

مجلة الأعداد و الحساب

الموافقات

القسمة في زاد

التعداد

الأعداد الأولية

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



1 تمارين محلولة في الأعداد و الحساب

التمرين الأول

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير :

- 1 من أجل كل عدد طبيعي n العدد (2^2n-1) يقبل القسمة على 3 .
- 2 إذا كان العدد الصحيح x حلاً للمعادلة $x^2+x \equiv 0[6]$ فإنّ : $x \equiv 0[3]$.
- 3 المعادلة : $25x-30y=47$ ، تقبل حلولاً في Z^2 .
- 4 توجد ثنائية وحيدة $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية حيث $a < b$ و $PPCM(a,b) - PGCD(a,b) = 1$
- 5 مهما يكن العدد الطبيعي $n : PGCD(14n+21; 21n+14) = 7$.
- 6 العددان M و N مكتوبان في النظام العشري على الشكل : $M = \overline{abc}$ ، $N = \overline{bca}$:
إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإنّ : $(M-N)$ يقبل القسمة على أيضا .
- 7 يوجد نظام تعداد أساسه a بحيث العدد 2018 يكتب : $\overline{21312}^{(a)}$.

الحل

- 1 الإجابة صحيحة ، لأنّ : $2^2n = 4^n$ ، ونعلم أنّ : $4 \equiv 1[3]$ أي : $4^n \equiv 1[3]$ أي : $4^n - 1 \equiv 0[3]$ ومنه : $2^2n - 1 \equiv 0[3]$.
- 2 الإجابة خاطئة ، لأنّ :
ومنه $x^2+x \equiv 0[6]$ لا يعطينا حتماً : $x \equiv 0[3]$.

$x^2 \circ$	0	1	4	3	4	1	6
$x^2 + x \circ$	0	2	0	0	2	0	6

- و كمثال مضاد: ممكن أن يكون $x \equiv 5[6]$ وهنا $x = 6k+5$ أي أنّ x ليس مضاعفاً لـ 3 .
- 3 الإجابة خاطئة ، لأنّ : $PGCD(25;30)=5$ لكن 5 لا يقسم 47 .
- 4 الإجابة صحيحة ، لأنّ : نعلم أنّ $PPCM(a;b) = da'b'$ حيث d هو $PGCD(a;b)$ ، و a' و b' أوليان فيما بينهما ،
ولدينا $PPCM(a;b) - PGCD(a;b) = 1$ ،

$$d(a'b' - 1) = 1 : \text{أي } da'b' - d = 1 : \text{أي } ,$$

$$\text{إذن : } d = 1 , \text{ ومنه : } a'b' - 1 = 1 \text{ أي } a'b' = 2 , \text{ وبما أن } a' < b' ,$$

$$\text{لأن } a < b : \text{ إذن : } (a'; b') = (1; 2) , \text{ ومنه : } (a; b) = (1; 2) , \text{ لأن } d = 1 .$$

5 الإجابة خاطئة ، لأن :

$$PGCD(14n + 21; 21n + 14) = PGCD(7(2n + 3); 7(3n + 2))$$

$$\text{أي : } PGCD(14n + 21; 21n + 14) = 7 \times PGCD(2n + 3; 3n + 2)$$

$$\text{نفرض أن } d : PGCD(2n + 3; 3n + 2) = d , \text{ إذن : } \begin{cases} d/3(2n + 3) \\ d/2(3n + 2) \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} d/2n + 3 \\ d/3n + 2 \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} d/6n + 9 \\ d/6n + 4 \end{cases}$$

$$\text{، ومنه : } d/5 \text{ أي } d = 1 \text{ أو } d = 5$$

$$\text{، إذن : } PGCD(14n + 21; 21n + 14) = 7 \times 1$$

$$\text{، ومنه : } PGCD(14n + 21; 21n + 14) = 7$$

$$\text{أو : } PGCD(14n + 21; 21n + 14) = 7 \times 5 = 35 , \text{ ومنه : } PGCD(14n + 21; 21n + 14) = 35$$

6 الإجابة صحيحة ، لأن :

لدينا :

$$\begin{cases} M = \overline{abc} = a \times 10^2 + b \times 10 + c = 100a + 10b + c \\ N = \overline{bca} = b \times 10^2 + c \times 10 + a = 100b + 10c + a \end{cases}$$

$$\text{بما أن } M \text{ يقبل القسمة على } 27 , \text{ إذن } M \text{ يقبل القسمة على } 3 \text{ (لأن } 27 \text{ مضاعف لـ } 3) .$$

$$\text{إذن : } M \equiv 0[3] \text{ أي } 100a + 10b + c \equiv 0[3]$$

$$\text{نعلم أن : } 100 \equiv 1[3] \text{ و } 10 \equiv 1[3] , \text{ إذن : } (1) \dots\dots a + b + c \equiv 0[3]$$

$$\text{نحسب الآن : } M - N = (100a + 10b + c) - (100b + 10c + a) ,$$

$$\text{أي : } M - N = 99a - 90b - 9c , \text{ أي : } M - N = 9(11a - 10b - c) \text{ (مضاعف لـ } 9) .$$

$$\text{يكون } M - N \text{ قابلا للقسمة على } 27 \text{ إذا كان : } (11a - 10b - c) \text{ مضاعفا لـ } 3 , \text{ أي :}$$

$$11a - 10b - c \equiv 0[3] \text{ أي : } 2a - b - c \equiv 0[3] \text{ و } 2 \equiv -1[3] , \text{ إذن : } -a - b - c \equiv 0[3]$$

$$\text{(بالضرب في } (-1) \text{) أي : } a + b + c \equiv 0[3] , \text{ وهذا ما توصلنا من قبل ، أنظر (1) .}$$

$$\text{إذن : } M - N \text{ يقبل القسمة على } 27 \text{ أيضا .}$$

$$7 \text{ الإجابة خاطئة ، لأن : } 2018 = \overline{21321}^{(a)} , (a > 3) : 2018 = 2a^4 + a^3 + 3a^2 + 2a + 1 , \text{ إذن : } 2a^4 < 2018$$

$$\text{أي : } a^4 < 1009 \text{ أي : } a^2 < \sqrt{1009} \text{ أي : } a^2 < 31,764 \text{ أي : } a < \sqrt{31,764}$$

$$\text{ومنه : } a < 5,63 , \text{ لكن : } (a > 3) , \text{ إذن : } (a = 4) \text{ أو } (a = 5) .$$

$$\text{التحقق من أجل : } (a = 4)$$

مرفوضة لأن :

$$\cdot \overline{21321}^{(4)} = 2 \times (4)^4 + 1 \times (4)^3 + 3 \times (4)^2 + 2 \times (4) + 1 = 633$$

التحقق من أجل : $(a = 5)$

$$\cdot \overline{21321}^{(5)} = 2 \times (5)^4 + 1 \times (5)^3 + 3 \times (5)^2 + 2 \times (5) + 1 = 1461$$

إذن لا يوجد نظام تعداد أساسه a حيث 2018 يكتب : $\overline{21321}^{(a)}$

التمرين الثاني

أجب بصح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية :
- نعتبر x و y عدداً صحيحان .

1 من أجل كل عدد صحيح x ، لدينا : $x^3 \equiv x[2]$.

2 إذا كان $x \equiv 2[14]$ فإن $x \equiv 1[7]$.

3 إذا كان $4x \equiv 10y[5]$ فإن $x \equiv 0[5]$.

4 إذا كان $\begin{cases} x \equiv 4[5] \\ y \equiv 5[8] \end{cases}$ فإن $8x - 5y = 7$.

الحل

1 صحيح ، لأن :

نعلم أن : $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$ أي : $x^3 - x = x(x+1)(x-1)$ ، لدينا : الجداء $x(x+1)$ زوجي .

إذن : $x^3 - x$ يقبل القسمة على 2 أي : $x^3 - x \equiv 0[2]$ و منه : $x^3 \equiv x[2]$.

2 خطأ ، لأن :

لدينا : $x \equiv 2[14]$ تكافئ : $x = 14k + 2$ أي : $x = 2(7k + 1)$ ، و نعلم أن : $7k + 1 \equiv 1[7]$ إذن : $2(7k + 1) \equiv 2[7]$ و منه : $x \equiv 2[7]$.

3 صحيح ، لأن :

لدينا : $4x \equiv 10y[5]$ أي : $4x - 10y = 5k$ و منه : $4x = 5(k + 2y)$.

بما أن : $\frac{5}{4x}$ و 5 أولي مع 4 إذن : حسب غوص فإن : $\frac{5}{x}$ و منه : $x \equiv 0[5]$.

4 خطأ ، لأن :

لدينا : $\begin{cases} x \equiv 4[5] \\ y \equiv 5[8] \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = 5\alpha + 4 \\ y = 8\beta + 5 \end{cases}$.

لنحسب العدد $8x - 5y = 40\alpha + 32 - 40\beta - 25$: $8x - 5y = 40(\alpha - \beta) + 7$ أي : $8x - 5y = 40k + 7$:
ومنه : $8x - 5y \equiv 7[40]$.

التمرين الثالث

n عدد طبيعي غير معدوم ويكتب في النظام العشري على الشكل : $n = \overline{abab}$.

1 بين أن n يقبل القسمة على 101 .

2 بين أن n يقبل القسمة على 4 إذا وافقط إذا كان العدد $\overline{ab}$ قابلا للقسمة على 4 .

3 جد أصغر قيمة للعدد الطبيعي n إذا علمت أنه يقبل القسمة على 20 .

