

الاختبار الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول (04 نقاط) :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ و $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n}$

1. -برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$

ب-أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة

ج-إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ فبين أن l يحقق $(l-2)^2 = 0$ ثم عين قيمته

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$

أ - بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ - يطلب تعيين حدها الأول

ب -أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3. نضع $S_n = \frac{1}{e^{2v_0}} + \frac{1}{e^{2v_1}} + \dots + \frac{1}{e^{2v_n}}$ أوجد المجموع S_n بدلالة n

التمرين الثاني (04 نقاط) :

ليكن العدد الطبيعي n

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 11

2. عين باقي قسمة العدد 2007^{22} على 11

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $a = 2n + 5$ و $b = n - 3$

أ - بين أن كل قاسم مشترك للعددين a ; b هو قاسم للعدد 11

ب -عين حسب قيم العدد الطبيعي n العدد $PGCD(b; a)$

ج - أستنتج $PGCD(2007^{22} - 3; 2 \times 2007^{22} + 5)$

4. نضع $n \geq 4$: و لتكن المعادلة $(E) : x^2 + 9 = 2^n$ نفرض أنها تقبل حل نرمز له بالرمز α

أ - بين أن $\alpha \equiv 1[2]$

ب -أستنتج أن $\alpha^2 + 9 \equiv 2[4]$

ج - بين أن المعادلة (E) لا تقبل حلول في $\mathbb{Z}$.

التمرين الثالث (05 نقاط) :

I - (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_n = \int_{-1}^1 \left(\frac{2|x|}{3} + \frac{e^{-2n|x|}}{3} \right) dx$.

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n > 0$.

2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = 2 \int_0^1 \left(\frac{2x}{3} + \frac{e^{-2nx}}{3} \right) dx$.

3. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - e^{2x}) \cdot e^{-2(n+1)x} dx$.

4. أستنتج إشارة $u_{n+1} - u_n$ ثم أستنتج أن المتتالية متقاربة.

5. أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

II - نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $v_n = 2n \cdot u_n$.

و المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $w_n = v_n - \frac{4n}{3} - \frac{2}{3}$.

1. أكتب كل من u_n و w_n بدلالة n .

2. بين أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . لاى

3. نضع $S_n = w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n$ و $S_n' = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$ و أحسب المجموعين كل من بدلالة n .

التمرين الرابع (07 نقاط) :

I - g دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = x - 1 - \ln(x)$.

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ ثم ادرس اتجاه تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

2. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

3. أستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً x : $\ln\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{x}{2} - 1$.

II - f دالة عددية معرفة على $[0; +\infty[$ بـ $\begin{cases} f(x) = -x^2 + 2 + 2x \ln(x) & : x > 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$.

و (C_f) تمثيلها بياني في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$.

1. أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ماذا تستنتج ؟

ب- بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = -\infty$ ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بياناً .

ج- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $f'(x) = -2g(x)$.

ب- أدرس إشارة $f'(x)$ على $]0; +\infty[$ ثم أستنتج اتجاه تغيرات الدالة f مستنتجاً أن (C_f) يقلل نقطة انعطاف $A(1;1)$.

ج- أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2.

د- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً x : $f(x) + 2(1 - \ln 2)x - 2 = 2x \left[-\frac{x}{2} + 1 + \ln\left(\frac{x}{2}\right) \right]$ ثم أستنتج وضعية

المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $2,7 < \alpha < 2,8$ ثم أنشئ (Δ) و (C_f)

4. h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$: $\begin{cases} h(x) = -x^2 + 2 + 2|x|\ln(|x|) : x \neq 0 \\ h(0) = 2 \end{cases}$

و (C) تمثيلها بياني في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$

أ - بين أن h دالة زوجية

ب - أنشئ (C_h) انطلاقاً من (C_f) في نفس المعلم السابق

الأستاذ جواليل أحمد - بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2024

التمرين الأول (04 نقاط) :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ و $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n}$

1. أ- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$:

$u_0 < 2$ محققة

نفرض أن $u_n < 2$ ولنبرهن أن $u_{n+1} < 2$

$u_n < 2$ بالضرب في -1 نجد $-u_n > -2$ بإضافة 4 نجد $4 - u_n > 2$ بالقلب $\frac{4}{4-u_n} < \frac{1}{2}$ بالضرب في 4 نجد

$$u_{n+1} < 2 \text{ أي أن } \frac{4}{4-u_n} < 2$$

و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$

ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{4-u_n} - u_n = \frac{4-4u_n+u_n^2}{4-u_n} = \frac{(2-u_n)^2}{4-u_n}$

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$ نستنتج أن الفرق عدد موجب و منه المتتالية (u_n) متزايدة
استنتاج أنها متقاربة : (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة .

