

تمرين شامل

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

A, B, C و D نقط من المستوي حيث : $A(1;1)$ و $B(2;-2)$ و $C(2;0)$ و $D\left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

1. النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ و النقطة J مركز ثقل المثلث ABC .

أ) أنشئ I ثم أنشئ J بطريقتين. ب) عين احداثي كل من I و J .

ج) عين مجموعة النقط M من المستوي حيث $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$.

2. النقطة K مرجح الجملة $\{(A, -1); (B, 3)\}$ و النقطة G مرجح $\{(A, -1); (B, 3); (C, 2)\}$ و F تحقق $-\vec{FA} + 2\vec{FC} = \vec{0}$.

أ) في نفس المعلم : مثل النقط C, B, A أنشئ K ، عرف F ثم أنشئها.

ب) بين دون حساب أن النقط G, K, C على استقامية ثم تحقق من ذلك حسابيا.

ج) بين دون حساب أن G مرجح F و B بمعاملين يطلب تعيينهما ثم تحقق من ذلك حسابيا.

د) استنتج أن G تقاطع المستقيمين (KB) و (FC) .

هـ) عين مجموعة النقط M من المستوي حيث $\|-\vec{MA} + 3\vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 4\|-\vec{MA} + 2\vec{MC}\|$.

3. نقطة E من المستوي تحقق $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AB}$.

أ) بين أن E مرجح A و B بمعاملين يطلب تعيينهما و أن A مرجح E و B بمعاملين يطلب تعيينهما.

4. لتكن G_α مرجح للجملة $\{(A, \alpha); (B, \alpha+1)\}$ حيث α عدد حقيقي.

أ) عين قيم α حتى يكون G_α موجودا.

ب) استنتج قيم α حتى تكون النقط G_α, B, A على استقامية.

ج) هل توجد قيم α حيث G_α منتصف $[AB]$.

د) عين قيمة α حتى تكون G_α تنتمي إلى محور الترتيب.

هـ) عين قيمة α حتى تكون G_α تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$.

و) أنشئ G_2 .

ي) عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث $\|2\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = 5\sqrt{2}$ - بين أن D تنتمي إلى (E) .

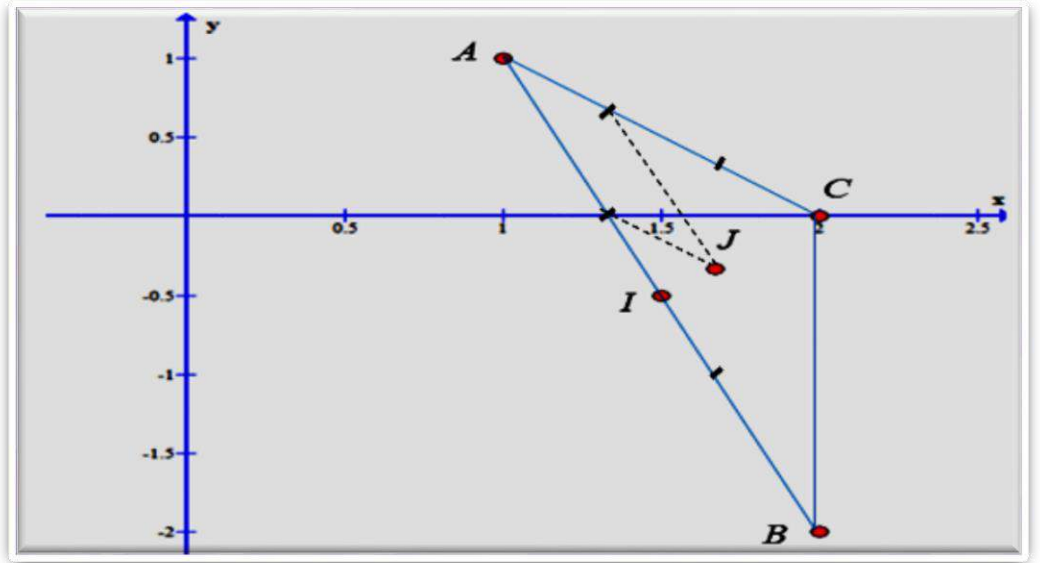
حل التمرين

(أ) أنشئ I

I منتصف القطعة $[AB]$ أي I مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1)\}$ معناه $\vec{AI} = \frac{1}{2} \vec{AB}$.