الحل

(1) لدينا : $n = \overline{abab}$ أي : $n = \overline{ab} \times 100 + \overline{ab}$ و منه : $n = \overline{ab}(100 + 1)$ أي : $n = 101 \times \overline{ab}$.
إذن : العدد n يقبل القسمة على 101 .

(2) بما أن : $n = \overline{ab} \times 100 + \overline{ab}$ و 100 يقبل القسمة على 4 ، إذن : n يقبل القسمة على 4 إذا وافقط إذا كان العدد $\overline{ab}$ قابلا للقسمة على 4 .

(3) n يقبل القسمة على 20 يكافئ أن n يقبل القسمة على 4 و 5 ، أي أن : العدد $\overline{ab}$ يقبل القسمة على 4 ورقم الآحاد b يكون 0 أو 5 .

لكن الرقم b لا يمكن أن يكون 5 لأن $\overline{ab}$ يقبل القسمة على 4 .

إذن : الأعداد من الشكل $\overline{a0}$ التي تقبل القسمة على 4 هي : 20, 40, 60, 80 .

وبالتالي قيم العدد n هي : 2020, 4040, 6060, 8080 وأصغر قيمة لـ n هي 2020 .

التمرين الرابع

1 جد كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية والتي تحقق : $\begin{cases} PGCD(a, b) = 42 \\ PPCM(a, b) = 1680 \end{cases}$.

2 عين الأعداد الصحيحة x حيث : $8x \equiv 7[5]$.

3 حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $336x + 210y = 294$.

1 لدينا : $\begin{cases} PGCD(a,b) = 42 \\ PPCM(a,b) = 1680 \end{cases}$ ونعلم أن : $\begin{cases} a = 42a' \\ b = 42b' \end{cases}$

و $PPCM(a,b) = 42 \times a'b' = 1680$ مع $PGCD(a',b') = 1$

إذن : $a'b' = \frac{1680}{42}$ أي : $a'b' = 40$ و منه :

$(a',b') \in \{(1,40); (40,1); (5,8); (8,5)\}$

و بالتالي نجد : $(a,b) \in \{(42,1680); (1680,42); (210,336); (336,210)\}$

2 لدينا : $8x \equiv 7[5]$ أي : $3x \equiv 2[5]$ ، بالضرب في 2 نجد : $6x \equiv 4[5]$ و منه : $x \equiv 4[5]$

إذن : $x = 5k + 4$ مع $(k \in \mathbb{Z})$

3 المعادلة $336x + 210y = 294$

تكافئ : $8x + 5y = 7$ أي : $8x - 7 = 5y$ و منه : $8x \equiv 7[5]$ إذن : $x = 5k + 4$ و بالتعويض نجد : $y = -8k - 1$ و بالتالي : $S = (5k + 4, -8k - 1)$ مع $(k \in \mathbb{Z})$

التمرين الخامس

الجزء الأول :

1 أ - عين تبعا لقيم العدد الطبيعي باقي قسمة العدد 4^n على 7 .

ب - إستنتج باقي قسمة العدد $(2019^{2020} + 2020^{1441} + 1962^{1441})$ على 7 .

ج - عين قيم العدد الطبيعي بحيث يكون :

$2020^{(6n+5)} + 1441^{(6n+6)} + 5n \equiv 0[7]$

2 نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{(n-1)}$

أ - بين أن U_n يكون مضاعفا لـ 4 إذا وافق إذا كان $(4^n - 1)$ مضاعفا لـ 7 .

ب - إستنتج قيم حتى يكون U_n قابلا للقسمة على 7 .

الجزء الثاني :

1 أ - باستعمال خوارزمية إقليدس عين العددين الصحيحين u و v حيث :

$101u - 72v = 1$

ب - إشرح لماذا المعادلة $2020x - 1440y = 60 \dots (E)$ تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$

ج - عين حلا خاصا للمعادلة ، ثم استنتج جميع حلول هذه المعادلة .

2 عين الحل (x,y) للمعادلة (E) الذي يحقق : $\begin{cases} PGCD(x,y) = 3 \\ PPCM(x,y) = 24948 \end{cases}$

حل الجزء الأول :

1 أ) تعيين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بقاقي قسمة العدد 4^n على 7 :

نجد : $4^0 \equiv 1[7]$ ، $4^1 \equiv 4[7]$ ، $4^2 \equiv 2[7]$ ، $4^3 \equiv 1[7]$ ومنه الدور هو : 3 .
 إذن : $4^{3k} \equiv 1[7]$ و $4^{3k+1} \equiv 4[7]$ و $4^{3k+2} \equiv 2[7]$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

الإستنتاج :

لدينا : $2019 \equiv 3[7]$ أي : $2019 \equiv -4[7]$ و $2020 \equiv 4[7]$ و $1441 \equiv 6[7]$ أي : $1441 \equiv -1[7]$.
 إذن :

$$2019^{2020} + 2020^{1441} + 1441^{1962} \equiv (-4)^{2020} + 4^{1441} + (-1)^{1962} [7]$$

$$\text{أي : } 2019^{2020} + 2020^{1441} + 1441^{1962} \equiv (4^{3k+1} + 4^{3k'+1} + 1) [7]$$

$$\text{و منه : } 2019^{2020} + 2020^{1441} + 1441^{1962} \equiv (4 + 4 + 1) [7]$$

$$\text{أي : } 2019^{2020} + 2020^{1441} + 1441^{1962} \equiv 9[7]$$

$$\text{إذن : } 2019^{2020} + 2020^{1441} + 1441^{1962} \equiv 2[7]$$

و عليه باقي قسمة العدد $(2019^{2020} + 2020^{1441} + 1441^{1962})$ على 7 هو : 2 .

ج) تعيين قيم العدد الطبيعي n :

$$\text{لدينا : } 2020^{6n+5} + 1441^{6n+6} + 5n \equiv 0[7]$$

$$\text{أي : } 4^{6n+5} + (-4)^{6n+6} + 5n \equiv 0[7]$$

و نعلم أن : $(6n+6)$ زوجي

$$\text{إذن : } 4^{6n+5} + 4^{6n+6} + 5n \equiv 0[7]$$

$$\text{، لدينا : } 6n+5 = 3 \times 2n+3+2 = 3^{2n+1} + 2 = 3k+2$$

$$\text{أي تصبح : } 4^{(3k+2)} + 4^{3k} + 5n \equiv 0[7]$$

$$\text{و منه : } 2+1+5n \equiv 0[7] \text{ أي : } 5n \equiv -3[7] \text{ أي : } 5n \equiv 4[7]$$

$$\text{أي : } 15n \equiv 12[7]$$

$$\text{و عليه : } n = 7k+5 \text{ مع } k \in \mathbb{N}$$

2 لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-1}$

نلاحظ أن U_n هو مجموع حدود متتالية هندسية أساسها 4 و عدد الحدود n حدا أي نجد : $U_n = 1 \times (4^n - 1) / (4 - 1)$

$$\text{و منه : } U_n = (4^n - 1) / 3$$

أ) البرهان : أولا نبين أنه إذا كان U_n مضاعفا لـ 7 فإن $(4^n - 1)$ مضاعف لـ 7 .

نفرض U_n مضاعف لـ 7 أي $U_n = 7k$ أي $(4^n - 1)/3 = 7k$ أي $4^n - 1 = 7k \times 3$: إذن نستنتج أن : $(4^n - 1)$ مضاعف لـ 7 (1).

ثانيا نفرض $(4^n - 1)$ مضاعف لـ 7 و نبين أن U_n مضاعف لـ 7 .

بما أن : $(4^n - 1)$ مضاعف لـ 7 و نعلم أن : $U_n = (4^n - 1)/3$ أي $4^n - 1 = 3U_n$: $3U_n$ مضاعف لـ 7 و نعلم أن : $U_n = 7U_n - 3 \times 2U_n$ ، لدينا : $(3 \times 2U_n)$ مضاعف لـ 7 و $7U_n$ مضاعف لـ 7 .
و عليه نستنتج أن : U_n مضاعف لـ 7 ... (2).

من (1) و (2) نستنتج أن U_n مضاعف لـ 7 إذا وافقط إذا كان $(4^n - 1)$ مضاعفا لـ 7 .

ب) إستنتاج قيم n : يكون U_n قابلا للقسمة على 7 إذا وافقط إذا كان $(4^n - 1)$ قابلا للقسمة 7 .
أي : $4^n - 1 \equiv 0[7]$ أي $4^n \equiv 1[7]$ و منه : $(n = 3k)$ مع $k \in \mathbb{N}$.

حل الجزء الثاني :

1 أ) إستخدام خوارزمية إقليدس لتعيين العددين الصحيحين u و v :

لدينا : $29 - 2 \times 14 = 1$: إذن $29 = 14 \times 2 + 1$ ، $72 = 29 \times 2 + 14$ ، $101 = 72 \times 1 + 29$

أي : $29 - 2(72 - 29 \times 2) = 1$ أي : $29 - 2 \times 72 + 4 \times 29 = 1$

و منه : $5 \times 29 - 2 \times 72 = 1$ أي : $5(101 - 72) - 2 \times 72 = 1$

أي : $5 \times 101 - 5 \times 72 - 2 \times 72 = 1$ و منه : $5 \times 101 - 7 \times 72 = 1$.

إذن : $(u, v) = (5, 7)$.

ب) المعادلة (E) تقبل حولا في Z^2 لأن : $PGCD(2020, 1440) = 20$ و 20 يقسم 60 .

ج) المعادلة $2020x - 1440y = 60$ (E) تكافئ : $101x - 72y = 3$ ولدينا : $101u - 72v = 1$

إذن الحل الخاص هو : $(3u, 3v)$ أي : $(15, 21)$.