ج- إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ فبين أن l يحقق $(l-2)^2 = 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ و $u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n}$ و $u_n < 2$ يعني أن

$$l = \frac{4}{4-l} \text{ أي أن } 4l - l^2 = 4 \text{ و منه } l^2 - 4l + 4 = 0 \text{ أي أن } (l-2)^2 = 0$$

تعيين قيمة l : $(l-2)^2 = 0$ يعني أن $l = 2$

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$:

ج - إثبات أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $-\frac{1}{2}$ - يطلب تعيين حدها الأول :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 2} = \frac{1}{\frac{4}{4-u_n} - 2} = \frac{4-u_n}{4-8+2u_n} = \frac{4-u_n}{-4+2u_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{4-u_n}{-4+2u_n} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{4-u_n-2}{2u_n-4} = \frac{-(u_n-2)}{2(u_n-2)} = -\frac{1}{2}$$

$$v_0 = \frac{1}{u_0 - 2} = -1 \text{ حدها الأول}$$

د - كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتاج u_n بدلالة n : $v_n = -1 - \frac{1}{2}n$

لدينا $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ و منه $u_n - 2 = \frac{1}{v_n}$ أي أن $u_n = 2 + \frac{1}{v_n}$ أي $u_n = 2 + \frac{1}{-\frac{1}{2}n-1}$ إذن $u_n = \frac{-n-1}{-\frac{1}{2}n-1}$ و منه

$$u_n = \frac{2n+2}{n+2}$$

3. نضع $S_n = \frac{1}{e^{2v_0}} + \frac{1}{e^{2v_1}} + \dots + \frac{1}{e^{2v_n}}$ حساب المجموع S_n بدلالة n :

$$S_n = \frac{1}{e^{2v_0}} \left[\frac{1-e^{n+1}}{1-e} \right] = e^2 \left[\frac{1-e^{n+1}}{1-e} \right] \text{ و هي متتالية هندسية أساسها } e \text{ و منه } \frac{1}{e^{2v_n}} = \frac{1}{e^{2\left(-\frac{1}{2}n-1\right)}} = e^{n+2}$$

التمرين الثاني (04 نقاط) :

ليكن العدد الطبيعي n

1. الدراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 11 :

$n =$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$	$k \in \mathbb{N}$
$5^n \equiv$	1	5	3	4	9	[11]

2. تعيين باقي قسمة العدد 2007^{22} على 11 : $2007 \equiv 5[11]$ يكافئ $2007^{22} \equiv 5^{22}[11]$ و $22 = 2 \times 5 + 2$ حسب الجدول

السابق نستنتج أن $2007^{22} \equiv 3[11]$

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $a = 2n+5$ و $b = n-3$

أ - اثبات أن كل قاسم مشترك للعددين a ; b هو قاسم للعدد 11 : لدينا $a - 2b = 2n+5 - 2(n-3) = 11$

إذا كان d قاسم مشترك للعددين a ; b فهو قاسم للعدد 11 .

ب - نعين حسب قيم العدد الطبيعي n العدد $PGCD(b; a)$:

لما $PGCD(b; a) = 11$ يعني أن $\begin{cases} 2n+5 \equiv 0[11] \\ n-3 \equiv 0[11] \end{cases}$ بالطرح نجد $n+8 \equiv 0[11]$ يكافئ $n \equiv -8[11]$ يعني أن $n \equiv 3[11]$ أي $n = 11k+3$ و k عدد طبيعي .

لما $PGCD(b; a) = 1$ يعني أن $n \neq 11k+3$ و k عدد طبيعي .

