

الصبري في الرياضيات

طبعة 2021

✧ المتتاليات العددية ✧

الثالثة ثانوي

الشعب:  آداب وفلسفة؛

 آداب ولغات أ.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

مجلة العبقري في الرياضيات (المتاليات العددية) الدروس // الشعبة: الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

دروس: حول المتاليات العددية // التحضير الجيد للكالوريا // الشعبة: 03 آ وف؛ لخص أ.

إذن: $u_0 = 3 \times (0) + 1 = 0 + 1 = 1$
 $u_1 = 3 \times (1) + 1 = 3 + 1 = 4$
 $u_2 = 3 \times (2) + 1 = 6 + 1 = 7$

(ب) توليد متتالية بعلاقة تراجعية:

تعريف:

يمكن تعريف متتالية بالتراجع وذلك بإعطاء:

□ قيمة الحد الأول.

□ علاقة تراجعية تربط بين حدين متتابعين من المتتالية.

مثال: (من بكالوريا 2008 الموضوع II)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها الأول $u_1 = 7$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1) حساب u_4, u_3, u_2 :

لدينا:
$$\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

طريقة:

تسمح العلاقة $u_{n+1} = 2u_n + 1$ بحساب قيمة الحد

u_{n+1} ، إذا علمت قيمة الحد الذي يسبقه u_n .

○ معرفة قيمة u_0 تسمح من حساب قيمة u_1 .

○ معرفة قيمة u_1 تسمح من حساب قيمة u_2 .

○ معرفة قيمة u_9 تسمح من حساب قيمة u_{10} ، وهكذا

...

إذن:

$u_2 = 2u_1 + 1 = 2 \times (7) + 1 = 14 + 1 = 15$

$u_3 = 2u_2 + 1 = 2 \times (15) + 1 = 30 + 1 = 31$

$u_4 = 2u_3 + 1 = 2 \times (31) + 1 = 62 + 1 = 63$

تمرين محلل 01 ص 33:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_n = -3n^2 + 1$

1. أحسب u_0, u_1, u_2 و u_{20} .

2. أكتب بدلالة n الحدود $u_{3n+2}, u_{2n}, u_{n+1}$.

الحل:

لاحظ أن: المتتالية (u_n) معرفة بحدّها العام u_n

لأنّه أعطى حدّها العام u_n بدلالة n .

1. حساب u_0, u_1, u_2 و u_{20} :

بالتعويض نجد:

1) **عموميات على المتاليات العددية:**

1) تعريف متتالية عددية:

تعريف:

متتالية u هي دالة تُرفق بكل عدد طبيعي n ، أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 مُعطى، العدد (u_n) .

نُصيح:

✗ نرمز إلى صورة العدد الطبيعي n بالمتتالية u بـ u_n بدلاً من $u(n)$.

✗ نرمز إلى المتتالية u بـ $(u_n)_{n \geq n_0}$ ، إذا كانت معرفة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 .

✗ نرمز إلى المتتالية u بـ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ أو (u_n) ، إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$.

✗ يسمى u_n الحد العام للمتتالية u ويسمى u_{n_0} حدّها الأول.

✗ إذا كانت المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ نرمز إلى حدّها الأول بالرمز u_0 .

✗ إذا كانت المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ نرمز إلى حدّها الأول بالرمز u_1 .

ملاحظة:

لا بد من التمييز بين متتالية (u_n) وبين حدّها العام u_n الذي هو عدد حقيقي.

2) طرق توليد متتالية:

(أ) توليد متتالية بالحد العام:

تعريف:

يمكن تعريف متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ بوضع من أجل كل عدد طبيعي n مع $n \geq n_0$ ، $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على $[n_0; +\infty[$.

مثال: (من بكالوريا 2008 الموضوع I)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n + 1$.

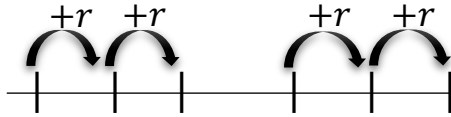
1/ حساب u_2, u_1, u_0 :

طريقة:

العلاقة $u_n = 3n + 1$ تسمح من حساب قيمة كل الحدود ومن أجل ذلك يكفي تعويض n على التوالي بـ 0، 1، 2، ...

إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$



$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_{n-1} \quad u_n \quad u_{n+1}$

② عبارة الحد العام:

خاصية 01:

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r ، فإنه من أجل

كل عددين طبيعيين n و p ، $u_n = u_p + (n - p)r$

حالات خاصة:

$$u_n = u_1 + (n - 1)r \quad \text{و} \quad u_n = u_0 + nr$$

③ مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية:

خاصية 02:

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية، فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = (n + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

بصفة عامة:

$$S = \left(\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2} \right) (\text{عدد الحدود})$$

حيث:

1 + دليل الحد الأول - دليل الحد الأخير = عدد الحدود

④ خاصية الوسط الحسابي:

خاصية 03:

تكون الأعداد a ، b و c بهذا الترتيب حدوداً متتابعة من

متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $a + c = 2b$

يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c .

مثال: (حل فمارين البكالوريا)

حسابية معرفة بدورها العام.

النمرين 01: (05 فقط) بكالوريا 2008 // الموضوع 01 //

الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n + 1$

1/ احسب u_0 ، u_1 ، u_2

2/ بين أن (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها. عيّن اتجاه

تغير (u_n) .

3/ تحقق أن العدد 2008 حدّ من حدود المتتالية (u_n) . ما

رتبته؟

4/ احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{669}$

$$u_0 = -3(0)^2 + 1$$

$$= -3(0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$u_1 = -3(1)^2 + 1$$

$$= -3(1) + 1 = -3 + 1 = -2$$

$$u_2 = -3(2)^2 + 1$$

$$= -3(4) + 1 = -12 + 1 = -11$$

$$u_{20} = -3(20)^2 + 1$$

$$= -3(400) + 1$$

$$= -1200 + 1 = -1199$$

2. كتابة بدلالة n الحدود u_{3n+2} ، u_{2n} ، u_{n+1} :

بالتعويض نجد:

$$u_{n+1} = -3(n + 1)^2 + 1$$

$$= -3(n^2 + 2n + 1) + 1$$

$$= -3n^2 - 6n - 3 + 1$$

$$= -3n^2 - 6n - 2$$

$$u_{2n} = -3(2n)^2 + 1$$

$$= -3(4n^2) + 1 = -12n^2 + 1$$

$$u_{3n+2} = -3(3n + 2)^2 + 1$$

$$= -3(9n^2 + 12n + 4) + 1$$

$$= -27n^2 - 36n - 12 + 1$$

$$= -27n^2 - 36n - 11$$

تمرين محلل 02 ص 33:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 2$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = -2u_n + 1$

1. احسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

الحل:

لاحظ أن: المتتالية (u_n) معرفة بالتكرار

لأنه: أعطيت فيها حدّها الأول $u_0 = 2$ ، ومعرفة

تكرارية $u_{n+1} = -2u_n + 1$.