- إستنتاج جميع حلول المعادلة (E) : لدينا : $\begin{cases} 101x - 72y = 3 \\ 101(15) - 72(21) = 3 \end{cases}$

بالطرح نجد : $101(x - 15) - 72(y - 21) = 0$

أي : $101(x - 15) = 72(y - 21)$.

لدينا : 72 يقسم $101(x - 15)$ و 72 أولي مع 101 حسب مبرهنة غوص نستنتج أن : 72 يقسم $x - 15$ أي

$x - 15 = 72k$ و منه : $x = 72k + 15$ بالتعويض نجد : $y = 101k + 21$. و عليه الحلول هي : $S = \{(x, y) = (72k + 15, 101k + 21); k \in \mathbb{Z}\}$.

لدينا : (x, y) حل لـ $\begin{cases} PGCD(x, y) = 3 \\ PPCM(x, y) = 24948 \end{cases}$ و بما أن (x, y) حل لـ (E) أي : $\begin{cases} x = 72k + 15 \\ y = 101k + 21 \end{cases}$

$PGCD(x, y) = 3$ أي أن : $\begin{cases} 72k + 15 \equiv 0[3] \dots\dots\dots(1) \\ 101k + 21 \equiv 0[3] \dots\dots\dots(2) \end{cases}$

العلاقة (1) محققة دائماً ، لنحل (2) أي : $101k + 21 \equiv 0[3]$ ، بما أن : $21 \equiv 0[3]$ فإن : $101k \equiv 0[3]$.

لدينا : 101 أولي مع 3 و منه : $k \equiv 0[3]$ أي : $k = 3\alpha$.

$$\begin{cases} y = 101k + 21 \\ y = 101(3\alpha) + 21 \\ y = 303\alpha + 21 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = 72k + 15 \\ x = 72(3\alpha) + 15 \\ x = 216\alpha + 15 \end{cases} \text{ إذن :}$$

$$\text{و نعلم أن : } \text{PPCM}(x, y) = \frac{x \times y}{\text{PGCD}(x, y)}$$

$$\text{و منه : } 24948 = (x \times y)/3 \text{ أي : } x \times y = 74844$$

$$\text{إذن : } (216\alpha + 15)(303\alpha + 21) = 74844$$

$$\text{أي : } 3(72\alpha + 5) \times 3(101\alpha + 7) = 74844$$

$$\text{أي : } (72\alpha + 5)(101\alpha + 7) = 8316$$

$$\text{أي نحصل على : } 7272\alpha^2 + 504\alpha + 505\alpha + 35 - 8316 = 0$$

$$\text{و منه : } 7272\alpha^2 + 1009\alpha - 8281 = 0$$

نلاحظ أن مجموع المعاملات يساوي 0 إذن : $\alpha = 1$ أو $\alpha = -8281/7272 \notin \mathbb{Z}$

و عليه : $\alpha = 1$. و منه : $x = 231$ و $y = 324$ ، أي : $(x, y) = (231, 324)$.

التمرين السادس

1 درس تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7 .

2 برهن أنه من أجل كل n من N يكون العدد : $2 \times 2012^{(6n+4)} + 3 \times 1432^{(3n+2)}$ قابلا للقسمة على 7 .

3 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على N بجدها العام u_n حيث : $u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$.

أ) أحسب بدلالة المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

ب) ماهي قيم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها المجموع S_n قابلا للقسمة على 7 ؟

الحل

1 بواقي القسمة الإقليدية لكل من 3^n و 4^n على 7 :

$$3^0 \equiv 1[7], 3^1 \equiv 3[7], 3^2 \equiv 2[7], 3^3 \equiv 6[7], 3^4 \equiv 4[7], 3^5 \equiv 5[7], 3^6 \equiv 1[7]$$

قيم n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
باقي قسمة العدد 3^n على 7	1	3	2	6	4	5

$$4^3 \equiv 1[7] , 4^2 \equiv 2[7] , 4^1 \equiv 4[7] , 4^0 \equiv 1[7]$$

قيم n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
باقي قسمة العدد 3^n على 7	1	4	2

2 برهان أن : $2 \times 2012^{6n+4} + 3 \times 1432^{3n+2}$ يقبل القسمة على 7 من أجل كل عدد طبيعي n :

$$2012 \equiv 3[7] , \text{ أي } 2012^{6n+4} \equiv 3^{6n+4}[7] , \text{ ومنه } 2012^{6n+4} \equiv 4[7] .$$

$$1432 \equiv 4[7] , \text{ أي } 1432^{3n+2} \equiv 4^{3n+2}[7] , \text{ ومنه } 1432^{3n+2} \equiv 2[7] .$$

$$\text{إذن : } 2 \times 2012^{6n+4} + 3 \times 1432^{3n+2} \equiv 8 + 6[7] , \text{ أي } 2 \times 2012^{6n+4} + 3 \times 1432^{3n+2} \equiv 14[7] , \text{ ومنه : } 2 \times 2012^{6n+4} + 3 \times 1432^{3n+2} \equiv 0[7] . \text{ وهو المطلوب .}$$

3 أ) حساب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$:

نلاحظ أن المتتالية (u_n) هي مجموع متتاليتين هندسيتين إحداهما أساسها 3 وحدها الأول 2 ، والثانية أساسها 4

$$\text{وحدها الأول 3 ، أي : } S_n = 2 \left[\frac{1-3^{n+1}}{1-3} \right] + 3 \left[\frac{1-4^{n+1}}{1-4} \right] ,$$

$$\text{ومنه : } S_n = [3^{n+1} - 1] + [4^{n+1} - 1] ,$$

$$\text{أي أن : } S_n = 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2 .$$

ب) قيم n حتى يكون S_n قابلا للقسمة على 7 :

$$S_n \equiv 0[7] \text{ معناه : } 3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7]$$

قيم n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
باقي قسمة العدد 3^n على 7	1	3	2	6	4	5
باقي قسمة العدد 4^n على 7	1	4	2	1	4	2

نلاحظ أن : $3^n + 4^n \equiv 2[7] , \text{ لما } n = 6k , \text{ ومنه : } 3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7] , \text{ لما } n+1 = 6k$:

أي لما : $n = 6k - 1$ أو : $n = 6(k-1) + 5$. لنضع : $k' = k - 1$ ، أي : $n = 6k' + 5$ ، حيث : $k' \in \mathbb{N}$.

ومنه حتى يكون S_n قابلا للقسمة على 7 ، يجب أن يكون $n = 6k' + 5$ ، حيث : $k' \in \mathbb{N}$.

نعتبر a عدد طبيعي غير معدوم .

- 1 (أ) بين أن العدد $a = a(a^2 - 1)$ يقبل القسمة على 6 .
(ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $a_n = a(a^{2n} - 1)$ قابلا للقسمة على 6 .
- 2 من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ و $S_n = a_1^{2n+1} + a_2^{2n+1} + \dots + a_n^{2n+1}$
حيث : $a_1, a_2, \dots, a_n$ أعداد طبيعية غير معدومة .
(أ) برهن أن S و S_n لهما نفس الباقي في القسمة على 6 .
(ب) عين باقي قسمة المجموع :
(2022¹⁴⁴³ + 2003¹⁴⁴³ + + 2002¹⁴⁴³) على 6 .
- 3 ليكن n عدد طبيعي مكتوب في النظام الخماسي (ذي الأساس) على الشكل : $N = \overline{abab^5}$
(أ) برهن أن N يقبل القسمة على 6 إذا وافق إذا كان : $a \equiv b[3]$.
(ب) إستنتج أكبر قيمة للعدد n الذي يقبل القسمة على 6 .

الحل

- 1 (أ) لدينا : $A = a(a^2 - 1)$ أي تصبح : $A = a(a-1)(a+1)$.
ملاحظة : الأعداد الطبيعية : $a-1, a, a+1$ متتابة ونعلم أن : جداء عددين طبيعيين متتالين يكون زوجيا وأيضا جداء ثلاث أعداد طبيعية متتالية يكون مضاعفا لـ 3 .
إذن : العدد A يقبل القسمة على 2 وعلى 3 وبالتالي يقبل القسمة على 6 لأن : 2 و 3 أوليان فيما بينهما .
تنبيه : يمكن إستعمال جدول الموافقة بترديد 6 ونجد أن العدد A يقبل القسمة على 6 .
(ب) أولا نذكر أنه من أجل كل عدد a يكون :
 $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1)$
لدينا : $A_n = a(a^{2n} - 1)$
أي : $A_n = a[(a^2)^n - 1]$ و منه : $A_n = a(a^2 - 1)[(a^2)^{n-1} + (a^2)^{n-2} + \dots + 1]$
نعلم أن : يقبل القسمة على 6 أي : $a(a^2 - 1) = 6k$ وبالتالي فالعدد A_n يقبل القسمة على 6 .
- 2 (2) لدينا :

$$S_n = a_1^{2n+1} + a_2^{2n+1} + \dots + a_n^{2n+1}$$

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

أ) لإثبات أن S_n و S لهما نفس الباقي على 6 يكفي أن نبين أن : الفرق $S_n - S$ مضاعف لـ 6 .

(*) لنحسب الفرق :

$$S_n - S = a_1^{2n+1} + a_2^{2n+1} + \dots + a_n^{2n+1} - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

أي نحصل على :

$$S_n - S = (a_1^{2n+1} - a_1) + (a_2^{2n+1} - a_2) + \dots + (a_n^{2n+1} - a_n)$$

$$\text{أي: } S_n - S = a_1(a_1^{2n} - 1) + a_2(a_2^{2n} - 1) + \dots + a_n(a_n^{2n} - 1)$$

حسب السؤال السابق وجدنا أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a العدد يقبل القسمة على 6.

