

تطبيق:

- نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بـ $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ و $g(x) = \frac{1}{x} - 1$
- عين D_f مجموعة تعريف الدالة f وكذا D_g مجموعة تعريف الدالة g .
 - اكتب كل من الدالتين f و g على شكل مركب دالتين يطلب تعيينهما.
 - عرّف الدالتين $f \circ g$ ، $g \circ f$

الحل:

(1)

f معرفة إذا كان: $x^2 - x \geq 0$ ، معناه $x(x - 1) \geq 0$

$$\text{معناه: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \text{ ومنه: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$	$+$
$x(x - 1)$	$+$	0	$-$	$+$

إذن $D_f =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

g معرفة إذا كان $x \neq 0$ ومنه: $D_g = \mathbb{R}^*$

(2)

• نضع $\begin{cases} u(x) = x^2 - x \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$ ومنه: $(v \circ u)(x) = v[u(x)] = v(x^2 - x) = \sqrt{x^2 - x} = f(x)$

• نضع $\begin{cases} u(x) = x - 1 \\ v(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ ومنه: $(u \circ v)(x) = u[v(x)] = u\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 1 = g(x)$

(3)

تعريف $g \circ f$:

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \left\{ x; x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g \right\} \\ &= \left\{ x; (x \in]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[\text{ و } \sqrt{x^2 - x} \in \mathbb{R}^* \right\} \\ &= \left\{ x; (x \in]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[\text{ و } (x^2 - x) > 0 \right\} \\ &= \left\{ x; (x \in]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[\text{ و } \right. \\ &\quad \left. \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[\right\} \\ &=]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g[f(x)] \\ &= g(\sqrt{x^2 - x}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - x}} - 1 \\ &= \frac{1 - \sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{x^2 - x}} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{x^2 - x})(\sqrt{x^2 - x})}{x^2 - x} \\ &= \frac{-x^2 + x + \sqrt{x^2 - x}}{x^2 - x} \end{aligned}$$

♥ بالتوفيق والنجاح في بكالوريا 2023 ♥

تعريف $f \circ g$:

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \left\{ x; x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f \right\} \\ &= \left\{ x; x \in \mathbb{R}^* \text{ و } \left(\frac{1}{x} - 1\right) \in]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[\right\} \\ &= \left\{ x; x \in \mathbb{R}^* \text{ و } \left(\frac{1}{x} - 1 \leq 0\right) \text{ أو } \left(\frac{1}{x} - 1 \geq 1\right) \right\} \\ &= \left\{ x; x \in \mathbb{R}^* \text{ و } \left(\frac{1}{x} \leq 1\right) \text{ أو } \left(\frac{1}{x} \geq 2\right) \right\} \\ &= \left\{ x; x \in \mathbb{R}^* \text{ و } \left(x \geq 1\right) \text{ أو } \left(x \leq \frac{1}{2}\right) \right\} \\ &= \left\{ x; x \in \mathbb{R}^* \text{ و } x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty[\right\} \\ &= \left]-\infty; 0[\cup \left]0; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty[\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f[g(x)] \\ &= f\left(\frac{1}{x} - 1\right) \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 - \left(\frac{1}{x} - 1\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x} + 1} \\ &= \sqrt{\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2}} \end{aligned}$$