرى

$$A_n = 2^{6q} \times 2^r + 3^{6q} \times 3^r + 4^{6q} \times 4^r + 5^{6q} \times 5^r$$

$2^6 \equiv 1[7]$; $3^6 \equiv 1[7]$; $4^6 \equiv 1[7]$; $5^6 \equiv 1[7]$ ومنه
 $2^{6q} \equiv 1[7]$; $3^{6q} \equiv 1[7]$; $4^{6q} \equiv 1[7]$; $5^{6q} \equiv 1[7]$ إذن
 $A_n \equiv 2^r + 3^r + 4^r + 5^r [7]$ أي $A_n \equiv A_r [7]$ ومنه A_r و A_n لهما نفس باقي القسمة على 7 .
 ب) تعين قيم r التي من أجلها يكون $A_r \equiv 0[7]$.

- إذا كان $r = 0$ فإن $A_0 = 2^0 + 3^0 + 4^0 + 5^0 = 4$ ومنه $A_0 \equiv 4[7]$.
 - إذا كان $r = 1$ فإن $A_1 = 2^1 + 3^1 + 4^1 + 5^1 = 14 = 2 \times 7$ ومنه $A_1 \equiv 0[7]$.
 - إذا كان $r = 2$ فإن $A_2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 54 = 7 \times 7 + 5$ ومنه $A_2 \equiv 5[7]$.
 - إذا كان $r = 3$ فإن $A_3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 224 = 7 \times 32$ ومنه $A_3 \equiv 0[7]$.
 - إذا كان $r = 4$ فإن $A_4 = 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 = 978 = 7 \times 139 + 5$ ومنه $A_4 \equiv 5[7]$.
 - إذا كان $r = 5$ فإن $A_5 = 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 = 4424 = 7 \times 632$ ومنه $A_5 \equiv 0[7]$.
- إذن $A_r \equiv 0[7]$ تكافئ $r = 1$ أو $r = 3$ أو $r = 5$

لدينا $A_n \equiv A_r [7]$ ومنه A_n يقبل القسمة على 7 يكافئ $A_n \equiv 0[7]$ إذن $n \in \{6q + 1 ; 6q + 3 ; 6q + 5\}$
 $B_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$

أ) لدينا $100 \equiv 2[7]$; $101 \equiv 3[7]$; $102 \equiv 4[7]$; $103 \equiv 5[7]$ ومنه
 $100^n \equiv 2^n[7]$; $101^n \equiv 3^n[7]$; $102^n \equiv 4^n[7]$; $103^n \equiv 5^n[7]$ ونستنتج أن
 $B_n \equiv 2^n + 3^n + 4^n + 5^n [7]$ أي $B_n \equiv A_n [7]$ ومنه $B_n - A_n$ مضاعف للعدد 7 .
 ب) لدينا $B_n - A_n$ مضاعف للعدد 7 معناه $B_n - A_n = 7k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. B_n يقبل القسمة على 7
 معناه $B_n = 7k'$ حيث $k' \in \mathbb{N}$ تكافئ $A_n = 7(k' - k)$ أي A_n يقبل القسمة على 7 ومنه B_n يقبل
 القسمة على 7 وهذا يكافئ باقي قسمة العدد الطبيعي n على 6 هو عدد فردي ، ولكن
 $2006 = 6 \times 334 + 2$ ومنه الباقي عدد زوجي وبالتالي B_{2006} لا يقبل القسمة على 7 .

