

فيفري 2020

المستوى: الثالثة ثانوي رياضيات

المدة : 2 سا

فرض الثلاثي الثاني في الرياضيات

التمرين الأول (7 نقط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بعدها الأول $u_0 = 1 - \frac{1}{e}$ و من اجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - u_n}$$

1- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

2- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n}{1 - u_n + \sqrt{1 - u_n}}$

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية و تفارها.

(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \ln(1 - u_n)$

3- أن بين (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

4- اكتب u_n و v_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

5- احسب $P_n = (1 - u_0) \times (1 - u_1) \times \dots \times (1 - u_n)$

التمرين الثاني (8 نقطة)

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x}\right)$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم بين أن: $f(x) = x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$ ثم استنتج

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) ليكن (C_f) الممثل للدالة f في المتجانس و المتعامد المعلم إلى المنسوب المستوي حيث : $||\vec{t}|| = 3$

بين أن المستقيم $\Delta: y = x + \ln 2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

(4) بين أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين تنتهي إلى (C_f)

(5) ادرس الوضع النسبي ل (C_f) و المستقيمين المقاربين.

(6) أنشئ (C_f)

التمرين الثالث (5 نقطة)

1/ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلتين : $(E) : 2081x - 2018y = 1$ و $(E') : 2081x - 2018y = 03$

أ- بين أن العددين 2018 و 2081 أوليان فيما بينهما .

ب - باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (E) ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة (E') .

ج - حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E') .

2/ نرمز ب d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y .

أ - ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب - عين حلول المعادلة (E') حتى يكون $d = 3$.

3/ A و B عددين طبيعيين يكتبان على الترتيب في نظام التعداد الذي أساسه 5 على الشكل : $\overline{\alpha\beta 0\alpha\alpha}$ ؛ $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\beta}$.

أ - بين أنه إذا كان : $B - A = 63$ فإن $(*) : 19\alpha + 6\beta = 63$

ب - بين أنه توجد ثنائية وحيدة $(\alpha; \beta)$ من $\mathbb{N}^2$ تحقق المعادلة $(*)$ ثم استنتج كتابة العددين A و B في النظام العشري .

بالتوفيق

التعليم ليس استعدادا للحياة انه الحياة ذاتها

التصحيح النموذجي

العلامة	الحل	رقم التمرين
7 ن	1- البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n: 0 < u_n < 1 \dots P(n)$ صحبة (ا) من اجل $n=0: 0 < u_0 < 1$ و منه $P(0)$ صحيحة (ب) نفرض صحة $0 < u_n < 1 \dots P(n)$ و نبهرن صحة $P(n+1)$ لدينا $0 < u_n < 1$ و منه $-1 < \sqrt{1-u_n} < 0$ إذن $0 < u_{n+1} < 1$ و منه $0 < u_n < 1$ 2- نبين انه من اجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n}{1 - u_n + \sqrt{1 - u_n}}$ لدينا $u_{n+1} - u_n = 1 - \sqrt{1 - u_n} - u_n = \frac{(1 - u_n) - (\sqrt{1 - u_n})(1 - u_n) + (\sqrt{1 - u_n})}{(1 - u_n) + (\sqrt{1 - u_n})}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n}{1 - u_n + \sqrt{1 - u_n}} = \frac{u_n(u_n - 1)}{1 - u_n + \sqrt{1 - u_n}}$ لدينا $u_n > 0; (u_n - 1) < 0$; $1 - u_n + \sqrt{1 - u_n} > 0$ و منه نستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما 3- تبين أن (u_n) هندسية $v_{n+1} = \ln(1 - u_{n+1}) = \ln(1 - (1 - \sqrt{1 - u_n}))$ $= \ln(1 - u_n)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln(1 - u_n) = \frac{1}{2} v_n$ و منه (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ الأول حدها و $v_0 = -1$ 4- كتابة u_n و v_n بدلالة n	التمرين 1