1. حساب u_1 ، u_2 ، u_3 :

$$u_1 = -2u_0 + 1 = -2(2) + 1 = -4 + 1 = -3$$

$$u_2 = -2u_1 + 1 = -2(-3) + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$u_3 = -2u_2 + 1 = -2(7) + 1 = -14 + 1 = -13$$

تمرين محلل 03 ص 33: (عمل منزلي)

② المتتالية الحسابية:

① تعريف:

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_0

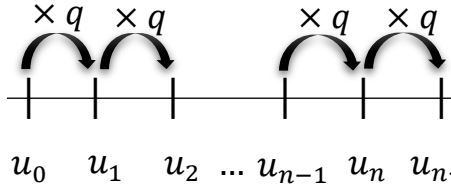
وأساسها r (عدد حقيقي)

③ المتتالية الهندسية:

① تعريف:

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدّها الأول u_0 وأساسها q (عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = u_n \times q$$



② عبارة الحد العام:

خاصية 01:

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q ، فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p ،

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

حالات خاصة:

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} \text{ و } u_n = u_0 \times q^n$$

③ مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية:

خاصية 02:

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$$

صيغة عامة:

$$S = \text{الحد الأول} \left(\frac{1 - \text{الأساس}^{n+1}}{1 - \text{الأساس}} \right)$$

حيث:

1 + دليل الحد الأول - دليل الحد الأخير = عدد الحدود

حالة خاصة:

إذا كان $q = 1$ ، فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = (n+1)u_0$$

④ خاصية الوسط الهندسي:

خاصية 03:

تكون الأعداد غير المعدومة a ، b و c بهذا الترتيب حدوداً

متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $a \times c = b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و b .

مثال: (حل فارين البكالوريا)

حسابية معرفة بحدّين مختلفين.

النمرين 05: (05 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بالحددين:

$$u_{10} = 31 \text{ و } u_{15} = 46$$

1- عيّن أساسها وحدّها الأول u_0 .

2- أكتب u_n بدلالة n .

3- بيّن أن 6028 حدّ من حدود المتتالية (u_n) .

4- أحسب المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2009}$.

حسابية معرفة بحد وعلاقة.

النمرين 03: (06 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها الأول $u_1 = 2$

وبالعلاقة $u_2 - 2u_5 = 19$.

1- أ- أحسب الأساس r للمتتالية (u_n) .

ب- أحسب الحد العاشر.

2- أكتب عبارة u_n بدلالة n .

3- بيّن أن العدد (-2008) هو حدّاً من حدود (u_n) . محدداً رتبته.

4- أحسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{671}$.

حسابية معرفة بعلاقة يُوظف

فيها الوسط الحسابي.

النمرين 27: (06 نقاط) بكالوريا 2020 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لتكن (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_0 وأساسها r حيث:

$$u_1 + u_3 = 16 \text{ و } u_2 - u_0 = 4$$

1- احسب الحدّ u_2 ، ثمّ الحدّ u_0 واستنتج الأساس r للمتتالية (u_n) .

2- أ- بيّن أن الحدّ العام للمتتالية (u_n) معرّف بـ:

$$u_n = 4 + 2n$$

ب- حدّد مع التبرير اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3- بيّن أن العدد 2020 حدّ من حدود المتتالية (u_n) ، محدداً رتبته.

4- احسب المجموع S المعرّف بـ:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{1008}$$

هندسية معرفة بحدّها العام.

النمرين 05: (05 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$v_n = 2 \times 8^n$$

1- بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0 .

2- أحسب بدلالة n المجموع $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

هندسية معرفة بحدّين مختلفين

النمرين 04: (07 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها موجب.

1- عيّن أساس هذه المتتالية وحدّها الأول u_0 إذا علمت أنّ :

$$u_3 = 144 \text{ و } u_5 = 576$$

2- تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 18 \times 2^n$

3- أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ثم استنتج قيمة العدد الطبيعي n حيث : $S_n = 1134$.

هندسية معرفة بحدّين مختلفين

النمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية هندسية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، أساسها q وحدّها الأول u_0 حيث :

$$u_1 = 6 \text{ و } u_4 = 48$$

1. أ- أحسب الأساس والحدّ الأول للمتتالية (u_n) .

ب- استنتج أنّ عبارة الحدّ العام للمتتالية (u_n) هي :

$$u_n = 3 \times 2^n$$

2. أ- علماً أنّ $2^8 = 256$ ؛ بيّن أنّ العدد 768 هو حدّ من

حدود المتتالية (u_n) .

ب- أحسب المجموع S حيث : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_7$.

هندسية معرفة بعلاقة يُوظف

فيها الوسط الحسابي.

النمرين 28: (06 نقاط) بكالوريا 2020 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لتكن (u_n) متتالية هندسية حدّها الأول u_1 ، حدودها موجبة تماماً حيث : $u_3 \times u_5 = 2916$.

1) احسب الحد u_4 .

2) علماً أنّ $u_3 = 18$ ، تحقّق أنّ أساس المتتالية (u_n) هو 3.

3) احسب الحدّ الأول u_1 ، ثم اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

4) عيّن رتبة الحدّ الذي قيمته 1458. (لاحظ أنّ : $3^6 = 729$)

5) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

4 المتتالية الرتيبة:

1 اتجاه تغيّر متتالية عددية:

تعريف:

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$.

□ القول عن (u_n) أنّها متزايدة يعني أنّه من أجل كل

عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \geq u_n$.

□ القول عن (u_n) أنّها متناقصة يعني أنّه من أجل كل

عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \leq u_n$.

□ القول عن (u_n) أنّها ثابتة يعني أنّه من أجل كل عدد

طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n$.

□ القول عن (u_n) أنّها رتيبة يعني أنّها إما متزايدة

وإما متناقصة.

ملاحظات:

○ تبقى التعاريف السابقة صحيحة في حالة متتالية

$(u_n)_{n \geq n_0}$ معرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث

$$n \geq n_0$$

○ توجد متتاليات ليست متزايدة وليست متناقصة.

نقول عنها أنّها غير رتيبة ونذكر على سبيل المثال

$$u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

○ تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا وفقط إذا وُجد عدد

حقيقي k بحيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = k$.

2 اتجاه تغيّر متتالية حسابية:

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ ، حدّها الأول u_0

وأساسها r .

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = r$

ومنه:

☞ إذا كان r سالبا تماما ($r < 0$)، فإنّ المتتالية

متناقصة تماما.

☞ إذا كان r موجبا تماما ($r > 0$)، فإنّ المتتالية

متزايدة تماما.

☞ إذا كان r معدوما ($r = 0$)، فإنّ المتتالية ثابتة.

3 اتجاه تغيّر متتالية هندسية:

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ، حدّها الأول u_0

وأساسها q .

وعليه: $u_{n+1} - u_n = (n^2 + n) - (n^2 - n) = n^2 + n - n^2 + n = 2n$

2. استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

بما أن: $u_{n+1} - u_n = 2n \geq 0$ ، فإن: (u_n) متزايدة تماماً.