حل التمرين رقم 16:

1) أ) نأخذ القسمة الإقليدية للعدد $3n^3 - 11n + 48$ على $n + 3$ فنجد
 $3n^3 - 11n + 48 = (n + 3)(3n^2 - 9n + 16)$ ومنه العدد $3n^3 - 11n + 48$ يقبل القسمة على $n + 3$.
 ب) من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد صحيح .
 تبيان أن $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد طبيعي غير معدوم ، ندرس إشارة كثير الحدود $3x^2 - 9x + 16$. المميز
 $\Delta = 81 - 4(16)(3) = -111$ ، $\Delta < 0$ ومنه كثير الحدود $3x^2 - 9x + 16$ ليس له جذور في $\mathbb{R}$ وله نفس
 إشارة معامل x^2 أي

موجب تماما ونستنتج أن العدد $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد طبيعي غير معدوم .
 2) نبين $PGCD(a, b) = PGCD(bc - a, b)$ ، a ، b ، c أعداد طبيعية غير معدومة .

- إذا كان d هو قاسم مشترك للعددين a و b فإن d يقسم bc ويقسم $bc - a$ وبالتالي d هو قاسم مشترك للعددين $bc - a$ و b .
 - ليكن d هو قاسم مشترك للعددين $bc - a$ و b .
 d يقسم b فإن d يقسم bc وبما أن d يقسم $bc - a$ نستنتج أن d يقسم a $bc - (bc - a) = a$ ومنه d هو قاسم مشترك للعددين a و b .
- بينا إذن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b تساوي مجموعة القواسم المشتركة للعددين $bc - a$ و b ومنه $PGCD(a, b) = PGCD(bc - a, b)$.
- (3) نبين $PGCD(3n^3 - 11n, n + 3) = PGCD(48, n + 3)$.
 نضع $a = 3n^3 - 11n$ و $b = n + 3$ و $c = 3n^2 - 9n + 16$ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ فإن a, b, c أعداد طبيعية غير معدومة. نستعمل السؤال السابق
 لدينا $bc - a = (n + 3)(3n^2 - 9n + 16) - (3n^3 - 11n) = 48$
 إذن $PGCD(3n^3 - 11n, n + 3) = PGCD(48, n + 3)$ حيث $n \geq 2$.
- (4 أ) القواسم الطبيعية للعدد 48 هي $D_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$
 (ب) ليكن $n \geq 2$. حتى يكون $\frac{3n^3 - 11n}{n + 3}$ عددا طبيعيا يجب أن يكون $3n^3 - 11n$ يقبل القسمة على $n + 3$
 أي $3n^3 - 11n$ مضاعف $n + 3$ أو $PGCD(3n^3 - 11n, n + 3) = n + 3$
 وجدنا سابقا $PGCD(3n^3 - 11n, n + 3) = PGCD(48, n + 3)$ ومنه $PGCD(48, n + 3) = 48$ أي
 $n + 3$ من قواسم 48 و $n + 3 \geq 5$
 $(n + 3) \in \{5, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ وبالتالي $n \in \{2, 3, 5, 9, 13, 21, 45\}$
 ندرس الحالتين الخاصتين $n = 1$, $n = 0$
 من أجل $n = 0$ فإن $\frac{3n^3 - 11n}{n + 3} \in \mathbb{N}$
 من أجل $n = 1$ فإن $\frac{3n^3 - 11n}{n + 3} \notin \mathbb{N}$
 وأخيرا مجموعة قيم n الطبيعية حتى يكون $\frac{3n^3 - 11n}{n + 3}$ عددا طبيعيا هي $n \in \{0, 2, 3, 5, 9, 13, 21, 45\}$.

حل التمرين رقم 17:

- (1 أ) لدينا $11x + 8y = 79$ ومنه $8y - 79 = -11x$ إذن 11 يقسم $8y - 79$ أي $8y - 79 \equiv 0[11]$
 $8y \equiv 79[11]$ تكافئ $8y \equiv 2[11]$ أي $8y \equiv 14[11]$ أي $y \equiv 3[11]$.
- (ب) $y \equiv 3[11]$ تكافئ $y = 3 + 11k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ وبعد التعويض بـ $y = 3 + 11k$ في المعادلة $11x + 8y = 79$ نجد $x = 5 - 8k$. وأخيرا مجموعة حلول المعادلة $11x + 8y = 79$ هي
 $S = \{(5 - 8k, 3 + 11k), k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) أ) $3y + 11z = 372$ تكافئ $3y + 11z = 3(124 - y)$ تكافئ $11z = 372 - 3y$ تكافئ 3 تقسم $11z$. بما أن 3 أولي مع 11 فإن 3 يقسم z أي $z \equiv 0[3]$.