ج - استنتاج $PGCD(2007^{22}-3; 2 \times 2007^{22}+5)$:

لما نضع $n = 2007^{22}$ نجد $a = 2 \times 2007^{22}+5$ و $b = 2007^{22}-3$

بما أن $2007^{22} \equiv 3[11]$ يعني أن $2007^{22} = 11k'+3$ و k' عدد طبيعي و منه $PGCD(2007^{22}-3; 2 \times 2007^{22}+5) = 11$

4. نضع $n \geq 4$: و لتكن المعادلة (E) $x^2 + 9 = 2^n$ نفرض أنها تقبل حل نرمز له بالرمز α

أ - إثبات أن $\alpha \equiv 1[2]$: $\alpha^2 + 9 = 2^n$ يعني أن $\alpha^2 + 9 \equiv 0[2]$ أي أن $\alpha^2 \equiv -9[2]$ أي $\alpha^2 \equiv 1[2]$ يكافئ أن $\alpha \equiv 1[2]$

ب - استنتاج أن $\alpha^2 + 9 \equiv 2[4]$: $\alpha \equiv 1[2]$ يعني أن $\alpha = 1+2k$ و k عدد صحيح بالتربيع نجد $\alpha^2 = 1+4k+4k^2$ أي أن

$\alpha^2 + 9 = 10+4k+4k^2$ و منه $\alpha^2 + 9 = 2+4(2+k+k^2)$ أي أن $\alpha^2 + 9 \equiv 2[4]$ و هو المطلوب

ج - إثبات أن المعادلة (E) لا تقبل حلول في $\mathbb{Z}$: $\alpha^2 + 9 = 2^n$ و $\alpha^2 + 9 \equiv 2[4]$ يعني أن $2^n \equiv 2[4]$

و بما أن $n \geq 4$ فإن $2^n \equiv 0[4]$ أي أن $2 \equiv 0[4]$ هذا مستحيل و منه المعادلة لا تقبل حلول في $\mathbb{Z}$

التمرين الثالث (05 نقاط) :

I - متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_n = \int_{-1}^1 \left(\frac{2|x|}{3} + \frac{e^{-2n|x|}}{3} \right) dx$.

1. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n > 0$: من أجل كل عدد حقيقي x من $[-1; 1]$ فإن $\frac{2|x|}{3} + \frac{e^{-2n|x|}}{3} > 0$

بالمكاملة نجد $\int_{-1}^1 \left(\frac{2|x|}{3} + \frac{e^{-2n|x|}}{3} \right) dx > 0$ أي أن $u_n > 0$

2. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n = 2 \int_0^1 \left(\frac{2x}{3} + \frac{e^{-2nx}}{3} \right) dx$:

$$u_n = \int_{-1}^1 \left(\frac{2|x|}{3} + \frac{e^{-2n|x|}}{3} \right) dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{-2x}{3} + \frac{e^{2nx}}{3} \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{2x}{3} + \frac{e^{-2nx}}{3} \right) dx$$

بوضع $x = -t$ نجد $\begin{cases} dx = -dt \\ x = 0 ; t = 0 \\ x = -1 ; t = 1 \end{cases}$ و منه $\int_{-1}^0 \left(\frac{-2x}{3} + \frac{e^{2nx}}{3} \right) dx = - \int_1^0 \left(\frac{2t}{3} + \frac{e^{-2nt}}{3} \right) dt = \int_0^1 \left(\frac{2t}{3} + \frac{e^{-2nt}}{3} \right) dt$

إذن $u_n = 2 \int_0^1 \left(\frac{2x}{3} + \frac{e^{-2nx}}{3} \right) dx$

3. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - e^{2x}) \cdot e^{-2(n+1)x} dx$ نحسب الفرق

$$u_{n+1} - u_n = 2 \int_0^1 \left(\frac{2x}{3} + \frac{e^{-2(n+1)x}}{3} \right) dx - 2 \int_0^1 \left(\frac{2x}{3} + \frac{e^{-2nx}}{3} \right) dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{e^{-2(n+1)x} - e^{-2nx}}{3} \right) dx$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - e^{2x}) \cdot e^{-2(n+1)x} dx \quad \text{أي أن} \quad u_{n+1} - u_n = 2 \int_0^1 \left(\frac{e^{-2(n+1)x} \cdot (1 - e^{2x})}{3} \right) dx$$

4. استنتاج إشارة $u_{n+1} - u_n$: بما أن الدالة $x \mapsto 1 - e^{2x}$ متناقصة على المجال $[0; 1]$ و صورة 0 بهذه الدالة هي 0 فإن الدالة

$x \mapsto 1 - e^{2x}$ سالبة على المجال $[0; 1]$ و منه $\frac{2}{3} \int_0^1 (1 - e^{2x}) \cdot e^{-2(n+1)x} dx \leq 0$ أي $u_{n+1} - u_n \leq 0$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة

استنتاج أن المتتالية متقاربة : (u_n) متتالية متناقصة و محدود من الأسفل فهي متتالية متقاربة

5. كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n : $u_n = 2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{2x}{3} + \frac{e^{-2nx}}{3} \right) dx = 2 \cdot \left[\frac{x^2}{3} - \frac{e^{-2nx}}{6n} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{e^{-2n}}{3n} + \frac{1}{3n}$

$$u_n = \frac{2n - e^{-2n} + 1}{3n}$$

حساب نهاية المتتالية (u_n) : بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{e^{-2n}}{3n} + \frac{1}{3n} \right) = \frac{2}{3}$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}$

II - نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $v_n = 2n \cdot u_n$

و المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $w_n = v_n - \frac{4n}{3} - \frac{2}{3}$

1. كتابة كل من u_n و w_n بدلالة n : $v_n = 2n.u_n$ أي أن $v_n = \frac{4n}{3} - \frac{2e^{-2n}}{3} + \frac{2}{3}$

$w_n = v_n - \frac{4n}{3} - \frac{2}{3}$ أي أن $w_n = \frac{4n}{3} - \frac{2e^{-2n}}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4n}{3} - \frac{2}{3}$ و منه $w_n = -\frac{2e^{-2n}}{3}$

2. إثبات أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول : $w_{n+1} = -\frac{2e^{-(n+1)}}{3} = -\frac{2e^{-2n}}{3} \cdot \frac{1}{e^2}$ أي أن

$w_{n+1} = \frac{1}{e^2} w_n$ و منه المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{e^2}$ و حدها الأول $w_1 = -\frac{2e^{-2}}{3}$

3. نضع $S_n = w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n$ و $S'_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$ أحسب المجموعين كل من بدلالة n

$$S_n = -\frac{2e^{-2}}{3} \left[\frac{e^{-2n} - 1}{e^{-2} - 1} \right] \text{ أي أن } S_n = w_1 \cdot \left[\frac{\frac{1}{e^{2n}} - 1}{\frac{1}{e^2} - 1} \right]$$

و $w_n = v_n - \frac{4n}{3} - \frac{2}{3}$ أي أن $v_n = w_n + \frac{4n}{3} + \frac{2}{3}$ مجموع متتالية هندسية و متتالية حسابية و منه

$$S'_n = -\frac{2e^{-2}}{3} \left[\frac{e^{-2n} - 1}{e^{-2} - 1} \right] + \frac{n}{2} \left(\frac{4n}{3} + \frac{8}{3} \right) \text{ أي أن } S'_n = -\frac{2e^{-2}}{3} \left[\frac{e^{-2n} - 1}{e^{-2} - 1} \right] + \frac{n}{2} \left(\frac{4n}{3} + \frac{2}{3} + 2 \right)$$

التمرين الرابع (07 نقاط) :

I - دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = x - 1 - \ln(x)$

1. حساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x$ و

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

دراسة اتجاه تغيرات الدالة g : $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ و هي سالبة على المجال $]0; 1[$ و موجبة على المجال $]1; +\infty[$ و

منه g متناقصة على المجال $]0; 1[$ و متزيدة على المجال $]1; +\infty[$

:

جدول تغيراتها

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

2. استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$: بما أن الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى هي 0 فهي موجبة على مجال تعريفها

3. استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $\ln\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{x}{2} - 1$

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً x فإن $x-1-\ln(x) \geq 0$ بوضع $x = \frac{x'}{2}$

نجد أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً x' فإن $\frac{x'}{2}-1-\ln\left(\frac{x'}{2}\right) \geq 0$ أي أن $\frac{x'}{2}-1 \leq \ln\left(\frac{x'}{2}\right)$

$$\text{II - } f \text{ دالة عددية معرفة على } [0; +\infty[\text{ بـ } \begin{cases} f(x) = -x^2 + 2 + 2x \ln(x) : x > 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

و (C_f) تمثيلها بياني في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$

1. أ- حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ أي أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(2)$ نستنتج أن f مستمرة على يمين العدد 0

ب- إثبات أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-2}{x} = -\infty$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 + 2x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-2}{x} = -\infty$ أي

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x + 2 \ln x) = -\infty$$

نستنتج أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

الفسير البياني للنتيجة : أن المنحنى (C_f) يقبل مماساً موازياً لحامل محور الترتيب عند النقطة ذات الفاصلة 0

ج- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$: بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x^2} + \frac{2 \ln x}{x} \right] = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[-1 + \frac{2}{x^2} + \frac{2 \ln x}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty$.