تمرين محلل ص 37:

لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$

1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

2. ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟

الحل:

1. تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول:

نُبين أن حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت.

لدينا: $v_{n+1} = \frac{3^{(n+1)}}{2^{(n+1)+1}} = \frac{3^n \times 3^1}{2^{n+1} \times 2^1} = \frac{3^n}{2^{n+1}} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} v_n$

إذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{2}$ ، وحدها الأول

$v_0 = \frac{3^0}{2^{0+1}} = \frac{1}{2}$

2. دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n) :

بما أن: $q = \frac{3}{2} > 1$ و $v_0 = \frac{1}{2} > 0$ ، فإن المتتالية (v_n) متزايدة تماماً.

ط (2) ندرس إشارة الفرق $v_{n+1} - v_n$:

لدينا: $v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 0$

إذن: المتتالية (v_n) متزايدة تماماً.

5 الماتليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$

($a \neq 0$ و $b \neq 0$)

تمرين محلل ص 39:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0 = \alpha$

وبالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

(أ) نفرض $\alpha = 3$.

اثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة ثم أحسب، بدلالة n ،

المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(ب) نفرض $\alpha = 2$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من

أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

1. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين

أساسها وحدّها الأول.

2. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3. أحسب، بدلالة n ، المجموع

نُعلم أن: $u_n = u_0 \times q^n$ و $u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}$ نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^n \times (q - 1)$

ومنه:

● إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 > 0$ ، فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

● إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 < 0$ ، فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

● إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 > 0$ ، فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

● إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 < 0$ ، فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

● إذا كان $q = 1$ ، فإن المتتالية (u_n) ثابتة.

● إذا كان $q = 0$ ، تكون كل حدود المتتالية (u_n) معدومة ابتداءً من الحد الثاني.

● إذا كان $q < 0$ ، فإن الفرق $u_{n+1} - u_n$ لا يحتفظ بإشارة ثابتة لأن q^n لا يحتفظ بإشارة ثابتة ومنه المتتالية (u_n) ليست رتيبة.

يسكن تلخيص ذلك في جدول:

لا يمكن	$0 < q < 1$	$q > 1$	$q = 1$	$q \leq 0$
$u_0 > 0$	متناقصة تماماً (u_n)	متزايدة تماماً (u_n)	ثابتة (u_n)	غير رتيبة (u_n)
$u_0 < 0$	متزايدة تماماً (u_n)	متناقصة تماماً (u_n)		

تمرين محلل ص 01:

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_n = n^2 - n$

1. أحسب $u_{n+1} - u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

2. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

فريضة:

لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) ، لا يكفي المقارنة بين u_0 و u_1 أو بين u_2 و u_3 ... وإنما يجب المقارنة

بين u_n و u_{n+1} من أجل كل عدد طبيعي n .

الحل:

1. حساب $u_{n+1} - u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n :

لدينا: $u_n = n^2 - n$

ومنه:

$u_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1)$

$= (n^2 + 2n + 1) - (n+1)$

$= n^2 + 2n + 1 - n - 1$

$= n^2 + n$

$$S = -\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right) + 3(n+1) \quad \text{ومنّه:}$$

$$= -\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 3(n+1)$$

4. دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \left[-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3\right] - \left[-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right] \quad \text{لدينا:}$$

$$= -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$$

$$= -\left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(-\frac{1}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$$

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن: المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

مثال: (● حل قمارين البكالوريا)

النمرين 02: (06 نقط) بكالوريا 2008 // الموضوع 02 //

الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها الأول $u_1 = 7$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

(1) أحسب u_2 ، u_3 ، u_4 .

(2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نُعرف المتتالية

(v_n) كما يأتي: $v_n = u_n + 1$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q

وحدها الأول v_1 .

ب- اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج- نضع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ، احسب S_n بدلالة n .

د- عيّن n علماً أن $S_n = 1016$.

الحمد لله

$$.S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

4. ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

لدينا:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases} \quad \text{أ) بفرض } \alpha = 3، \text{ ومنّه:}$$

المتتالية (u_n) ثابتة **معناه** $u_0 = u_1 = u_{n-1} = u_n = 3$

حساب: بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)u_0 = 3(n+1)$$

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases} \quad \text{ب) بفرض } \alpha = 2، \text{ ومنّه:}$$

ولدينا: (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n

بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

1. اثبات أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يُطلب

تعيين أساسها وحدّها الأول:

نكتب v_{n+1} بدلالة v_n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3$$

$$= \frac{1}{3}u_n + 2 - 3$$

$$= \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$$

$$\text{ومنّه: } v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

إذن: المتتالية (v_n) متتالية هندسية، أساسها $q = \frac{1}{3}$

وحدها الأول $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$

2. حساب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{لدينا: } v_n = u_n - 3$$

$$\text{ومنّه: } u_n = v_n + 3 = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

3. حساب: بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

لدينا: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$= (v_0 + 3) + (v_1 + 3) + \dots + (v_n + 3)$$

$$= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (3 + 3 + \dots + 3)$$

$$= v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) + 3(n+1)$$

$$= -1 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right) + 3(n+1)$$

مجلة العبقري في الرياضيات (المتناليات العددية)
الملخص // الشعبة: الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

ملخص: حول المتناليات العددية // التحضير الجيد للبكالوريا // الشعبة: 03 آوف؛ لى أ.

عموميات

① دراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) :

لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) ؛

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

نكون أمام ثلاث (03) حالات بعد حساب الفرق

$$u_{n+1} - u_n = 0$$

(الفرق معدوم)

(u_n) ثابتة.

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

(الفرق سالب تماماً)

(u_n) متناقصة تماماً.

الاستنتاج:

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

(الفرق موجب تماماً)

(u_n) متزايدة تماماً.

المتتالية الحسابية

(u_n) متتالية حسابية.

① طريقة إثبات أن المتتالية (u_n) حسابية:

يكفى أن نثبت أن:

② أو نكتب u_{n+1} بدلالة u_n
نجد: $u_{n+1} = u_n + r$.

① الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت
أي: $u_{n+1} - u_n = r$.

حيث: r عدد حقيقي، يسمى أساس المتتالية الحسابية (u_n) .

2) عبارة الحد العام لمتتالية حسابية:

(كتابة u_n بدلالة n)؛ u_n يسمى الحد العام.

في حالة u_1 هو الحد الأول:

$$u_n = u_1 + (n - 1)r \quad (3)$$

بصفة عامة:

$$u_n = u_p + (n - p)r \quad (1)$$

في حالة u_0 هو الحد الأول:

$$u_n = u_0 + nr \quad (2)$$

$$p = 1$$

$$p = 0$$

علاقة تربط بين حدين مختلفين.