ب) $z \equiv 0[3]$ تكافئ $z = 3k'$ حيث $k' \in \mathbb{Z}$ نعوض في المعادلة $3y + 11z = 372$ فنجد
 $y = 124 - 11k'$

وأخيرا مجموعة حلول المعادلة $3y + 11z = 372$ هي $S' = \{(124 - 11k', 3k'), k' \in \mathbb{Z}\}$

(3) $3x - 8z = -249$ تكافئ $3x + 249 = 8z$ تكافئ $3(x + 83) = 8z$ تكافئ 3 يقسم $8z$ وبما أن 3 و 8 أوليان فيما بينهما فإن 3 يقسم z أي $z = 3k''$ حيث $k'' \in \mathbb{Z}$ نعوض في المعادلة

$$3x + 249 = 8z \text{ فنجد } x = -83 + 8k''$$

وأخيرا مجموعة حلول المعادلة $3x + 249 = 8z$ هي $S'' = \{(-83 + 8k'', 3k''), k'' \in \mathbb{Z}\}$

ليكن x عدد قطع العلبة الأولى و y عدد قطع العلبة الثانية و z عدد قطع العلبة الثالثة .

إذن (1) $x + y + z = 41$ و $48x + 36y + 4z = 480$ أي (2) $12x + 9y + z = 120$

لدينا إذن $\begin{cases} x + y + z = 41 \text{ (1)} \\ 12x + 9y + z = 120 \text{ (2)} \end{cases}$ نستخرج من (1) : $z = 41 - x - y$ ونعوضها في (2) فنجد

$$12x + 9y + 41 - x - y = 120 \text{ أي } 11x + 8y = 79 \text{ وهي المعادلة } (E_1) \text{ أي فيكون } x = 5 - 8k \text{ و } y = 3 + 11k$$

بما أن x يمثل عدد من القطع فهو موجب إذن هذا يؤدي إلى $k = 0$ فنحصل على $x = 5$ و $y = 3$ و $z = 41 - 5 - 3 = 33$

حل التمرين رقم 18:

$$(1) \quad 5x - 3y = 2 \text{ تكافئ } 5x - 2 = 3y \text{ تكافئ } 5x - 2 \equiv 0[3] \text{ تكافئ } 5x \equiv 2[3] \text{ تكافئ } 2 \times 5x \equiv 2 \times 2[3] \text{ أي } 10x \equiv 4[3]$$

ومنه $x \equiv 1[3]$ تكافئ $x = 1 + 3k$ حيث k عدد صحيح. نعوض مباشرة في المعادلة $5x - 3y = 2$ فنجد
 $y = 1 + 5k$

وأخيرا $S = \{(1 + 3k ; 1 + 5k) / k \in \mathbb{Z}\}$

(2) $A = 5 + 5x = 7 + 3y$ أي $5x - 3y = 2$ وحسب السؤال السابق وجدنا $x = 1 + 3k$ و $y = 1 + 5k$

$$\text{لدينا } \begin{cases} 5 < x \leq 12 \\ 7 < y \leq 20 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} 5 < 1 + 3k \leq 12 \\ 7 < 1 + 5k \leq 20 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} 4 < 3k \leq 11 \\ 6 < 5k \leq 19 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} \frac{4}{3} < k \leq \frac{11}{3} \\ \frac{6}{5} < k \leq \frac{19}{5} \end{cases} \text{ ومنه } k = 2 \text{ أو } k = 3$$

من أجل $k = 2$ نجد $x = 1 + 3(2) = 7$ و $y = 1 + 5(2) = 11$ ومنه $A = 5 + 5(7) = 40$