ومنه : الفرق $S_n - S$ هو عبارة عن مجموع لمضاعفات 6 إذن : فهو يقبل القسمة على 6 .

و بالتالي فإن : S و S_n لهما نفس الباقي على 6 .

المجموعين :

$$(2002^{1443} + 2003^{1443} + \dots + 2022^{1443})$$

و $(2002 + 2003 + \dots + 2022)$ لهما نفس الباقي على 6 .

لأن : الأس 1443 يكتب على الشكل $2n+1$ و من جهة أخرى نعلم أن : $(2002 + 2003 + \dots + 2022)$ هو مجموع متتالية حسابية أساسها 1 أي :

$$(2002 + 2003 + \dots + 2022) = \frac{21(2002 + 2022)}{2}$$

ومنه : $(2002 + 2003 + \dots + 2022) = 42252$.

العدد 42252 يقبل القسمة على 2 (عدد زوجي) و يقبل القسمة على 3 (مجموع أرقامه مضاعف لـ 3) إذن هو يقبل القسمة على 6 .

و بالتالي باقي قسمة المجموع $(2002^{1443} + 2003^{1443} + \dots + 2022^{1443})$ على 6 هو 0 .

أ) لدينا : $N = \overline{abab}^5$ أي : $N = a \times 5^3 + b \times 5^2 + a \times 5 + b$ مع $(0 < a < 5)$ و $(0 \leq b < 5)$. نعلم أن : $5 \equiv -1[6]$ أي يصبح :

$$N \equiv -a + b - a + b[6] \text{ أي } N \equiv a \times (-1)^3 + b \times (-1)^2 + a \times (-1) + b[6]$$

ومنه : $N \equiv -2a + 2b[6]$ إذن : العدد يقبل القسمة على معناه : $-2a + 2b \equiv 0[6]$ أي : $2b \equiv 2a[6]$

إذن : $a \equiv b[3]$.

ب) لدينا : $a \equiv b[3]$ أي أن : $a - b = 3k$ و نعلم أن : $a \in \{1, 2, 3, 4\}$ و $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ أي : الثنائيات (a, b) .

التي تحقق $a - b = 3k$ هي : $(1, 1)$ ، $(1, 4)$ ، $(2, 2)$ ، $(3, 0)$ ، $(3, 3)$ ، $(4, 1)$ و $(4, 4)$.

لإيجاد أكبر قيمة لـ N نختار أكبر قيمة لـ a وهي 4 كذلك أكبر قيمة لـ b هي 4 .

إذن : $\overline{4444}^5$ و يكتب في النظام العشري : $N = 624$.

التمرين الثامن

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n = 2 \times 5^n + 7$.

- 1 (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون a_n فردي .
 (ب) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 8 .
 (ج) إستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $a_n \equiv 1[8]$.
- 2 (أ) برهن أنه إذا كان : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 7[125] \end{cases}$ فإن : $x \equiv 257[1000]$.
 (ب) بين أنه من أجل كل $n \geq 3$ يكون : $a_n \equiv 257[1000]$.
 (ج) ما هي الأرقام الثلاث الأخيرة للعدد $(2 \times 5^{2021} + 7)(2 \times 5^{2020} + 7)$ ؟
- 3 (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$.
 (ب) نعتبر $PGCD(a_{2n}; a_{2n+1}) = d$ ، بين أن d يختلف عن 7 .
 (ج) جد عندئذ d .

الحل

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 2 \times 5^n + 7$.

- 1 أ - نلاحظ أن هو عبارة عن مجموع عددين أحدهما زوجي (2×5^n) والآخر فردي (7) إذن : هو فردي .
 أو كطريقة أخرى لدينا : $a_n = 2 \times 5^n + 7$ أي $a_n = 2 \times 5^n + 2 \times 3 + 1$: $a_n = 2 \times 5^n + 2 \times 3 + 1$ و منه :
 $a_n = 2(5^n + 3) + 1$ وهذا ما يدل على أن a_n فردي .
 ب - نجد :
 $5^0 \equiv 1[8]$ ، $5^1 \equiv 5[8]$ ، $5^2 \equiv 1[8]$
 إذن : من أجل $n = 2k$ يكون : $(5^n \equiv 1[8])$ و من أجل $n = 2k + 1$ يكون : $(5^n \equiv 5[8])$.
 ج - نميز حالتين : حالة : $n = 2k$ (زوجي) فإن : $5^n \equiv 1[8]$ أي : $2 \times 5^n \equiv 2[8]$ أي : $2 \times 5^n + 7 \equiv 9[8]$ و منه :
 $(a_n \equiv 1[8])$.
 حالة : $n = 2k + 1$
 (فردي) فإن : $5^n \equiv 5[8]$ أي : $2 \times 5^n \equiv 10[8]$ أي : $2 \times 5^n + 7 \equiv 17[8]$ و منه : $(a_n \equiv 1[8])$. من الحالتين
 السابقتين نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي فإن : $(a_n \equiv 1[8])$.

- 2 (أ) لنبرهن أنه إذا كان : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 7[125] \end{cases}$ فإن : $x \equiv 257[1000]$.

لدينا : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \times 125 \\ x \equiv 7[125] \times 8 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 125x \equiv 125[1000] \\ 8x \equiv 56[1000] \times 16 \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} 125x \equiv 125[1000] \\ 128x \equiv 896[1000] \end{cases}$ بالطرح نجد : $3x \equiv 771[1000]$

بضرب هذه الأخيرة في 3 نجد : $9x \equiv 2313[1000]$ ونعلم أن : $2313 \equiv 313[1000]$ أي : $9x \equiv 313[1000]$ و منه تصبح : بالطرح نتحصل على : $(x \equiv 257[1000])$ هو المطلوب .

أو كطريقة أخرى : لدينا : أي : و منه : $8\alpha + 1 = 125\beta + 7$ أي : $8\alpha = 125\beta + 6$ أي : $8\alpha \equiv 6[125]$

و منه : $4\alpha \equiv 3[125]$ أي : $124\alpha \equiv 93[125]$ ونعلم أن : $125\alpha \equiv 0[125]$ بالطرح نجد : $\alpha \equiv -93[125]$

و منه : $\alpha \equiv 32[125]$ أي : $(\alpha = 125k + 32)$ نعوض قيمة α في : $x = 8\alpha + 1$ نجد : $x = 8(125k + 32) + 1$ أي : $x = 1000k + 257$ وهذا ما يدل على أن : $x \equiv 257[1000]$.

ب - لدينا من أجل $n \geq 3$ يكون : 5^n مضاعفا لـ 125 مثلا $(5^3 = 125)$.

إذن : من أجل $n \geq 3$ فإن : $5^n \equiv 0[125]$ أي : $2 \times 5^n + 7 \equiv 7[125]$ و بالتالي يكون : $a_n \equiv 7[125]$.

لدينا مما سبق أن : $a_n \equiv 1[8]$ و $a_n \equiv 7[125]$ إذن حسب السؤال (أ) فإن :

$a_n \equiv 257[1000]$ هو المطلوب .

ج - لدينا : $(2 \times 5^{2020} + 7)(2 \times 5^{2021} + 7) = a_{2020} \times a_{2021}$.

حسب ما سبق لدينا : $\begin{cases} a_{2020} \equiv 257[1000] \\ a_{2021} \equiv 257[1000] \end{cases}$ أي : $a_{2020} \times a_{2021} \equiv 257^2[1000]$ و منه : $a_{2020} \times a_{2021} \equiv 66049[1000]$

إذن : $(a_{2020} \times a_{2021} \equiv 49[1000])$ وهذا ما يدل على أن آخر ثلاث أرقام للعدد $(2 \times 5^{2020} + 7)(2 \times 5^{2021} + 7)$ هي : 049

3

أ - لدينا : $5a_{2n} - a_{2n+1} = 5(2 \times 5^{2n} + 7) - (2 \times 5^{2n+1} + 7)$

أي : $5a_{2n} - a_{2n+1} = 2 \times 5^{2n+1} + 35 - 2 \times 5^{2n+1} - 7$

إذن : $(5a_{2n} - a_{2n+1} = 28)$.

ب - لدينا : $PGCD(a_{2n}, a_{2n+1}) = d$ أي أن : d/a_{2n} و d/a_{2n+1} ، لكن : $a_{2n} = 2 \times 5^{2n} + 7$ و $a_{2n+1} = 2 \times 5^{2n+1} + 7$ ونعلم أن : (2×5^{2n})

ليس مضاعفا لـ 7 إذن : a_{2n} فردي ولا يقبل القسمة على 7 إذن : $d \neq 7$.

ج - إيجاد قيم d :

لدينا : $PGCD(a_{2n}, a_{2n+1}) = d$ أي أن : d/a_{2n} و d/a_{2n+1} إذن : $d/5a_{2n} - a_{2n+1}$ و منه : $d/28$.

و بالتالي قيم الممكنة هي : 1, 2, 4, 7, 14, 28 لكن $d \neq 7$ وأيضا حسب السؤال (1) (أ) فإن : a_n فردي بالتالي فحسب الشروط السابقة نستنتج أن : $d = 1$.

التمرين التاسع

1 (أ) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7.

(ب) حدد الأعداد الطبيعية n بحيث يكون :

$$\bullet (2020^{1962} \times n + 4 \times 1441^{1954}) \equiv 0[7]$$

2 نعتبر العدد الطبيعي N_p المكتوب في النظام العشري على الشكل :

$$\bullet N_p = \overbrace{11 \dots 1}^{p \text{ fois}}$$

(أ) بين أن : $N_p \equiv p[3]$

(ب) إستنتج باقي قسمة العدد N_{2020} على 3 .

(ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $(3^n - 1)$ قابلا للقسمة على 2 .

(د) بين أن العدد N_p يقبل القسمة على 7 إذا وافقط إذا كان العدد $(3^p - 1)$ يقبل القسمة على 7 أيضا .

(هـ) إستنتج باقي قسمة العدد N_{2020} على 7 .

3 (أ) حل في Z^2 المعادلة : $3x - 7y = 4$.

(ب) إستنتج الأعداد الصحيحة a التي تحقق الجملة : $\begin{cases} a \equiv 1[3] \\ 2a \equiv 3[7] \end{cases}$. (ج) عين باقي قسمة العدد N_{2020} على 21 .

4 نعتبر العدد الطبيعي M المكتوب في النظام ذي الأساس 4 على الشكل : $M = \overline{abb2a0}^4$.

(أ) عين قيم a و b علما أن : $M - 4 \equiv 0[7]$.

(ب) إستنتج قيم M و مكتوبة في النظام العشري .

الحل

1 (أ) بواقي قسمة العدد 3^n على 7 .

نجد : $3^0 \equiv 1[7]$ ، $3^1 \equiv 3[7]$ ، $3^2 \equiv 2[7]$ ، $3^3 \equiv 6[7]$ ، $3^4 \equiv 4[7]$ ، $3^5 \equiv 5[7]$ و $3^6 \equiv 1[7]$

و نلخصها في الجدول التالي :

قيمة العدد الطبيعي n	$6k$	$6k + 1$	$6k + 2$	$6k + 3$	$6k + 4$	$6k + 5$
واقي قسمة العدد 3^n على 7	1	3	2	6	4	5

(ب) نعلم أن : $2020 \equiv 4[7]$ أي : $2020 \equiv -3[7]$ و $1441 \equiv 6[7]$ أي : $1441 \equiv -1[7]$.

إذن : $2020^{1962} \times n + 4 \times 1441^{1954} \equiv 0[7]$ معناه : $(-3)^{1962} \times n + 4 \times (-1)^{1954} \equiv 0[7]$ أي : $3^{1962} \times n + 4 \times 1 \equiv 0[7]$
و منه : $3^6 k \times n + 4 \equiv 0[7]$ أي : $1 \times n + 4 \equiv 0[7]$ و منه : $n \equiv -4[7]$. إذن : $n = 7k + 3$ مع $k \in \mathbb{Z}$

2 أ) لدينا : $N_p = \overbrace{11\dots1}^{\text{pfois}}$ إذن : $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \dots + 10^0$ ونعلم أيضا : $10 \equiv 1[3]$

$N_p = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{\text{pfois}}[3] : \text{و منه}$

إذن يكون : $N_p \equiv p[3]$ هو المطلوب .

(ب) حسب السؤال (أ) لدينا : $N_p \equiv p[3]$

$N_{2020} \equiv 2020[3]$: و منه يکون :

أي : $N_{2020} \equiv 1[3]$. وبالتالي باقي قسمة العدد N_p على 3 هو 1 .

(ج) نعلم أن : $3 \equiv 1[2]$ أي : $3^n \equiv 1[2]$ ومنه : $3^n - 1 \equiv 0[2]$ وبالتالي فإن العدد $(3^n - 1)$ يقبل القسمة على 2 .

(د) نعلم أن : $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \dots + 10^0$ و $10 \equiv 3[7]$ إذن : $N_p \equiv (3^{p-1} + 3^{p-2} + \dots + 1)[7]$

نلاحظ أن $(3^{p-1} + 3^{p-2} + \dots + 1)$ هو عبارة عن مجموع متتالية هندسية أساسها 3 و حدها الأول 1 . ومنه :

$$2N_p \equiv (3^p - 1)[7] : \text{أي } N_p \equiv \left(\frac{3^p - 1}{2}\right)[7] : \text{أي } N_p \equiv \frac{3^p - 1}{3 - 1}[7]$$

- نفرض : $3^p - 1$ يقبل القسمة على 2 ونعلم أن : $3^p - 1$ يقبل القسمة على 2 إذن : $3^p - 1$ يقبل القسمة على 14 أي يكون : $3^p - 1 = 14\alpha$ بالقسمة على 2 نجد : $\frac{3^p - 1}{2} = 7\alpha$ ومنه : $N_p = 7\alpha$. وبالتالي فإن العدد N_p يقبل القسمة على 7 .

- و بالعكس نفرض : N_p يقبل القسمة على 7 أي : $N_p = 7\beta$ أي : $\frac{3^p - 1}{2} = 7\beta$ و منه : $3^p - 1 = 14\beta$ إذن :

النتيجة : العدد N_p يقبل القسمة على 7 إذا وافق إذا كان العدد $3^p - 1$ يقبل القسمة على 7 .

(ه) مما سبق لدينا : $N_{2020} \equiv (\frac{3^{2020}-1}{2})[7]$ أي : $2N_{2020} \equiv (3^{2020}-1)[7]$ و منه : $2N_{2020} \equiv (3^{6k+1}-1)[7]$

أي : $2N_{2020} \equiv (4-1)[7]$ أي : $2N_{2020} \equiv 3[7]$ و منه يكون : $8N_{2020} \equiv 12[7]$ إذن نجد : $N_{2020} \equiv 5[7]$.
وبالتالي باقي قسمة العدد N_{2020} على 7 هو 5 .

3 أ) لدينا : $3x - 7y = 4$ ، نلاحظ أن الثنائية (6,2) هي حل خاص للمعادلة أي : $\begin{cases} 3x - 7y = 4 \\ 3(6) - 7(2) = 4 \end{cases}$ بالطرح نجد :

لدينا : $3(x - 6) = 7(y - 2)$ ، لدينا : 7 يقسم $3(x - 6)$ و 7 أولي مع 3 إذن حسب مبرهنة غوص فإن :
7 يقسم $(x - 6)$

أي يكون : $x - 6 = 7k$ و منه : $x = 7k + 6$ بالتعويض نجد : $y = 3k + 2$.
إذن حلول المعادلة هي : $(x, y) = \{(7k + 6, 3k + 2)\}$ مع $(k \in \mathbb{Z})$.

ب) لدينا الجملة : $\begin{cases} a \equiv 1[3] \\ 2a \equiv 3[7] \end{cases}$ أي : $\begin{cases} a \equiv 1[3] \\ 8a \equiv 12[7] \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} a \equiv 1[3] \\ a \equiv 5[7] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} a = 3u + 1 \\ a = 7v + 5 \end{cases}$ أي : $3u + 1 = 7v + 5$

و بالتالي نجد : $3u - 7v = 4$ و منه : $u = x = 7k + 6$ أي : $a = 3(7k + 6) + 1$ إذن : $a = 21k + 19$ مع $(k \in \mathbb{Z})$

ج) لدينا : $\begin{cases} N_{2020} \equiv 1[3] \\ N_{2020} \equiv 5[7] \end{cases}$ و حسب السؤال السابق يكون : $N_{2020} = 21k + 19$.
إذن باقي قسمة العدد N_{2020} على 21 هو 19 .

لدينا : $M = \overline{abb2a0}$ حيث : $0 < a < 4$ و $0 \leq b < 4$ إذن : $M = a \times 4^5 + b \times 4^4 + b \times 4^3 + 2 \times 4^2 + a \times 4$

أ) لدينا : $M - 4 \equiv 0[7]$ أي : $(a \times 4^5 + b \times 4^4 + b \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 4a) - 4 \equiv 0[7]$ نعلم أن : $4 \equiv -3[7]$

أي يكون : $(a \times (-3)^5 + b \times (-3)^4 + b \times (-3)^3 + 2 \times (-3)^2 + 4a) - 4 \equiv 0[7]$ و منه نجد : $-a \times 5 + 4b - 6b + 4 + 4a - 4 \equiv 0[7]$ أو $a + 2b \equiv 0[7]$

نستعين بالجدول التالي لتعيين قيم a و b :

$a \backslash b$	0	1	2	3
1	1	3	5	0

إذن يكون $a + 2b \equiv 0[7]$

إذا كان : $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$

ب) يكون لدينا : $M = \overline{133210}^4$ أو $M = \overline{322230}^4$

بعد الحساب نجد : $M = 2020$ أو $M = 3756$

التمرين العاشر

1 عين مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث : $4x \equiv 33[5]$

2 أ - حل في Z^2 المعادلة ذات المجهول (x, y) التالية : $4x - 5y = 33 \dots (E)$.

ب - إستنتج حلول الجملة : $\begin{cases} \lambda \equiv 55[5] \\ \lambda \equiv 22[4] \end{cases}$ مع $(\in Z)$.

ج - عين كل الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) و التي تحقق : $|x + y + 3| < 27$.

3 أ - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 11 .

ب - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون : $10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv 0[11]$.

ج - عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة : $\begin{cases} n - 5^n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[5] \end{cases}$.

4 نعتبر n عدد طبيعي يكتب $N = \overline{\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha}$ في نظام التعداد ذو الأساس 4 حيث $\alpha \neq 0$. - عين α و β بحيث يكون N قابلا للقسمة على 33 ، ثم أكتب العدد N في النظام العشري .

الحل

1 لدينا : $4x \equiv 33[5]$ و نعلم أن : $4 \equiv -1[5]$ و $33 \equiv 3[5]$ و منه تصبح : $-x \equiv 3[5]$

أي : $x \equiv -3[5]$ أي : $x \equiv 2[5]$ إذن : $x = 5k + 2$ مع $(k \in \mathbb{Z})$.