تُستعمل العلاقة (1)، إذا كانت (u_n) حسابية ومعرفة بحدين مختلفين
وباستعمال العلاقة نقوم بحساب الأساس نجد: $r = \frac{u_n - u_p}{n - p}$

ملاحظة:

هذه العلاقات (1)؛ (2)؛ (3) يمكن استعمالها في حالات أخرى، ولكن بتعريف u_n بأي حد معطى في التسعين.

3) مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية:

بصفة عامة:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\text{المجموع} = (\text{عدد الحدود}) \left(\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2} \right)$$

حيث: $1 + \text{دليل الحد الأول} - \text{دليل الحد الأخير} = \text{عدد الحدود}$.

4) خاصية الوسط الحسابي:

$$b = \frac{a+c}{2} \text{ أو } a + c = 2b$$

تكون الأعداد الحقيقية a ، b و c بهذا الترتيب
حدوداً متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان

$$\text{مثال: } u_1 + u_2 + u_3 = 2u_2 + u_2 = 3u_2$$

المتتالية الهندسية

(u_n) متتالية هندسية.

1) طريقة إثبات أنّ المتتالية (u_n) هندسية:

يكفي أن نُثبت أن:

② أو نكتب u_{n+1} بدلالة u_n
نجد: $u_{n+1} = qu_n$

① الحاصل $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت
أي: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$

حيث: q عدد حقيقي، يسمى أساس المتتالية الهندسية (u_n) .

2) عبارة الحد العام لمتتالية هندسية:

(كتابة u_n بدلالة n)؛ u_n يسمى الحد العام.

في حالة u_1 هو الحد الأول:

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} \quad ③$$

بصفة عامة:

$$u_n = u_p \times q^{n-p} \quad ①$$

في حالة u_0 هو الحد الأول:

$$u_n = u_0 \times q^n \quad ②$$

$$p = 1$$

$$p = 0$$

علاقة تربط بين حدين مختلفين.

تُستعمل العلاقة ①، إذا كانت (u_n) هندسية ومعرفة بمحدين مختلفين

وباستعمال العلاقة نقوم بحساب الأساس نجد: $q^{n-p} = \frac{u_n}{u_p}$

$$\text{✗ إذا كان } q^2 = \frac{u_n}{u_p} > 0, \text{ فإن: } q = \sqrt{\frac{u_n}{u_p}} \text{ أو } q = -\sqrt{\frac{u_n}{u_p}}.$$

$$\text{✗ إذا كان } n - p \neq 2, \text{ نقوم بتحليل العدد } \frac{u_n}{u_p} \text{ إلى جداء عوامل أولية.}$$

ملاحظة:

هذه العلاقات ①؛ ②؛ ③ يمكن استعمالها في حالات أخرى، وذلك بتعريف u_n بأي حد معطى في التمرين.

3) مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية:

بصفة عامة:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$$\text{المجموع} = (\text{الحد الأول}) \left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q} \right)$$

أو

$$\text{المجموع} = (\text{الحد الأول}) \left(\frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1} \right)$$

حيث: $1 +$ دليل الحد الأول - دليل الحد الأخير = عدد الحدود.

4) خاصية الوسط الهندسي:

$$a \times c = b^2$$

تكون الأعداد الحقيقية a ، b و c بهذا الترتيب حدوداً متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان

$$\text{مثال: } u_1 \times u_2 \times u_3 = u_2^2 \times u_2 = u_2^3$$

اتجاه تغيّر متتالية (u_n)

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

في حالة (u_n) هندسية:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

في حالة (u_n) حسابية:

$$\text{بمّا: } u_{n+1} - u_n = r$$

فإنّ: (اتجاه التغيّر) حسب إشارة (أساسها) r .

$$r > 0 \quad \boxtimes \text{ متزايدة تماماً.}$$

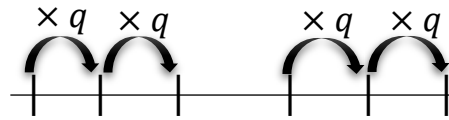
$$r < 0 \quad \boxtimes \text{ متناقصة تماماً.}$$

$$r = 0 \quad \boxtimes \text{ ثابتة.}$$

جمع الأستاذ: بوعزة مصطفى.

المتتالية (u_n)

هندسية



$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_{n-1} \quad u_n \quad u_{n+1}$

حيث q عدد حقيقي $u_{n+1} = qu_n$

q يسمى أساس المتتالية الهندسية (u_n) .

الطريقة 01:

نُبين أنّ الحاصل $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت (الأساس)

الطريقة 02:

نكتب u_{n+1} بدلالة u_n نجد:

$$u_{n+1} = qu_n$$

إذا أعطي u_0 :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

إذا أعطي u_1 :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

من أجل عددين طبيعيين n و p :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

علاقة تربط بين حدين مختلفين في متتالية هندسية.

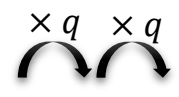
بصفة عامة:

$$\left(\frac{\text{عدد الحدود}}{1 - q} \right) \text{ الحد الأول} = \text{المجموع}$$

الوسط الهندسي:

تكون a , b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان

$$a \times c = b^2$$



$a \quad b \quad c$

$$\begin{cases} a = \frac{b}{q} \\ c = bq \end{cases}$$

حسابية



$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_{n-1} \quad u_n \quad u_{n+1}$

حيث r عدد حقيقي $u_{n+1} = u_n + r$

r يسمى أساس المتتالية الحسابية (u_n) .

الطريقة 01:

نُبين أنّ الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت (الأساس)

الطريقة 02:

نكتب u_{n+1} بدلالة u_n نجد:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

إذا أعطي u_0 :

$$u_n = u_0 + nr$$

إذا أعطي u_1 :

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

من أجل عددين طبيعيين n و p :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

علاقة تربط بين حدين مختلفين في متتالية حسابية.

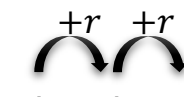
بصفة عامة:

$$\left(\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2} \right) (\text{عدد الحدود}) = \text{المجموع}$$

الوسط الحسابي:

تكون a , b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان

$$a + c = 2b$$



$a \quad b \quad c$

$$\begin{cases} a = b - r \\ c = b + r \end{cases}$$

كيف ندين أن

عبارة الحد العام للمتتالية (u_n)

كتابة u_n بدلالة n

هذه العلاقات يُمكن استعمالها وذلك بتعويض u_n بأي حد مُعطى

مجموع حدود

متتابعة من متتالية

$$1 + \text{دليل الحد الأول} - \text{دليل الحد الأخير} = \text{عدد الحدود}$$

خاصية الوسط

مجلة العبقري في الرياضيات (المتتاليات العددية في البكالوريا)
تمارين // الشعبة: الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

تمارين البكالوريا: حول المتتاليات العددية // التحضير الجيد للبكالوريا // الشعبة: 03 أ

نجاهك بيدك

النمرين 01: (05 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n + 1$.

1/ احسب u_0, u_1, u_2 .

2/ بين أن (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها. عيّن اتجاه تغيّر (u_n).