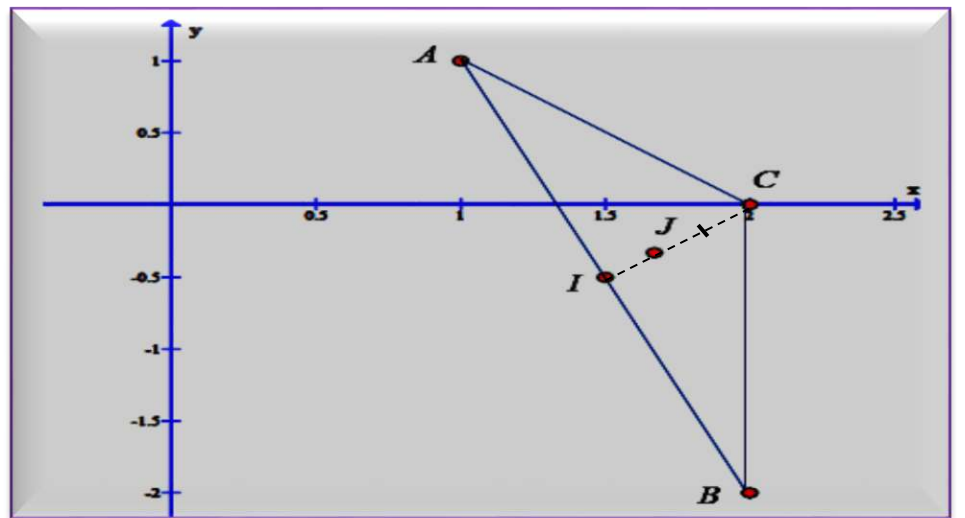
ثم أنشئ J بطريقتين.

طريقة 1: J مركز ثقل المثلث ABC أي J مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$ معناه $\vec{AJ} = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC}$.



طريقة 2: أي J مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$ و I مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1)\}$ و منه حسب خاصية التجميع فإن

J مرجح الجملة $\{(I,2);(C,1)\}$ معناه $\vec{IJ} = \frac{1}{3} \vec{IC}$. يمكن كذلك حساب إحداثيي J كطريقة ثالثة.



(ب) عين إحداثيي كل من I و J .

$$J\left(\frac{5}{2}; \frac{-1}{2}\right) \quad , \quad I\left(\frac{3}{2}; \frac{-1}{2}\right) \quad \begin{cases} x_J = \frac{x_A + x_B + x_C}{2} = \frac{1+2+2}{2} = \frac{5}{2} \\ y_J = \frac{y_A + y_B + y_C}{2} = \frac{1-2+2}{2} = \frac{-1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1-2}{2} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

(ج) عين مجموعة النقط M من المستوى حيث $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$ **:-**

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\| \Rightarrow \|3\vec{MJ}\| = \|\vec{MA} - \vec{MA} - \vec{AB}\| \Rightarrow \|3\vec{MJ}\| = \|-\vec{AB}\| \Rightarrow 3MJ = AB$$

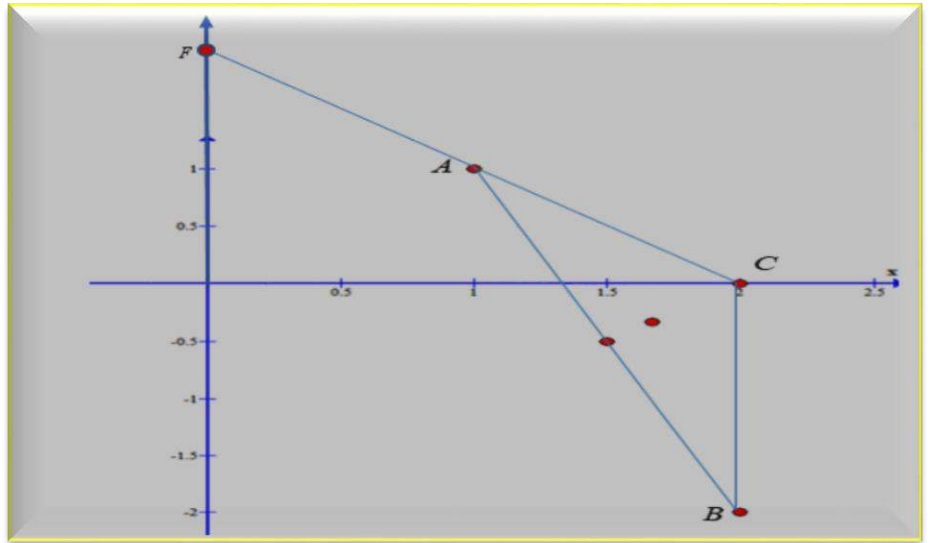
$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$3MJ = \sqrt{10} \Rightarrow MJ = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها J و نصف قطرها $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

2.أ) في نفس المعلم : مثل النقط C, B, A ، أنشئ K ، عرف F ثم أنشئها .