2. أ- إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $f'(x) = -2g(x)$:

$$f'(x) = -2g(x) \text{ إذن } f'(x) = -2x + 2 \ln x + 2x \times \frac{1}{x} = -2x + 2 + \ln x = -2(x-1-\ln x)$$

ب- دراسة إشارة $f'(x)$ على $[0; +\infty[$: $f'(x) = -2g(x)$ وهي سالبة على المجال $[0; +\infty[$ لأن $g(x)$ موجبة على هذا المجال .

استنتاج اتجاه تغيرات الدالة f : الدالة متناقصة على المجال $[0; +\infty[$.

بما أن $f'(1) = 0$ و $f'(x)$ سالبة على المجال $[0; +\infty[$ ومنه (C_f) يقل نقطة انعطاف $A(1;1)$.

ج- كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2 : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$ أي أن $y = -2(1-\ln 2).x + 2$ أي أن $y = -2(1-\ln 2).(x-2) - 2 + 4 \ln 2$

د- التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً x : $f(x) + 2(1-\ln 2)x - 2 = 2x \left[-\frac{x}{2} + 1 + \ln\left(\frac{x}{2}\right) \right]$ لدينا

$$f(x) + 2(1-\ln 2)x - 2 = -x^2 + 2 + 2x \ln x + 2(1-\ln 2).x - 2$$

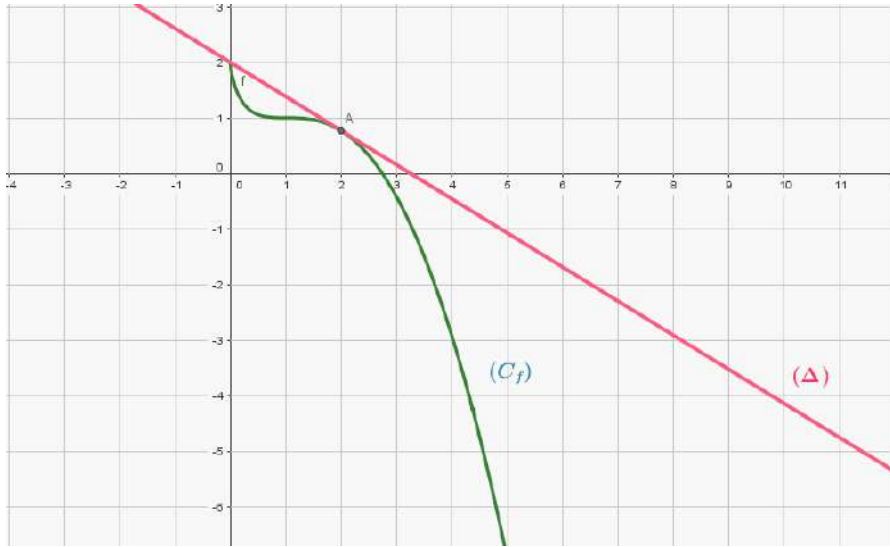
$$f(x) + 2(1-\ln 2)x - 2 = -x^2 + 2x \ln x + 2.(1-\ln 2).x = -x^2 + 2x \ln x + 2x - 2x \ln 2$$

$$f(x) + 2(1-\ln 2)x - 2 = -x^2 + 2x \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 2x \text{ ومنه } f(x) + 2(1-\ln 2)x - 2 = 2x \left[-\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right] \text{ وهو المطلوب .}$$

المستقيم (Δ) . $f(x) + 2(1-\ln 2)x - 2 = -2x.g\left(\frac{x}{2}\right)$ بما أن $g\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$ فإن الفرق $f(x) + 2(1-\ln 2)x - 2$ سالب إذن المنحنى (C_f) يقع تحت

3. إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $2,7 < \alpha < 2,8$: لدينا $f(2,7)=0,073$ و $f(2,8)=-0,074$ و بما أن الدالة f مستمرة و متناقصة على $[0; +\infty[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث

$$2,7 < \alpha < 2,8$$



إنشاء (Δ) و (C_f) :

4. h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$: $\begin{cases} h(x) = -x^2 + 2 + 2|x|\ln(|x|) : x \neq 0 \\ h(0) = 2 \end{cases}$

و (C) تمثيلها بياني في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$

أ - إثبات أن h دالة زوجية : من أجل كل عدد حقيقي x :

$$h(-x) = -(-x)^2 + 2 + 2|-x|\ln(|-x|) = -x^2 + 2 + 2|x|\ln(|x|) = h(x)$$

إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) . في نفس المعلم السابق : (C_h) منطبق على (C_f) في المجال $[0; +\infty[$

و (C_h) متناظر بالنسبة إلى حامل محور الترتيب لأن الدالة h زوجية .