3/ تحقق أن العدد 2008 حدّ من حدود المتتالية (u_n). ما رتبته؟

4/ احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{669}$.

النمرين 02: (06 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها الأول $u_1 = 7$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1/ احسب u_2, u_3, u_4 .

2/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نُعرف المتتالية (v_n) كما يأتي: $v_n = u_n + 1$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_1 .

ب- اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج- نضع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ، احسب S_n بدلالة n .

د- عيّن n علماً أن $S_n = 1016$.

النمرين 03: (06 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها الأول $u_1 = 2$ وبالعلاقة $u_2 - 2u_5 = 19$.

1/ أ- احسب الأساس r للمتتالية (u_n).

ب- احسب الحد العاشر.

2/ اكتب عبارة u_n بدلالة n .

3/ بين أن العدد (-2008) هو حداً من حدود (u_n). محدّد رتبته.

4/ احسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{671}$.

النمرين 04: (07 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها موجب.

1- عيّن أساس هذه المتتالية وحدّها الأول u_0 إذا علمت أن: $u_3 = 144$ و $u_5 = 576$.

2- تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 18 \times 2^n$.

3- احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ، ثم استنتج قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 1134$.

النمرين 05: (05 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(I) (u_n) متتالية حسابية معرفّة على $\mathbb{N}$ بالحددين: $u_{10} = 31$ و $u_{15} = 46$.

1- عيّن أساسها وحدّها الأول u_0 .

2- أكتب u_n بدلالة n .

3- بيّن أنّ 6028 حدّ من حدود المتتالية (u_n) .

4- أحسب المجموع $S: S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2009}$.

(II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفّة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2 \times 8^n$.

1- بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0 .

2- أحسب بدلالة n المجموع $S': S' = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

النمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية هندسية معرفّة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، أساسها q وحدّها الأول u_0 حيث:

$$u_1 = 6 \text{ و } u_4 = 48.$$

1. أ- أحسب الأساس والحدّ الأول للمتتالية (u_n) .

ب- استنتج أنّ عبارة الحدّ العام للمتتالية (u_n) هي: $u_n = 3 \times 2^n$.

2. أ- علماً أنّ $256 = 2^8$ ؛ بيّن أنّ العدد 768 هو حدّ من حدود المتتالية (u_n) .

ب- أحسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_7$.

3. (v_n) متتالية عددية معرفّة بـ: $v_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n: v_{n+1} = 2v_n - 1$.

أ- أحسب: v_1, v_2, v_3 .

ب- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n: v_n = 3 \times 2^n + 1$.

ج- أحسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_7$.

النمرين 07: (06 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(أ) (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدّها الأول u_0 بحيث: $u_0 + u_3 = 28$.

1. احسب u_0 ، ثمّ اكتب الحد العام u_n بدلالة n .

2. احسب المجموع: $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_9$.

(ب) (v_n) متتالية عددية معرفّة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام: $v_n = 1 - 5n$.

1. بيّن أنّ (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها ثمّ استنتج اتجاه تغيّرها.

2. احسب المجموع: $S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_9$.

(ج) نعتبر المتتالية (k_n) المعرفّة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام: $k_n = 1 + 3^n - 5n$.

-تحقّق أنّ: $k_n = u_n + v_n$ ثمّ احسب المجموع: $S = k_0 + k_1 + \dots + k_9$.

النمرين 08: (06 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفّتان على $\mathbb{N}$ بحدّيهما العام: $u_n = -2n$ و $v_n = 3^{-2n}$.

عيّن في كلّ حالة من الحالات الخمس في الجدول أدناه الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاث مع التعليل.

1	اقتراح 1	اقتراح 2	اقتراح 3
1	(u_n) هي متتالية	هندسية	حسابية
2	الحد الخامس والأربعون للمتتالية (u_n) يساوي	-90	-92
3	المجموع $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ يساوي	$n^2 + 1$	$-n^2 - n$

4	(v_n) متتالية هندسية أساسها	$\frac{1}{9}$	9	-9
5	المتتالية (v_n)	متزايدة	متناقصة	ليست رتيبة

التمرين 09: (06 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

a, b, c ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة أساسها r حيث: $a + b + c = 9$.

1. (أ) احسب b ثم اكتب a و c بدلالة r .

(ب) علماً أن: $a \times c = -16$

- عيّن الأساس r ثم استنتج a و c .

2. (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = -2$ وأساسها 5.

(أ) عبّر عن الحد العام u_n بدلالة n .

(ب) احسب u_{15} ثم استنتج المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{15}$.

3. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $8v_n - u_n = 0$

- احسب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{15}$.

التمرين 10: (06 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r ، حدها الأول u_1 و $u_3 = 7$.

1. (أ) احسب بدلالة r الجداين: $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$.

(ب) عيّن الأساس r بحيث: $T_2 - T_1 = 27$.

2. نضع $r = 3$.

(أ) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

بيّن أن: $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$.

(ج) جد العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 145$.

3. (أ) اكتب الحد u_{n+5} بدلالة n .

(ب) تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$.

(ج) استنتج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعياً.

التمرين 11: (06 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 2$ وأساسها 3.

1- (أ) عبّر عن v_n بدلالة n .

(ب) احسب بدلالة n الفرق $v_{n+1} - v_n$ ، ثم استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (v_n) .

2- نضع، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

(أ) احسب بدلالة n المجموع S_n .

(ب) عيّن قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 80$.

(ج) أثبت بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

التمرين 12: (06 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$.

- 1- احسب u_0 .
- 2- بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 5n + 1$.
- 3- عيّن العدد الطبيعي n بحيث: $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$.
- 4- أحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2013}$.
- 5- المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n = 2u_n + 1$.
(أ) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (v_n) .
(ب) أحسب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{2013}$.

التمرين 13: (06 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

- عيّن الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة، في كلّ حالة من الحالات الأربعة الآتية، مع التّعليل:
- (1) (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدّها $u_2 = 1$.
الحد العام للمتتالية (u_n) هو:
(أ) $u_n = 1 + 3n$ (ب) $u_n = 7 + 3n$ (ج) $u_n = -5 + 3n$
 - (2) n عدد طبيعي. المجموع $1 + 2 + 3 + \dots + n$ يساوي:
(أ) $\frac{n^2+n}{2}$ (ب) $\frac{n(n-1)}{2}$ (ج) $\frac{n^2+1}{2}$
 - (3) x عدد حقيقي. تكون الأعداد $x + 1$ ، x ، $x - 2$ تكون الأعداد $x + 1$ ، x ، $x - 2$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية إذا كان:
(أ) $x = 3$ (ب) $x = 5$ (ج) $x = -2$
 - (4) (v_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ ، حدّها العام $v_n = 2 \times 3^{n+1}$. أساس المتتالية (v_n) هو:
(أ) 2 (ب) 3 (ج) 6

التمرين 14: (06 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة بما يلي: $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_{n+1} = 5v_n + 4$.
- (1) احسب: v_1 ، v_2 و v_3 .
 - (2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n = v_n + 1$.
أ- بين أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها 5 وحدّها الأول $u_0 = 2$.
ب- اكتب u_n بدلالة n واستنتج v_n بدلالة n .
ج- حلّ العدد 1250 إلى جداء عوامل أوليّة واستنتج أنّه حد من حدود المتتالية (u_n) .
 - (3) أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.
ب- احسب بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

التمرين 15: (07 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

- (u_n) المتتالية الهندسية التي حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث: $u_0 = 2$ و $q = 3$.
- (1) احسب u_1 و u_2 .
 - (2) اكتب u_n بدلالة n ؛ ثم استنتج u_5 .
 - (3) عيّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .
 - (4) أ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$.
ب) استنتج قيمة المجموع: $2 + 6 + 18 + \dots + 486$.
 - (5) أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية على 5 لكل عدد من الأعداد 3، 3^2 ، 3^3 و 3^4 .
ب) استنتج أنّه لكل k من $\mathbb{N}$ ؛ $3^{4k} \equiv 1[5]$.