من أجل $k = 3$ نجد $x = 1 + 3(3) = 10$ و $y = 1 + 5(3) = 16$ ومنه $A = 5 + 5(10) = 55$

حل التمرين رقم 19 :

(1) يكفي أن نبين أنه يوجد عدنان صحيحان a و b بحيث $n^2 + 5n + 7 = (n+1)(an+b) + 3$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} a=1 \\ a+b=5 \\ b+3=7 \end{cases} \text{ بالمطابقة نجد } n^2 + 5n + 7 = (n+1)(an+b) + 3 = an^2 + (a+b)n + (b+3)$$

إذن $n^2 + 5n + 7 = (n+1)(n+4) + 3$ من أجل كل عدد طبيعي n . ومنه

$$PGCD(n^2 + 5n + 7, n+1) = PGCD(n+1, 3)$$

(2) يكون $n^2 + 5n + 7$ و $n+1$ أوليين فيما بينهما تكافئ $PGCD(n^2 + 5n + 7, n+1) = 1$ وحسب ما

سبق $PGCD(n+1, 3) = 1$ أي $n+1$ و 3 أوليان فيما بينهما وبالتالي $n+1$ لا يقبل القسمة على

3، إذن $n+1 \equiv 1[3]$ أو $n+1 \equiv 2[3]$ وهذا يكافئ $n \equiv 0[3]$ أو $n \equiv 1[3]$ أي $n = 3k$ أو

$$n = 3k+1 \text{ حيث } k \in \mathbb{N}$$

حل التمرين رقم 20 :

(1) نضع $d = PGCD(a, b)$. إذا كان d يقسم a ويقسم b فإنه يقسم b و $(a-bq)$

وبالعكس إذا كان d يقسم b و $(a-bq)$ فإن d يقسم a $(a-bq) + bq = a$.

(2) $PGCD(5n^3 - n, n+2) = PGCD(n+2, 38)$ هي العلاقة السابقة مع $a = 5n^3 - n$ و

$$b = n+2 \text{ و } q = 5n^2 - 10n + 19$$

(3) $(n+2)$ يقسم $(5n^3 - n)$ تكافئ $(n+2)$ تقسم 38 تكافئ

$$(n+2) \in \{-1, -2, -19, -38, 1, 2, 19, 38\}$$

$$n \in \{-40, -21, -4, -3, -1, 0, 17, 36\}$$

حل التمرين رقم 21 :

(1) جدول البواقي الممكنة لـ N بترديد 9 و لـ N^2 بترديد 9

$N \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	[9]
$N^2 \equiv$	0	1	4	0	7	7	0	4	1	[9]

(2) $a^2 - 250507 = b^2$ هو مربع تام ، فحسب الجدول السابق البواقي الممكنة لـ $a^2 - 250507$ بترديد 9

هي 0, 1, 4, 7 إذن

$$a^2 - 250507 \equiv 0[9] \quad \text{أو} \quad a^2 - 250507 \equiv 1[9] \quad \text{أو} \quad a^2 - 250507 \equiv 4[9] \quad \text{أو} \quad a^2 - 250507 \equiv 7[9]$$

ولكن $250507 \equiv 1[9]$ وبالتالي $a^2 \equiv 1[9]$ أو $a^2 \equiv 2[9]$ أو $a^2 \equiv 5[9]$ أو $a^2 \equiv 8[9]$

(3) حسب الجدول السابق المربع لا يمكن أن يوافق بترديد 9 الأعداد 2, 5, 8 تبقى فقط الحالة الصحيحة

$$a^2 \equiv 1[9] \text{ والتي توافق } a \equiv 1[9] \text{ و } a \equiv 8[9].$$

حل التمرين رقم 22:

(1) بواقي قسمة العدد 5^n على 13 :

$$5^0 \equiv 1[13], \quad 5^1 \equiv 5[13], \quad 5^2 \equiv 12[13], \quad 5^3 \equiv 8[13], \quad 5^4 \equiv 1[13]$$

الموافقة تشكل متتالية دورية ودورها 4. نكتب $n = 4k + r$ حيث $r \in \{0; 1; 2; 3\}$

إذا كان $r =$	فإن $n = 4k + r$	باقي قسمة 5^n على 13 هو
0	$n = 4k$	1
1	$n = 4k + 1$	5
2	$n = 4k + 2$	12
3	$n = 4k + 3$	8

(2) لدينا $1981 \equiv 5[13]$ ومنه $1981^{1981} \equiv 5^{1981}[13]$. نقسم الأس 1981 على الدور 4 فنجد

$$1981 = 4 \times 495 + 1 \quad \text{من الشكل } 4k + 1 \quad \text{وبالتالي} \quad 5^{1981} \equiv 5[13] \quad \text{أي} \quad 1981^{1981} \equiv 5[13] \quad \text{وأخيرا}$$

$$1981^{1981} - 5 \equiv 0[13] \quad \text{أي العدد } 1981^{1981} - 5 \quad \text{يقبل القسمة على 13}$$

(3) نلاحظ أن $31 \equiv 5[13]$ ومنه $31^{4n+1} \equiv 5^{4n+1}[13]$ ومن الجدول نجد $31^{4n+1} \equiv 5[13]$

$$\text{و } 18 \equiv 5[13] \quad \text{ومنه} \quad 18^{4n-1} \equiv 5^{4n-1}[13] \quad \text{نستعمل الدورية فنجد} \quad 5^{4n-1} \equiv 5^{4n+3}[13] \quad \text{أي}$$

$$31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 5 + 8[13] \quad \text{وبالتالي} \quad 31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 5 + 8[13] \quad \text{أي} \quad 31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 0[13]$$

وأخيرا العدد $31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ يقبل القسمة على 13.

حل التمرين رقم 23 :

$$\text{نفرض أن } 11c + 1 = a^2 \quad \text{وهذا يكافئ} \quad 11c = (a-1)(a+1).$$

بما أن 11 أولي نستنتج أن 11 يقسم $a-1$ أو 11 يقسم $a+1$.

الحالة الأولى : 11 يقسم $a-1$ ومنه $a=1+11k$ حيث $k \in \mathbb{N}$. وبالتالي
 $11c = (a-1)(a+1) = 11k(2+11k)$ ومنه $c = k(2+11k)$. نستنتج أن k تقسم c وبما أن c أولي
 يكون لدينا $k=1$ أو $k=c$.

• إذا كان $k=1$ فإن $c=1(2+11)=13$ أي $c=13$ وهي قيمة مقبولة لأن
 $11c+1=11 \times 13+1=144=12^2$ وهو مربع تام .

• إذا كان $k=c$ فإن $c=c(2+11c)$ أي $c=-\frac{1}{11}$ وهي قيمة مرفوضة لأن c عدد طبيعي أولي .

الحالة الثانية : 11 يقسم $a+1$ ومنه $a=-1+11k'$ حيث $k' \in \mathbb{N}$. وبالتالي
 $11c = (a-1)(a+1) = (-2+11k')(11k')$ ومنه $c = k'(-2+11k')$. نستنتج أن k' تقسم c وبما أن
 c أولي يكون لدينا $k'=1$ أو $k'=c$.

• إذا كان $k'=1$ فإن $c=9$ وهي قيمة مرفوضة لأن c أولي (9 غير أولي) رغم أن
 $11 \times 9+1=100=10^2$.

• إذا كان $k'=c$ فإن أي $c=\frac{3}{11}$ وهي قيمة مرفوضة لأن c عدد طبيعي أولي .

وأخيرا توجد قيمة وحيدة هي $c=13$ التي تحقق : c عدد أولي بحيث يكون $11c+1$ مربعا تاما.