	2 1	$; v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad ; u_n = 1 - e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$									
	1	5-حساب $P_n = (1 - u_0) \times (1 - u_1) \times \dots \times (1 - u_n)$ $P_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}$									
8ن	0.5 1 1 1.5	(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\ln 2$ (2) الإثبات أن $f(x) = x + \ln 2 + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ اتجاه التغير: f دالة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{e^x (2e^{2x} - 8e^x - 1)}{(e^x + 2)(2e^{2x} + 1)}$ $y_1 = \frac{-4 + 3\sqrt{2}}{2} \quad / \quad e^x = y; \Delta = 72$ $y_2 = \frac{-4 - 3\sqrt{2}}{2} \quad \text{مرفوض}$ $x_1 = \ln y_1 = \ln \left(\frac{-4 + 3\sqrt{2}}{2} \right) \approx -2,1$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$\ln \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2 \right)$</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$f'(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr> </table>	x	$-\infty$	$\ln \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2 \right)$	$+\infty$	$f'(x)$	-	0	+	التمرين 2
x	$-\infty$	$\ln \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2 \right)$	$+\infty$								
$f'(x)$	-	0	+								

0.5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + \ln 2)) / 3$$

المستقيم $y = x + \ln 2$: (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

0.5

4 / الإثبات أن نقطة تقاطع مقاربي المنحنى (C_f) تنتمي إلى (C_f) ولتكن هذه النقطة هي النقطة $A(-2 \ln 2; -\ln 2)$ نبين أن:

$$f(-2 \ln 2) = -\ln 2$$

5 / دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم الذي معادلته: $y = -\ln 2$

1

$$f(x) + \ln 2 = \ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \right) + \ln 2$$

$$= \ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \times 2 \right) = \ln \left(\frac{4e^{2x} + 2}{e^x + 2} \right)$$

$$\frac{4e^{2x} + 2}{e^x + 2} \geq 1; \text{ أي } \ln \left(\frac{4e^{2x} + 2}{e^x + 2} \right) \geq 0$$

ومنه: $e^x (4e^x - 1) \geq 0$ أي $e^x \geq \frac{1}{4}$

$x \geq -\ln 4$ ومنه من أجل كل x ; $x \geq -\ln 4$ فإن (C_f) فوق المستقيم المقارب وتحت في المجال الآخر.

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم الذي معادلته (Δ) :

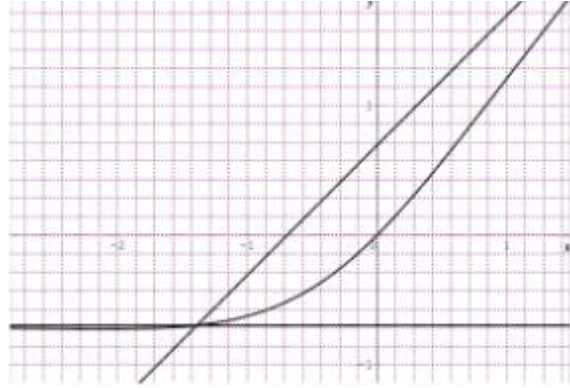
1

f متناقصة تماما على المجال $]-\infty, x_1]$

ومتزايدة تماما على $[x_1; +\infty[$

تابع للسؤال 2 / جدول التغيرات:

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(x_1)$	$+\infty$



التمثيل البياني :

1

التمرين 3

1/ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلتين : $(E) : 2081x - 2018y = 1$ و $(E') : 2081x - 2018y = 03$

أ- تبين أن العددين 2081 و 2018 أوليان فيما بينهما :

الحاصل	1	32	31	2
القاسم والمقسوم	2081	2018	63	2
الباقي	63	2	1	0

آخر باقي غير معدوم في سلسلة القسمة المتتالية يساوي 1 ومنه $\text{pgcd}(2081, 2018) = 1$ أي العددين 2081 و 2018 أوليان فيما بينهما .

ب - باستعمال خوارزمية إقليدس تعيين حل خاص للمعادلة (E) ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة (E') :

$$\left\{ \begin{array}{l} 63 = 2081 - 2018 \\ 2 = 2018 - 63(32) \\ 1 = 63 - 2(31) \end{array} \right. \text{ لدينا : } \text{ومنه } (31)(2018 - 63(32)) - (63)(993) = 1 \text{ تكافئ } (31)(2018) - 2018(1024) - 63(993) = 1 \text{ ومنه } 1 = 63 - 2(31)$$

$$(31)(2018) - 2018(1024) - 63(993) = 1 \text{ ومنه } 1 = (2081 - 2018)(993) - 2018(1024) + 2081(993) - 2018(1024) = 2081(993) - 2018(1024)$$

ومنه الثانية $(993; 1024)$ حل خاص للمعادلة (E') .

ومنه حل خاص للمعادلة (E') هو : $(993 \times 3; 1024 \times 3)$ أي الثانية $(2979; 3072)$ حل خاص للمعادلة (E') .