2 أ) المعادلة : $4x - 5y = 33$ تكافئ $4x - 33 = 5y$ أي يكون : $4x \equiv 33[5]$ و منه : $x = 5k + 2$.

بالتعويض نجد : $4(5k + 2) - 5y = 33$ أي : $5y = 20k - 25$ و منه : $y = 4k - 5$.

إذن حلول المعادلة هي : $(x, y) = (5k + 2, 4k - 5)$ مع $(k \in \mathbb{Z})$.

ب) لدينا : $\begin{cases} \lambda \equiv 55[5] \\ \lambda \equiv 22[4] \end{cases}$ أي : $5u + 55 = 4v + 22$

أي يكون : $5u - 4v = -33$ و منه : $4v - 5u = 33$

ليكن حسب (أ) يكون : $v = 5k + 2$ و $u = 4k - 5$.

لدينا : $5u + 55 = 5(4k - 5) + 55 = 20k + 30$ و منه : $20k + 30 = 4v + 22$ مع $(k \in \mathbb{Z})$.

ج) الحلول (x, y) ل بحيث $|x + y + 3| < 27$:

لدينا : $\begin{cases} x = 5k + 2 \\ y = 4k - 5 \end{cases}$ أي : $|5k + 2 + 4k - 5 + 3| < 27$

أي : $|9k| < 27$ أي : $|k| < 3$ و منه : $-3 < k < 3$

إذن : $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

و بالتالي : $(x, y) = (-8, -13), (-3, -9), (2, -5), (7, -1), (12, 3)$

3 أ) بواقي قسمة العدد 5^n على 11 .

نجد : $5^0 \equiv 1[11]$ و $5^1 \equiv 5[11]$ ، $5^2 \equiv 3[11]$ ، $5^3 \equiv 4[11]$ ، $5^4 \equiv 9[11]$ ، $5^5 \equiv 1[11]$ ونلخصها في الجدول التالي :

قيم العدد الطبيعي n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
باقي قسمة العدد 5^n على 11	1	5	3	4	9

ب) لنبرهن أن : $10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv 0[11]$.

لدينا : $5n-4 = 5n-5+5-4$ أي : $5n-4 = 5(n-1)+1$ و منه : $5n-4 = 5k+1$.

لدينا : $5n-1 = 5n-5+5-1$ أي : $5n-1 = 5(n-1)+4$ و منه : $5n-1 = 5k+4$.

إذن : $10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv (-1)^{10n} + 5^{5k+1} + 5^{5n+2} + 5^{5n+3} + 5^{5k+4}[11]$.

أي : $10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv 1 + 5 + 3 + 4 + 9[11]$.

أي : .

و منه : $10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv 0[11]$ هو المطلوب .

ج) لدينا : أي :

و منه : $5k+2-3 \equiv 0[11]$ أي : $5k+2-5^{5k+2} \equiv 0[11]$.

أي : $5k \equiv 1[11]$ و منه : $10k \equiv 2[11]$ أي : $-k \equiv 2[11]$ أي : $k \equiv -2[11]$ و منه : $k \equiv 9[11]$.

إذن : $k = 11\alpha + 9$ و نعلم أن : $n = 5k+2$ أي : $n = 5(11\alpha+9)+2$ إذن : $n = 55\alpha + 47$.

4 (4) لدينا : $N = \overline{\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha}^4$.

أي : $(0 < \alpha < 4)$ و $(0 \leq \beta < 4)$.

لدينا : $N = \alpha \times 4^5 + \beta \times 4^4 + \beta \times 4^3 + \alpha \times 4^2 + \beta \times 4 + \alpha$ و نعلم أن : $4 \equiv 1[3]$.

و منه : $N \equiv \alpha + \beta + \beta + \alpha + \beta + \alpha[3]$ أي : $N \equiv 3\alpha + 3\beta[3]$ و منه : $N \equiv 0[3]$.

إذن : N يقبل القسمة على 3 مهما كان α و β وبالتالي يقبل القسمة على 33 إذا قبل القسمة على 11 .

- بواقي قسمة العدد 4^n على 11 : $4^0 \equiv 1[11]$ ، $4^1 \equiv 4[11]$ ، $4^2 \equiv 5[11]$ ، $4^3 \equiv 9[11]$ ، $4^4 \equiv 3[11]$ ، $4^5 \equiv 1[11]$.

إذن : $N \equiv \alpha \times 1 + \beta \times 3 + \beta \times 9 + \alpha \times 5 + \beta \times 4 + \alpha[11]$ أي : $N \equiv 7\alpha + 16\beta[11]$ أي : $N \equiv 7\alpha + 5\beta[11]$.

أي : $N \equiv -4\alpha - 6\beta[11]$ لأن : $\begin{cases} 7 \equiv -4[11] \\ 5 \equiv -6[11] \end{cases}$.

إذن : $N \equiv 0[11]$ معناه : $-4\alpha - 6\beta \equiv 0[11]$ أي : $-4\alpha \equiv 6\beta[11]$ أي : $-2\alpha \equiv 3\beta[11]$ أي : $2\alpha \equiv -3\beta[11]$.

و منه : $2\alpha \equiv 8\beta[11]$ أي : $\alpha \equiv 4\beta[11]$ أي يكون : $\alpha - 4\beta \equiv 0[11]$ بواقي القسمة على

إذن يكون : [11] $\alpha - 4\beta \equiv 0$ إذا كان $\alpha = 1$ و $\beta = 3$. و منه بالتعويض نجد أن :
 $N = 2013$

التمرين الحادي عشر

1 حل في Z^2 المعادلة : $(E) : 3x - 8y = 5$.

2 n ، x و y أعداد صحيحة حيث : $n = 3x + 2$ و $n = 8y + 7$.

• بين أن الثنائية (x, y) حل للمعادلة (E) .

• نعتبر الجملة : $(S) : \begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$. بين أن : $n \equiv 23[24]$.

3 m عدد طبيعي :

• عين باقي قسمة 2^2m على 3 ، و باقي قسمة 7^2m على 8 .

• تحقق أن العدد 1439 حل للجملة (S) .

• ما هو باقي قسمة : 1439^{2018} على 24 ؟ .

الحل

1 المعادلة : $(E) : 3x - 8y = 5$ ، الثنائية $(-1; -1)$ هي حل ظاهر للمعادلة (E) .

x°	0	1	2	3	4	5	6
-----------	---	---	---	---	---	---	---

الآن نبحث عن كل الحلول : لدينا : $\begin{cases} 3x - 8y = 5 \dots\dots (1) \\ 3(-1) - 8(-1) = 5 \dots\dots (2) \end{cases}$ بطرح (1) - (2) نجد :

$3(x+1) - 8(y+1) = 0$ أي : $3(x+1) = 8(y+1)$ ، العدد 8 يقسم $3(x+1)$ و 8 أولي مع 3 ، إذن حسب مبرهنة غوص : 8 يقسم $(x+1)$ أي : $x+1 = 8k$ ، ومنه : $x = 8k - 1$. نعوض قيمة x في $3(x+1) = 8(y+1)$ أي $3(8k) = 8(y+1)$ أي $3k = y+1$ ومنه : $y = 3k - 1$ إذن حلول المعادلة (E) هي : $(x; y) = (8k - 1; 3k - 1)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$:

2 أ) لدينا : $n = 3x + 2$ و $n = 8y + 7$ ، أي : $3x + 2 = 8y + 7$ ، ومنه : $3x - 8y = 5$.

إذن الثنائية $(x; y)$ هي حل للمعادلة (E) .

ب) لدينا الجملة : $(S) : \begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$ ، إذن : $n = 3\alpha + 2$ و $n = 8\beta + 7$ ومنه : $3\alpha + 2 = 8\beta + 7$

أي : $3\alpha - 8\beta = 5$ ، إذن الثنائية $(\alpha; \beta)$ هي حل للمعادلة (E) ،

$$\begin{cases} \alpha = 8k - 1 \\ \beta = 3k - 1 \end{cases} \text{ ومنه :}$$

ولدينا $n = 3x + 2$ بالتعويض نجد : $n = 3(8k - 1) + 2$ أي $n = 24k - 1$ أي : $n \equiv -1[24]$ ، ومنه : $n \equiv 23[24]$ ، وهو المطلوب .

3 أ) تعيين باقي القسمة 2^m على 3 ، وباقي قسمة 7^m على 8 :

لدينا : $2^2m = (2^2)^m = 4^m$ ، ونعلم أنّ : $4 \equiv 1[3]$ أي : $4^m \equiv 1[3]$ ومنه : $2^{2m} \equiv 1[3]$.

لدينا : $7 \equiv -1[8]$ أي : $7^2 \equiv 1[8]$ ، أي : $(7^2)^m \equiv 1[8]$ ومنه : $7^{2m} \equiv 1[8]$.

ب) بقسمة 1439 على كل من 3 و 8 نجد : $\begin{cases} 1439 \equiv 2[3] \\ 1439 \equiv 7[8] \end{cases}$ ومنه 1439 حل للجملة (S) .

ج) لدينا : $\begin{cases} 1439 \equiv 2[3] \\ 1439 \equiv 7[8] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 1439^{2018} \equiv 2^{2018}[3] \\ 1439^{2018} \equiv 7^{2018}[8] \end{cases}$

، ومن السؤال (أ) سيكون لدينا : $2^{2018} \equiv 1[3]$ و $7^{2018} \equiv 1[8]$ ، إذن : $\begin{cases} 1439^{2018} \equiv 1[3] \\ 1439^{2018} \equiv 1[8] \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} 1439^{2018} - 1 \equiv 0[3] \\ 1439^{2018} - 1 \equiv 0[8] \end{cases}$ ، وبما أنّ 3 و 8 أوليان فيما بينهما إذن : $1439^{2018} - 1 \equiv 0[24]$ و منه :

$1439^{2018} \equiv 1[24]$ ، إذن باقي قسمة 1439^{2018} على 24 هو 1 .