$\vec{FA} + 2\vec{FC} = \vec{0}$ و لدينا $-1 + 2 \neq 0$ ، F مرجح الجملة $\{(A, -1); (C, 2)\}$ و منه $\vec{AF} = -\vec{AC}$.



(ب) بين دون حساب أن النقط G, K, C على استقامية :

لدينا G مرجح $\{(A, -1); (B, 3); (C, 2)\}$ و K مرجح الجملة $\{(A, -1); (B, 3)\}$ و منه حسب خاصية التجميع فإن G مرجح $\{(K, -1+3); (C, 2)\}$ أي G مرجح $\{(K, 2); (C, 2)\}$. اذن النقط G, K, C على استقامية .

ثم تحقق من ذلك حسابيا .

لدينا G مرجح $\{(A, -1); (B, 3); (C, 2)\}$ معناه $-\vec{GA} + 3\vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0}$ و منه

$$-\vec{GA} + 3\vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow -(\vec{GK} + \vec{KA}) + 3(\vec{GK} + \vec{KB}) + 2\vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow -\vec{GK} - \vec{KA} + 3\vec{GK} + 3\vec{KB} + 2\vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow 2\vec{GK} - \vec{KA} + 3\vec{KB} + 2\vec{GC} = \vec{0}$$

$2\vec{GK} + 2\vec{GC} = \vec{0}$ و منه $\vec{GK} = -\vec{GC}$ اذن الشعاعان $\vec{GK}$ و $\vec{GC}$ مرتبطان خطيا و النقط G, K, C على استقامية .

(ج) بين دون حساب أن G مرجح F و B بمعاملين يطلب تعيينهما ثم تحقق من ذلك حسابيا .

لدينا G مرجح $\{(A, -1); (B, 3); (C, 2)\}$ و F مرجح الجملة $\{(A, -1); (C, 2)\}$ و منه حسب خاصية التجميع فإن G مرجح $\{(F, -1+2); (B, 3)\}$ أي G مرجح $\{(F, 1); (B, 3)\}$.

ثم تحقق من ذلك حسابيا .

لدينا G مرجح $\{(A, -1); (B, 3); (C, 2)\}$ معناه $-\vec{GA} + 3\vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0}$ و منه

$$-\vec{GA} + 3\vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow -(\vec{GF} + \vec{FA}) + 3\vec{GB} + 2(\vec{GF} + \vec{FC}) = \vec{0} \Rightarrow -\vec{GF} - \vec{FA} + 3\vec{GB} + 2\vec{GF} + 2\vec{FC} = \vec{0} \Rightarrow \vec{GF} - \vec{FA} + 3\vec{GB} + 2\vec{FC} = \vec{0}$$

$\vec{GF} - \vec{FA} + 3\vec{GB} + 2\vec{FC} = \vec{0}$ و بما أن $-\vec{FA} + 2\vec{FC} = \vec{0}$ فان $3\vec{GB} + \vec{GF} = \vec{0}$ أي G مرجح $\{(F, 1); (B, 3)\}$.

(د) استنتج أن G تقاطع المستقيمين (KC) و (FB) .

النقط G, K, C على استقامية معناه $G \in (KC)$ (1)

G مرجح $\{(F,1);(B,3)\}$ معناه $G \in (FB)$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن G هي تقاطع المستقيمين (KC) و (FB) .

(هـ) عين مجموعة النقط M من المستوي حيث $\|-\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}\|$

$$\|-\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}\| \Rightarrow \|4\overrightarrow{MG}\| = 4\|\overrightarrow{MF}\| \Rightarrow 4MG = 4MF \Rightarrow MG = MF$$

مجموعة النقط M هي محور القطعة $[GF]$.

3. نقطة من المستوي تحقق $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

(أ) بين أن E مرجح A و B بمعاملين يطلب تعيينهما

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow 3\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow 3\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} \Rightarrow 3\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{EB} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{EB} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$$

$2 + 1 \neq 0$ إذن E مرجح A و B بالمعاملين 2 و 1 على الترتيب .

و أن A مرجح E و B بمعاملين يطلب تعيينهما .

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow 3\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow 3\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$3 - 1 \neq 0$ إذن A مرجح E و B بالمعاملين 3 و -1 على الترتيب .

4. لتكن G_α مرجح للجملة $\{(A,\alpha);(B,\alpha+1)\}$ حيث α عدد حقيقي .