(6) عيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5.

النمرين 16: (06 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_1 وأساسها r حيث: $u_2 = \frac{1}{2}$ و $u_1 - u_3 = 5$.

(أ) بيّن أنّ: $u_1 + u_3 = 1$.

(ب) عيّن الحدّ الأول u_1 ؛ ثمّ استنتج أنّ $r = -\frac{5}{2}$.

(2) اكتب u_n بدلالة n .

(3) (أ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(ب) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $S_n = -\frac{657}{2}$.

(4) n عدد طبيعي غير معدوم، نضع: $T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n$.

(أ) تحقّق أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ $(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$.

(ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنّه لكل n من $\mathbb{N}^*$ $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$.

النمرين 17: (07 نقاط) بكالوريا 2016 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لتكن (u_n) متتالية عددية معرّفة من أجلّ عدد طبيعي n بـ: $u_n = 3n - 2$.

(1) احسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

(2) بيّن أنّ المتتالية (u_n) حسابية وعيّن أساسها.

(3) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

(4) بيّن أنّ العدد 1954 حدّ من حدود المتتالية (u_n) وعيّن رتبته.

(5) (أ) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(ب) عيّن العدد n بحيث يكون: $S_n = 328$.

النمرين 18: (06 نقاط) بكالوريا 2016 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدّها الأول u_0 وتُحقّق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$.

(1) احسب الحدّ الأول u_0 .

(2) اكتب الحد العام u_n بدلالة n .

(3) عيّن العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.

(4) احسب المجموع S بحيث: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{49}$.

(5) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 3$.

احسب المجموع S' بحيث: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{49}$.

النمرين 19: (06 نقاط) بكالوريا 2017_01 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) المتتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرّفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

(1) بيّن أنّ أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدّها الأول هو 5.

(2) اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثمّ استنتج قيمة حدّها السابع.

(3) (أ) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

(ب) استنتج قيمة المجموع S' حيث $S' = u_0 + u_1 + \dots + u_6$.

النمرين 20: (06 نقاط) بكالوريا 2017_01 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

- (u_n) متتالية حسابية معرفّة على المجموعة $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.
- (1) عيّن الأساس r للمتتالية (u_n).
 - (2) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 6n - 5$.
 - (3) اثبت أنّ العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)، ما هي رتبته؟
 - (4) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

النمرين 21: (06 نقاط) بكالوريا 2017_02 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

- نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول u_0 وأساسها r .
- (1) احسب الحد u_4 علما أنّ: $u_3 + u_5 = 20$.
 - (2) احسب الحد u_5 علما أنّ: $2u_4 - u_5 = 7$.
 - (3) استنتج قيمة r واحسب u_0 .
 - (4) تحقّق أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 3n - 2$.
 - (5) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
 - (6) جد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

النمرين 22: (06 نقاط) بكالوريا 2017_02 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

- في كل حالة من الحالات الأربع الآتية أقترحت ثلاث إجابات، واحدة فقط منها صحيحة، يُطلب تحديدها مع التعليل.
- (1) الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها 3 - وحدّها الأول 1 هو:
 - (أ) -17
 - (ب) -14
 - (ج) -11
 - (2) مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية حدّها الأول هو 1 وأساسها 3 هو:
 - (أ) $\frac{3^{101}-1}{2}$
 - (ب) $\frac{1-3^{100}}{2}$
 - (ج) $\frac{3^{100}-1}{2}$
 - (3) نضع من أجل كل عدد حقيقي x : $a = 2x + 2$ ، $b = 6x - 3$ ، $c = 4x$. الأعداد الحقيقية a ، b ، c بهذا الترتيب تُشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون:
 - (أ) $x = \frac{4}{3}$
 - (ب) $x = 0$
 - (ج) $x = \frac{3}{4}$
 - (4) المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ هي متتالية:
 - (أ) حسابية أساسها 1
 - (ب) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
 - (ج) لا حسابية ولا هندسية.

النمرين 23: (06 نقاط) بكالوريا 2018 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

- عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير:
- (1) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = n^2 - 1$
 - (أ) متزايدة تماما
 - (ب) متناقصة تماما
 - (ج) ليست رتيبة.
 - (2) (v_n) متتالية هندسية حدّها الأول $v_1 = 3$ وأساسها $q = 2$
 - (أ) عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي: $v_n = 3 \times 2^n$
 - (ب) $v_n = 3 \times 2^{n-1}$
 - (ج) $v_n = 2 \times 3^n$
- المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ يُساوي:
- (أ) $3(2^n - 1)$
 - (ب) $(2^n - 1)$
 - (ج) $2(3^n - 1)$

النمرين 24: (06 نقاط) بكالوريا 2018 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماماً، حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث:

$$u_0 + u_1 = 30 \text{ و } u_0 \times u_2 = 576$$

- (1) بيّن أنّ $u_1 = 24$ ، ثم استنتج قيمة u_0 .
- (2) بيّن أنّ $q = 4$ ، ثم اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .
- (3) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$ ، ثم استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .
- (4) احسب 4^4 ، ثم تحقّق أنّ العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وعيّن رتبته.
- (5) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

النمرين 25: (06 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \frac{2}{5}n - 1$.

(1) بيّن أنّ المتتالية (u_n) حسابية أساسها $\frac{2}{5}$ يُطلب حساب حدّها الأول u_1 .

(2) عيّن رتبة الحد الذي قيمته 575.

(3) احسب قيمة المجموع S حيث: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{1440}$.

(4) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n = 4^{5u_n+6}$.

(أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_1 .

(ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

النمرين 26: (04 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) المتتالية الحسابية التي حدّها الأول u_0 وأساسها r .

(1) علماً أنّ: $u_0 + u_1 + u_2 = 6$ ، عيّن u_1 .

(2) علماً أنّ: $2u_0 - 3u_1 = -10$ ، عيّن الحد الأول u_0 ، ثم استنتج قيمة r أساس المتتالية (u_n) .