التمرين الثاني عشر

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نفرض الأعداد : $a_n = 4 \times 10^n - 1$ ، $b_n = 2 \times 10^n - 1$ ، $c_n = 2 \times 10^n + 1$.

1 أ) أحسب a_n ، b_n و c_n من أجل n يساوي 1 ، 2 و 3 .

ب) ما هو عدد أرقام العددين a_n و c_n ؟

بين أنّ العددين a_n و c_n يقبلان القسمة على 3 .

ج) بين أنّ العدد b_3 أولي .

د) بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $b_n \times c_n = a_{2n}$.

• إستنتج تحليلاً إلى عوامل أولية للعدد a_6 .

هـ) بين أنّ : $PGCD(b_n; c_n) = PGCD(c_n; 2)$. ثمّ إستنتج أنّ b_n و c_n أوليان فيما بينهما .

2 نعتبر في Z^2 المعادلة : $b_3x + c_3y = 1$ (1) .

أ) برّر أنّ المعادلة (1) تقبل على الأقل حلاً .

ب) طبق خوارزمية إقليدس على b_3 و c_3 لإيجاد حلاً خاصاً للمعادلة (1) .

ج) حل في Z^2 المعادلة (1) .

الحل

1 أ

$$\begin{cases} a_3 = 3999 \\ b_3 = 1999 \\ c_3 = 2001 \end{cases} \cdot \begin{cases} a_2 = 399 \\ b_2 = 199 \\ c_2 = 201 \end{cases} \cdot \begin{cases} a_1 = 39 \\ b_1 = 19 \\ c_1 = 21 \end{cases}$$

ب) عدد أرقام a_n و b_n هو: $n+1$.

بما أن: $10 \equiv 1[3]$ إذن: $10^n \equiv 1[3]$ ، ومنه: $4 \times 10^n \equiv 4[3]$ ، أي: $4 \times 10^n \equiv 1[3]$ ، أي: $4 \times 10^n - 1 \equiv 0[3]$ ، ومنه: $a_n \equiv 0[3]$ ، و أيضا بنفس الطريقة: $c_n \equiv 0[3]$.

ج) $b_3 = 1999$ ، $\sqrt{199944,71}$ ، b_3 لا يقبل القسمة على كل الأعداد الأولية الأصغر من 44,71 ، إذن هو أولي .

د) $b_n \times c_n = (2 \times 10^n - 1)(2 \times 10^n + 1)$ ، أي: $b_n \times c_n = (2 \times 10^n)^2 - 1$ ، أي: $b_n \times c_n = 4 \times 10^{2n} - 1$ ، و منه: $b_n \times c_n = a_{2n}$ ، وهو المطلوب .

إستنتاج تحليل للعدد a_6 : $a_6 = b_3 \times c_3$ ، أي: $a_6 = 1999 \times 2001$ ، و منه: $a_6 = 1999 \times 3 \times 23 \times 29$.

ه) نعلم أن: $PGCD(a; b) = PGCD(a; a - b)$ ، إذن: $PGCD(b_n; c_n) = PGCD(c_n; c_n - b_n)$ ، أي:

$PGCD(b_n; c_n) = PGCD(c_n; 2)$ ، لكن العدد c_n فردي ، إذن: $PGCD(c_n; 2) = 1$ ، و منه: $PGCD(b_n; c_n) = 1$.

و منه فإن: b_n و c_n أوليان فيما بينهما .

2 لدينا المعادلة: $b_3x + c_3y = 1 \dots (1)$

أ) بما أن b_3 و c_3 أوليان فيما بينهما ، إذن حسب مبرهنة بيزو المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا .

ب) لدينا: $\begin{cases} 2001 = 1999 \times 1 + 2 \\ 1999 = 999 \times 2 + 1 \end{cases}$ ، إذن: $1999 - 2 \times 999 = 1$ ، أي: $1999 - (2001 - 1999) \times 999 = 1$ ،

أي: $1999 - 999 \times 2001 + 999 \times 1999 = 1$ ، و منه: $1000 \times 1999 - 999 \times 2001 = 1$.

إذن: $(1000; -999)$ حل خاص للمعادلة (1) .

ج) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1): $1999x + 2001y = 1$ ، و لدينا: $1999(1000) + 2001(-999) = 1$ ، بالطرح نجد: $1999(x - 1000) = -2001(y + 999)$ ، $1999(x - 1000) + 2001(y + 999) = 0$.

حسب غوص: $\begin{cases} x = 2001k + 1000 \\ y = -1999k - 999 \end{cases}$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

التمرين الثالث عشر

المتتالية (u_n) معرفة بجدها الأول u_0 حيث: $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n + 6$.

1 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n = 9 \times 2^n - 6$.

2 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن u_n يقبل القسمة على 6 .

3 نعرف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = \frac{u_n}{6}$.

نعتبر التصريح التالي : " من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : v_n عدد أولي " .
- اذكر إذا كان هذا التصريح صحيحا أو خاطئا ، مبررا إجابتك .

4 أ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $v_{n+1} - 2v_n = 1$.

ب - ماذا تستنتج بالنسبة للعدد v_n و v_{n+1} ؟

ج - استنتج من أجل كل $n \geq 1$: $PGCD(u_n, u_{n+1})$.

الحل

1 نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ الخاصية $P(n)$ حيث : $P(n) : u_n = 9 \times 2^n - 6$. نتحقق من صحة $P(n)$

من أجل $n=0$ أي : $u_0 = 9 - 6$ و منه : $u_0 = 3$ (محققة) .

نفرض صحة $P(n)$ من أجل n كفي أي : $u_n = 9 \times 2^n - 6$ ، ثم نثبت صحتها من أجل $n+1$ أي : $u_{n+1} = 9 \times 2^{n+1} - 6$.

لدينا : $u_{n+1} = 2u_n + 6$ ولدينا فرضا : $u_n = 9 \times 2^n - 6$ أي : $u_{n+1} = 2(9 \times 2^n - 6) + 6$: $u_{n+1} = 9 \times 2^{n+1} - 12 + 6$: $u_{n+1} = 9 \times 2^{n+1} - 6$ و منه : $u_{n+1} = 9 \times 2^{n+1} - 6$. إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n = 9 \times 2^n - 6$.

2 حسب ما سبق لدينا : $u_n = 9 \times 2^n - 6$ أي : $u_n = 9 \times 2 \times 2^{n-1} - 6$ أي : $u_n = 18 \times 2^{n-1} - 6$ و منه : $u_n = 6(3 \times 2^{n-1} - 1)$.

إذن : العدد u_n يقبل القسمة على 6 و ذلك من أجل كل $n \geq 1$.

3 لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \frac{u_n}{6}$ أي : $v_n = \frac{6(3 \times 2^{n-1} - 1)}{6}$ و منه : $v_n = 3 \times 2^{n-1} - 1$.

- نلاحظ أنه من أجل القيم : 1, 3, 4, 5 ل n يكون v_n أولي لكن لما : $n=6$ يصبح : $v_n = 95$ هذا الأخير غير أولي
إذن : التصريح خاطئ .

4 أ - من أجل كل $n \geq 1$ لدينا : $v_{n+1} - 2v_n = 3 \times 2^{(n+1)-1} - 1 - 2(3 \times 2^n - 1)$ أي : $v_{n+1} - 2v_n = 3 \times 2^n - 1 - 3 \times 2^n + 2$: $v_{n+1} - 2v_n = 1$ و منه : $v_{n+1} - 2v_n = 1$ هو المطلوب .

ب - نستنتج حسب مبرهنة بيزو أن العددين : v_n و v_{n+1} أوليان فيما بينهما .

ج - من أجل كل $n \geq 1$ لدينا : $v_n = \frac{u_n}{6}$ أي : $u_n = 6v_n$ و $u_{n+1} = 6v_{n+1}$ ، و بما أن العددين v_n و v_{n+1} أوليان فيما بينهما فإن : $PGCD(u_n, u_{n+1}) = 6$.

التمرين الرابع عشر

ليكن P عددا أوليا أكبر من أو يساوي 7 .
نريد في هذا التمرين البرهنة على أن العدد $n = P^4 - 1$ يقبل القسمة على 240 .

1 أ) بين أن : $P \equiv 1[3]$ أو $P \equiv -1[3]$.

ب) إستنتج أن العدد n يقبل القسمة على 3 .

2 أ) بملاحظة أن P عدد فردي بين أنه يوجد عدد طبيعي k حيث : $P^2 - 1 = 4k(k+1)$.

ب) إستنتج أن العدد n يقبل القسمة على 16 .

3 بين أن 5 قاسم للعدد n .

4 نعتبر a, b و c أعداد طبيعية .

أ) برهن أنه إذا كان c قابلا للقسمة على a و b مع هذين الأخيرين أوليان فيما بينهما فإن c يقبل القسمة على $a \times b$.

ب) إستنتج مما سبق أن العدد n يقبل القسمة على 240 .

5 (5) هل توجد أعداد أولية : $P_1, P_2, \dots, P_{15}$ كلها أكبر من أو تساوي 7 بحيث يكون العدد :

$$A = P_1^4 + P_2^4 + \dots + P_{15}^4$$

أولياً ؟

الحل

1 أ) بما أن P عدد أولي أكبر من أو يساوي 7 إذن P لا يقبل القسمة على 3 أي أن باقي قسمة P على 3 هو :

1 أو 2 أي يكون : $P \equiv 1[3]$ أو $P \equiv 2[3]$ و منه : $P \equiv -1[3]$ هو المطلوب .