1

0.5

0.5

5

0.5

ج - حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E') :

$$2081(x-2979) = 2018(y-3072) \dots (*) \text{ ومنه } \begin{cases} 2081x - 2018y = 3 \\ 2081(2979) - 2018(3072) = 3 \end{cases}$$

$$2081/2018(y-3072) \text{ ومنه } 2081/2018(x-2979) \text{ وبما أن } \text{pgcd}(2081, 2018) = 1 \text{ فإنه حسب مبرهنة غوص}$$

$$y = 2081k + 3072 \text{ وعليه نجد } y - 3072 = 2081k \text{ حيث } k \in \mathbb{Z} \text{ ومنه يوجد } 2081/(y-3072)$$

$$\text{وبالتعويض في المعادلة } (*) \text{ نجد } x = 2018k + 2979 \text{ ومنه } S = \left\{ (2018k + 2979, 2081k + 3072) / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

أ - القيم الممكنة للعدد d :

$$\text{لدينا } \begin{cases} d/x \text{ ومنه } d/2081x \\ d/y \text{ ومنه } d/2018y \end{cases} \text{ ومنه } d/2081x - 2018y \text{ ومنه } d/3 \text{ ومنه } d \in \{1, 3\}$$

0.5

ب - تعيين حلول المعادلة (E') حتى يكون $d = 3$:

0.5

$$\left\{ \begin{array}{l} k \equiv 0[3] \\ k \equiv 0[3] \end{array} \right\} \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} 2018k \equiv 0[3] \\ 2081k \equiv 0[3] \end{array} \right\} \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} 2018k + 2979 \equiv 0[3] \\ 2081k + 3072 \equiv 0[3] \end{array} \right\} \text{ تكافئ } \left\{ \begin{array}{l} x \equiv 0[3] \\ y \equiv 0[3] \end{array} \right\} \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} 3/x \\ 3/y \end{array} \right\}$$

ومنه يوجد $k' \in \mathbb{Z}$ حيث $k = 3k'$

$$S = \left\{ (6054k' + 2979; 6243k' + 3072) / k' \in \mathbb{Z} \right\} \text{ ومنه حلول المعادلة } (E') \text{ بحيث } \text{pgcd}(x, y) = 3 \text{ هي: } p \text{ gcd}(x, y) = 3$$

$$B = \overline{\alpha\beta\alpha\beta\beta}^5 ; A = \overline{\alpha\beta 0\alpha\alpha}^5 \quad / 3$$

$$19\alpha + 6\beta = 63 \dots (*) \text{ فإن } B - A = 63$$

0.5

$$\text{حيث } \left\{ \begin{array}{l} A = \overline{\alpha\beta 0\alpha\alpha}^5 = \alpha.5^0 + \alpha.5^1 + 0.5^2 + \beta.5^3 + \alpha.5^4 \\ B = \overline{\alpha\beta\alpha\beta\beta}^5 = \beta.5^0 + \beta.5^1 + \alpha.5^2 + \beta.5^3 + \alpha.5^4 \end{array} \right. \text{ لدينا } 0 \leq \beta \leq 4 \text{ و } 0 \leq \alpha \leq 4$$

$$B - A = 19\alpha + 6\beta \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} A = 631\alpha + 125\beta \\ B = 650\alpha + 131\beta \end{array} \right.$$

$$19\alpha + 6\beta = 63 \dots (*) \text{ فإن } B - A = 63$$

ب - تبين أنه توجد ثنائية وحيدة $(\alpha; \beta)$ من $\mathbb{N}^2$ تحقق المعادلة (*) ثم استنتاج كتابة العدان A و B في النظام العشري

لدينا $\beta \in \{0; 2; 3; 4\}$ و $\alpha \in \{1; 2; 3; 4\}$

4	3	2	1	
76	57	38	19	0
82	63	44	25	1
88	69	50	31	2
94	75	56	37	3
100	81	62	43	4

ومنه توجد ثنائية وحيدة $(\alpha; \beta)$ تحقق المعادلة (*) حيث $(\alpha; \beta) = (3; 1)$.

● استنتاج كتابة العدان A و B في النظام العشري :

$$\begin{cases} A = 2018 \\ B = 2081 \end{cases} \text{ ومنه نجد } \begin{cases} A = 631(3) + 125(1) \\ B = 650(3) + 131(1) \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} A = 631\alpha + 125\beta \\ B = 650\alpha + 131\beta \end{cases} \text{ لدينا}$$

0.5

0.5