(أ) عين قيم α حتى يكون G_α موجودا .

$$G_\alpha \text{ موجود معناه } \alpha + \alpha + 1 \neq 0 \text{ و منه } \alpha \neq -\frac{1}{2} \text{ أي } \alpha \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} .$$

(ب) استنتج قيم α حتى تكون النقط G_α, B, A على استقامية .

$$\text{النقط } G_\alpha, B, A \text{ على استقامية معناه } G_\alpha \text{ مرجح } A \text{ و } B \text{ موجود أي } \alpha \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} .$$

(ج) هل توجد قيم α حيث G_α منتصف $[AB]$.

G_α منتصف $[AB]$ معناه $\alpha = \alpha + 1$ و منه $0 = 1$ و هذا مستحيل إذن لا توجد قيم α حيث G_α منتصف $[AB]$.

(د) عين قيمة α حتى تكون G_α تنتمي إلى محور الترتيب .

$$G_\alpha \text{ تنتمي إلى محور الترتيب معناه } x_{G_\alpha} = 0 \text{ و } \alpha \neq -\frac{1}{2} , \begin{cases} x_{G_\alpha} = \frac{1 \times \alpha + 2(\alpha + 1)}{2\alpha + 1} = \frac{3\alpha + 2}{2\alpha + 1} \\ y_{G_\alpha} = \frac{1 \times \alpha - 2(\alpha + 1)}{2\alpha + 1} = \frac{-\alpha - 2}{2\alpha + 1} \end{cases}$$

$$x_{G_\alpha} = 0 \text{ معناه } 3\alpha + 2 = 0 \text{ و منه } \alpha = -\frac{2}{3} .$$

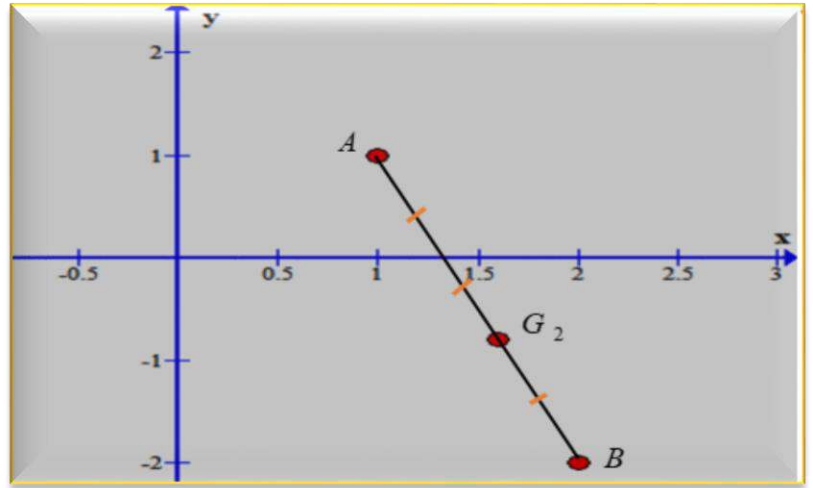
(هـ) عين قيمة α حتى تكون G_α تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$.

G_α تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y_{G_\alpha} = 2x_{G_\alpha}$ و $\alpha \neq -\frac{1}{2}$.

$$y_{G_\alpha} = 2x_{G_\alpha} \Rightarrow \frac{-\alpha - 2}{2\alpha + 1} = 2 \frac{3\alpha + 2}{2\alpha + 1} \Rightarrow -\alpha - 2 = 2(3\alpha + 2) \Rightarrow 5\alpha = -6 \Rightarrow \alpha = -\frac{6}{5}$$

(و) أنشئ G_2 .

G_2 مرجح للجملة $\{(A, 2); (B, 3)\}$ معناه $\overline{AG_2} = \frac{3}{5} \overline{AB}$.



(ي) عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث $\|2\overline{MA} + 3\overline{MB}\| = 5\sqrt{2}$.

$$\|2\overline{MA} + 3\overline{MB}\| = 5\sqrt{2} \Rightarrow \|5\overline{MG_2}\| = 5\sqrt{2} \Rightarrow 5MG_2 = 5\sqrt{2} \Rightarrow MG_2 = \sqrt{2}$$

المجموعة (E) هي الدائرة التي مركزها G_2 و نصف قطرها $\sqrt{2}$.

- بين أن D تنتمي إلى (E).

$$\text{نتحقق أن } DG_2 = \sqrt{2} \text{ ، } \begin{cases} x_{G_2} = \frac{8}{5} \\ y_{G_2} = -\frac{4}{5} \end{cases} \text{ و } D\left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right) \text{ ، } DG_2 = \sqrt{\left(\frac{8}{5} - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{2} \text{ ، إذن } D \text{ تنتمي إلى } (E) .$$