ب) بما أن : $P \equiv 1[3]$ أو $P \equiv -1[3]$ فإن : $P^4 \equiv 1[3]$ و منه : $P^4 - 1 \equiv 0[3]$ أي : $n \equiv 0[3]$.

إذن n يقبل القسمة على 3 .

2 أ) بما أن P عدد فردي فإن : $P = 2k+1$ مع $(k \in \mathbb{N})$ أي : $P^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ و منه يكون :

$$P^2 - 1 = 4k^2 + 4k$$

إذن نجد : $P^2 - 1 = 4k(k+1)$ هو المطلوب .

ب) نعلم أن الجداء $k(k+1)$ زوجي إذن : $k(k+1) = 2\alpha$ أي : $P^2 - 1 = 4 \times 2\alpha$ و منه : $P^2 = 8\alpha + 1$.

$$P^4 = (8\alpha + 1)^2 = 64\alpha^2 + 16\alpha + 1$$

أي : $P^4 - 1 = 64\alpha^2 + 16\alpha$ و منه : $n = 16(4\alpha^2 + \alpha)$.

إذن n يقبل القسمة على 16 .

(3) نعلم أن العدد P لا يقبل القسمة على 5 إذن : $P \equiv 1[5]$ أو $P \equiv 2[5]$

أي : $P^4 \equiv 1[5]$ أو $P^4 \equiv 16[5]$

أي : $P^4 \equiv 1[5]$ و منه : $P^4 - 1 \equiv 0[5]$ أي : $n \equiv 0[5]$ و بالتالي فإن 5 قاسم للعدد n .

3 أ) نفرض c يقبل القسمة على كل من a و b أي يكون : $c = k \cdot a$ و $c = k' \cdot b$ و منه : $k \cdot a = k' \cdot b$.

لكن : a و b أوليان فيما بينهما ، إذن : نستخدم مبرهنة غوص .

لدينا : b يقسم $k \cdot a$ و b أولي مع a ، إذن : b يقسم k و بالتالي : $k = \alpha \times b$.

لدينا : $c = k \cdot a$ أي : $c = \alpha \times b \times a$ و منه : c يقبل القسمة على الجداء $a \times b$.

ب) لدينا : n يقبل القسمة على 3 و على 5 و هما أوليان فيما بينهما ، إذن : n يقبل القسمة على 3×5 أي على 15

و من جهة أخرى لدينا : n يقبل القسمة على 16 الذي هو أولي مع 15 و بالتالي فإن : n يقبل القسمة على

15×16 ، إذن : n يقبل القسمة على 240 .

4 بما أن الأعداد : $P_1 P_2 \dots P_{15}$ أولية و أكبر من أو تساوي 7 إذن يكون :

$$\begin{cases} P_1^4 - 1 \equiv 0[240] \\ P_2^4 - 1 \equiv 0[240] \\ \vdots \\ P_{15}^4 - 1 \equiv 0[240] \end{cases}$$

بالجمع نجد : $P_1^4 + P_2^4 + \dots + P_{15}^4 - 15 \equiv 0[240]$

أي : $A - 15 \equiv 0[240]$ أي : $A - 15 = 240\beta$ و منه : $A = 240\beta + 15$ أي : $A = 15(16\beta + 1)$

إذن : العدد A ليس أوليا و بالتالي لا توجد الأعداد $P_1, P_2, \dots, P_{15}$.

التمرين الخامس عشر

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E) : 2019x - 2018y = 5$.

1 بين أن الثنائيات (x, y) هي حل للمعادلة (E) إذا كان : $\begin{cases} x = 5 + 2018k \\ y = 5 + 2019k \end{cases}$ مع $(k \in \mathbb{Z})$.

2 n عدد طبيعي غير معدوم ، نضع :

$$a_n = 5 + 2018^{n+1} \text{ و } b_n = 5 + 2019 \times 2018^n$$

أ - بين أن كل قاسم مشترك لـ a_n و b_n هو قاسم لـ 5 .

ب - استنتج أن : $\text{PGCD}(a_n, b_n) = 1$.

ج - نقبل أن : $a_n^4 \equiv 1[5]$ و $b_n^4 \equiv 1[5]$ ، استنتج عندئذ أن 25 يقسم $(a_n^4 - 1)(b_n^4 - 1)$.

د - عين رقمي الآحاد والعشرات للجداء $(a_n^4 - 1)(b_n^4 - 1)$.

3 نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة $z^{2015} \equiv 101[2019]$ (F) و ليكن z هو حل للمعادلة (F) .

أ - بين أن : $PGCD(z, 2019) = 1$ ، ثم استنتج أن : $z^{2016} \equiv 1[2019]$ (لاحظ أن : $2019 = 3 \times 673$) .

ب - بين أن : $101z \equiv 1[2019]$.

ج - عين مجموعة حلول المعادلة (E) .

الحل

لدينا : $2019x - 2018y = 5$ (E) .

1 الثنائيات (x, y) حل للمعادلة (E) تكافئ : $2019x - 2018y = 5$ تكافئ : $2019x - 2018y = 5(2019 - 2018)$

تكافئ : $2019(x - 5) = 2018(y - 5)$: $2019(x - 5) = 2018(y - 5)$ تكافئ : $2019(x - 5) = 2018(y - 5)$

إذن : 2019 يقسم $2018(y - 5)$ ، 2019 و 2018 أوليان فيما بينهما ، حسب مبرهنة غوص فإن :

2019 يقسم $(y - 5)$ أي : $y - 5 = 2019k$ و منه : $y = 2019k + 5$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

بالتعويض نجد : 2019 $(x - 5) = 2018(2019k + 5 - 5)$ أي : $x - 5 = 2018k$.

و منه : $x = 2018k + 5$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{(2018k + 5, 2019k + 5)\}$.

2 لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = 5 + 2018^{n+1}$ و $b_n = 5 + 2019 \times 2018^n$.

أ - نضع $PGCD(a_n, b_n) = d$ إذن : d/a_n و d/b_n إذن : $d/2019a_n - 2018b_n$ و منه : $d/5$.

ب - حسب ما سبق وجدنا أن كل قاسم مشترك للعددين a_n و b_n هو قاسم لـ 5 إذن قيم d هي : 1 و 5 .

لدينا : 5 أولي و 5 لا يقسم 2018 إذن : 5 يقسم 5 ولا يقسم 2018^{n+1} .

و منه : 5 لا يقسم $(5 + 2018^{n+1})$

إذن : 5 ليس قاسما لـ a_n أي أن : $PGCD(a_n, b_n) \neq 5$ و بالتالي فإن : $PGCD(a_n, b_n) = 1$.

ج - لدينا : $\begin{cases} a_n^4 \equiv 1[5] \\ b_n^4 \equiv 1[5] \end{cases}$ أي : $\begin{cases} a_n^4 - 1 \equiv 0[5] \\ b_n^4 - 1 \equiv 0[5] \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} a_n^4 - 1 = 5k; k \in \mathbb{Z} \\ b_n^4 - 1 = 5k'; k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$

إذن : $(a_n^4 - 1)(b_n^4 - 1) = 25kk'$

و بالتالي فإن : 25 يقسم $(a_n^4 - 1)(b_n^4 - 1)$.

د - لدينا : $(a_n^4 - 1) = (a_n^2 - 1)(a_n^2 + 1) = (a_n - 1)(a_n + 1)(a_n^2 + 1)$.

نعلم أن : $a_n = 5 + 2018^{n+1}$

أي أن a_n فردي و بالتالي فإن : $(a_n - 1)$ و $(a_n + 1)$ زوجيان و منه :

$$\begin{cases} a_n - 1 = 2p, p \in \mathbb{Z} \\ a_n + 1 = 2p', p' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

أي : $(a_n - 1)(a_n + 1) = 4pp'$ أي : $(a_n - 1)(a_n + 1)(a_n^2 + 1) = 4pp'(a_n^2 + 1)$ إذن : $(a_n^4 - 1)$ مضاعف لـ 4 .

و بالتالي فإن : $(a_n^4 - 1)(b_n^4 - 1) \equiv 0[4]$ أي أن : $(a_n^4 - 1)(b_n^4 - 1) \equiv 0[4]$.

لدينا : $\begin{cases} (a_n^4 - 1)(b_n^4 - 1) \equiv 0[4] \\ (a_n^4 - 1)(b_n^4 - 1) \equiv 0[25] \end{cases}$ مع 4 و 25 أوليان فيما بينهما ،

إذن : $(a_n^4 - 1)(b_n^4 - 1) \equiv 0[100]$.

و منه : رقمي الآحاد والعشرات للعدد $(a_n^4 - 1)(b_n^4 - 1)$ هما 0 .

لدينا : $z^{2015} \equiv 101[2019] : (F)$ **3**

أ - نضع : $PGCD(z, 2019) = d$ ، لدينا : $z^{2015} \equiv 101[2019]$

معناه : $z^{2015} = 2019k + 101$ أي : $z^{2015} - 2019k = 101$

نعلم أن : d/z و $d/2019$ و بالتالي : $d/(z^{2015} - 2019k)$ إذن : $d/101$ و منه : $d \in \{1, 101\}$. نعلم أن 101

(أولي) ليس قاسما لـ 2019 أي أن : $PGCD(z, 2019) \neq 101$ و بالتالي : $PGCD(z, 2019) = 1$.