(3) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(4) عيّن قيمة n حتى يكون $u_n = 2018$.

(ب) أحسب الحد الخامس عشر للمتتالية (u_n) .

(5) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(6) عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون: $S_n = 96$.

النمرين 27: (06 نقاط) بكالوريا 2020 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لتكن (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_0 وأساسها r حيث: $u_2 - u_0 = 4$ و $u_1 + u_3 = 16$.

(1) احسب الحدّ u_2 ، ثم الحدّ u_0 واستنتج الأساس r للمتتالية (u_n) .

(2) أ. بيّن أنّ الحدّ العام للمتتالية (u_n) معرّف بـ: $u_n = 4 + 2n$.

ب. حدّد مع التبرير اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

(3) بيّن أنّ العدد 2020 حدّ من حدود المتتالية (u_n) ، محدّداً رُتبته.

(4) احسب المجموع S المعرّف بـ: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{1008}$.

النمرين 28: (06 نقاط) بكالوريا 2020 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لتكن (u_n) متتالية هندسية حدّها الأوّل u_1 ، حدودها موجبة تماما حيث: $u_3 \times u_5 = 2916$.

(1) احسب الحد u_4 .

(2) علما أنّ $u_3 = 18$ ، تحقّق أنّ أساس المتتالية (u_n) هو 3.

(3) احسب الحدّ الأوّل u_1 ، ثمّ اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(4) عيّن رتبة الحدّ الذي قيمته 1458. (لاحظ أنّ: $3^6 = 729$)

(5) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

الحمد لله.

جمع الأستاذ بوعزة مصطفى.

مجلة العبقرى في الرياضيات (المتتاليات العددية في البكالوريا)
حلول // الشعبة: الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

حلول تمارين البكالوريا: دول المتتاليات العددية // التحضير الجيد للبكالوريا // الشعبة: 03 آ

نجاحك بيدك

حل التمرين 01: (05 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n + 1$.

1/ حساب u_0, u_1, u_2 :

$$u_0 = 3(0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$u_1 = 3(1) + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$u_2 = 3(2) + 1 = 6 + 1 = 7$$

2/ تبين أن (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها: (نُبين أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت).

لدينا: $u_n = 3n + 1$ ومنه: $u_{n+1} = 3(n+1) + 1 = 3n + 3 + 1 = 3n + 4$

$$u_{n+1} - u_n = (3n + 4) - (3n + 1) = 3n + 4 - 3n - 1 = 3$$

إذن: (u_n) حسابية أساسها 3.

تعيين اتجاه تغير (u_n) :

بما أن: (u_n) حسابية أساسها موجب تماما ($3 > 0$)، فإنها: متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

3/ التحقق أن العدد 2008 حد من حدود المتتالية (u_n) :

$$u_n = 2008 \quad \text{نجد: } 3n + 1 = 2008$$

$$\text{ومنه: } 3n = 2008 - 1 \quad \text{أي: } n = \frac{2007}{3} = 669 \in \mathbb{N} \quad (u_{669} = 2008)$$

إذن: 2008 حد من حدود المتتالية (u_n) ، رتبته: $669 + 1 = 670$ لأن الحد الأول هو u_0 .

4/ حساب المجموع، $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{669}$:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{669} = (669 - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_{669}}{2} \right) = 670 \left(\frac{1 + 2008}{2} \right)$$

$$\text{ومنه: } S = 670 \left(\frac{2009}{2} \right) = 670(1004,5) = 673015$$

حل التمرين 02: (06 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية معرفة بـ: $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

1/ حساب u_2, u_3, u_4 :

$$u_2 = 2u_1 + 1 = 2(7) + 1 = 15$$

$$u_3 = 2u_2 + 1 = 2(15) + 1 = 31$$

$$u_4 = 2u_3 + 1 = 2(31) + 1 = 63$$

2) (v_n) متتالية معرفة كما يأتي: $v_n = u_n + 1$

لإثبات أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_1 :

ط01 نُبين أن الحاصل $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت.

لدينا: $v_n = u_n + 1$ ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = (2u_n + 1) + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1)$

$$\text{وعليه: } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2(u_n+1)}{u_n+1} = 2$$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدّها الأول $v_1 = u_1 + 1 = 7 + 1 = 8$

بكتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

بما أن: (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدّها الأول $v_1 = 8$ ، فإن: $v_n = v_1 \times q^{n-1}$

$$\text{بالتعويض نجد: } v_n = 8 \times 2^{n-1}$$

استنتاج u_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } v_n = u_n + 1 \text{ ومنه: } u_n = v_n - 1 = 8 \times 2^{n-1} - 1$$

ج- حساب S_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) = 8 \left(\frac{1-2^n}{1-2} \right) = \frac{8}{-1} (1-2^n)$$

$$\text{إذن: } S_n = 8(2^n - 1)$$

دعينا نعلم أن $S_n = 1016$:

$$8(2^n - 1) = 1016 \text{ معناه: } S_n = 1016$$

$$2^n - 1 = \frac{1016}{8} \text{ ومنه:}$$

$$2^n - 1 = 127 \text{ أي:}$$

$$\text{وعليه: } 2^n = 128 = 2^7 \text{ (لأن } 128 = 2^7 \text{)}$$

$$\text{إذن: } n = 7 \text{ (} S_7 = 1016 \text{)}$$

حل التمرين 03: (06 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها الأول $u_1 = 2$ وبالعلاقة $u_2 - 2u_5 = 19$

1) لحساب الأساس r للمتتالية (u_n) : (نكتب كل من u_2 و u_5 بدلالة الحد الأول u_1 المُعطى)

$$\text{حسب العلاقة } u_n = u_1 + (n-1)r \text{، نجد: } \begin{cases} u_2 = u_1 + (2-1)r = 2 + r \\ u_5 = u_1 + (5-1)r = 2 + 4r \end{cases}$$

$$\text{العلاقة } u_2 - 2u_5 = 19 \text{ تُصبح: } (2+r) - 2(2+4r) = 19$$

$$\text{ومنه: } 2+r-4-8r = 19$$

$$\text{وعليه: } -7r = 21 \text{ إذن: } r = \frac{21}{-7} = -3$$

ب- حساب الحد العاشر:

بما أن الحد الأول هو u_1 ، إذن الحد العاشر هو

$$u_{10} = u_1 + (10-1)r = u_1 + 9r = 2 + 9(-3) = 2 - 27 = -25$$

2) كتابة عبارة u_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } u_n = u_1 + (n-1)r \text{ ومنه: } u_n = 2 + (n-1)(-3) \text{ إذن: } u_n = -3n + 5$$

3) تبين أن العدد (-2008) هو حداً من حدود (u_n) :

$$\text{نضع: } u_n = -2008 \text{ نجد: } -3n + 5 = -2008$$

$$\text{ومنه: } -3n = -2008 - 5$$

مجلة العقبري في الرياضيات (المتاليات العددية في البكالوريا) حلول — الشعبة: الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

$$(u_{671} = -2008) \quad n = \frac{-2013}{-3} = 671 \in \mathbb{N} \text{ أي:}$$

إذن: (-2008) حد من حدود المتتالية (u_n) ، رتبته: 671 لأن الحد الأول هو u_1 .

4. حساب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{671}$:

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{671} = (671 - 1 + 1) \left(\frac{u_1 + u_{671}}{2} \right) = 671 \left(\frac{2 + (-2008)}{2} \right) \text{ لدينا:}$$

$$S = 671 \left(\frac{-2006}{2} \right) = 671(-1003) = -673013 \text{ ومنه:}$$

حل الثمرين 04: (07 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها موجب $(q > 0)$

1. تعيين أساس المتتالية (u_n) وحدتها الأول u_0 علماً أن: $u_3 = 144$ و $u_5 = 576$:

$$\text{لدينا: } u_n = u_p \times q^{n-p} \text{ ومنه: } u_5 = u_3 \times q^{5-3}$$

$$576 = 144 \times q^2 \text{ وعليه:}$$

$$q^2 = \frac{576}{144} = 4 \text{ ومنه:}$$

$$\text{أي: } q = \sqrt{4} = 2 > 0 \text{ (مقبول) أو } q = -\sqrt{4} = -2 \text{ (مرفوض)}$$

$$\text{إذن: } q = 2$$

تعيين الحد الأول u_0 :

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 \times q^n \text{ ومنه: } u_3 = u_0 \times q^3 \text{ إذن: } u_0 = \frac{u_3}{q^3} = \frac{144}{2^3} = \frac{144}{8} = 18$$

$$\text{أو: } u_5 = u_0 \times q^5 \text{ نجد: } u_0 = \frac{u_5}{q^5} = \frac{576}{2^5} = \frac{576}{32} = 18$$

2. التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 18 \times 2^n$:

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 \times q^n \text{ ومنه: } u_n = 18 \times 2^n$$

3. حساب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$:

$$\text{لدينا: } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = 18 \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \right) = \frac{18}{-1} (1 - 2^{n+1})$$

$$\text{ومنه: } S_n = -18(1 - 2^{n+1}) = 18(2^{n+1} - 1)$$

استنتاج قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 1134$:

$$S_n = 1134 \text{ معناه: } 18(2^{n+1} - 1) = 1134$$

$$\text{ومنه: } 2^{n+1} - 1 = \frac{1134}{18}$$

$$\text{أي: } 2^{n+1} - 1 = 63$$

$$\text{ومنه: } 2^{n+1} = 64 = 2^6$$

$$\text{وعليه: } n + 1 = 6 \text{، إذن: } n = 5 \text{ (} S_5 = 1134 \text{)}$$

حل الثمرين 05: (05 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بالحددين: $u_{10} = 31$ و $u_{15} = 46$.

1. تعيين أساس المتتالية (u_n) :

$$\text{لدينا: } u_n = u_p + (n - p)r \text{، ومنه: } u_{15} = u_{10} + (15 - 10)r$$

وعليه: $46 = 31 + 5r$ وبالتالي: $5r = 46 - 31$ إذن: $r = \frac{15}{5} = 3$

الطريقة 02: $r = \frac{u_n - u_p}{n - p} = \frac{u_{15} - u_{10}}{15 - 10} = \frac{46 - 31}{5} = \frac{15}{5} = 3$

تعيين الحد الأول u_0 :

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $u_{10} = u_0 + 10r$

وعليه: $u_0 = u_{10} - 10r = 31 - 10(3) = 31 - 30 = 1$

أو $u_{15} = u_0 + 15r$ ومنه: $u_n = u_0 + nr$

وعليه: $u_0 = u_{15} - 15r = 46 - 15(3) = 46 - 45 = 1$

2. كتابة u_n بدلالة n : (عبارة الحد العام)

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ، إذن: $u_n = 1 + 3n$

3. تبين أن 6028 حد من حدود المتتالية (u_n) :

نضع: $u_n = 6028$ نجد: $6028 = 1 + 3n$

ومنه: $6027 = 3n$ وبالتالي: $n = \frac{6027}{3} = 2009 \in \mathbb{N}$ (و $u_{2009} = 6028$)

إذن: العدد 6028 حد من حدود المتتالية (u_n) .

4. حساب المجموع S ، $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2009}$:

لدينا: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2009} = (2009 - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_{2009}}{2} \right) = (2010) \left(\frac{1 + 6028}{2} \right)$

ومنه: $S = (2010) \left(\frac{6029}{2} \right) = (2010)(3014,5) = 6059145$

(II) لدينا: (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2 \times 8^n$

1. تبين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 :

نُبين أن حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت:

لدينا: $v_n = 2 \times 8^n$ ومنه: $v_{n+1} = 2 \times 8^{n+1}$ وبالتالي: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \times 8^{n+1}}{2 \times 8^n} = \frac{8^{n+1}}{8^n} = \frac{8^n \times 8^1}{8^n} = 8$

إذن: (v_n) هندسية، أساسها $q = 8$ وحدها الأول $v_0 = 2 \times 8^0 = 2 \times 1 = 2$

2. حساب بدلالة n المجموع S' ، $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_n$:

لدينا: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = 2 \left(\frac{1 - 8^{n+1}}{1 - 8} \right) = \frac{2}{-7} (1 - 8^{n+1})$

ومنه: $S' = \frac{2}{7} (8^{n+1} - 1)$

حل التمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية هندسية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، أساسها q وحدها الأول u_0 حيث:

$u_1 = 6$ و $u_4 = 48$

1. أ. حساب الأساس والحد الأول للمتتالية (u_n) :

نعلم أن $u_n = u_p \times q^{n-p}$ ومنه: $u_4 = u_1 \times q^{4-1}$

ويكون: $48 = 6 \times q^3$

وعليه: $q^3 = \frac{48}{6} = 8$ (وبما أن $8 = 2^3$ فإن $q^3 = 2^3$) إذن: $q = 2$

حساب الحد الأول u_0 :

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $u_1 = u_0 \times q^1$ ويكون: $u_0 = \frac{u_1}{q^1} = \frac{6}{2} = 3$

أو: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $u_4 = u_0 \times q^4$ ويكون: $u_0 = \frac{u_4}{q^4} = \frac{48}{16} = 3$

بإستنتاج أن عبارة الحد العام لـ (u_n) هي: $u_n = 3 \times 2^n$

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ، إذن: $u_n = 3 \times 2^n$

2. أعلماً أن $2^8 = 256$ ، تبين أن العدد 768 هو حد من حدود المتتالية (u_n) :

نضع: $u_n = 768$ نجد: $3 \times 2^n = 768$

ومنه: $2^n = \frac{768}{3} = 256$

وعليه: $2^n = 2^8$ (لأن $2^8 = 256$)

وبالتالي: $n = 8 \in \mathbb{N}$ ، إذن: 768 حد من حدود المتتالية (u_n) .

بحساب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_7$

لدينا: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_7 = u_0 \left(\frac{1 - q^{7-0+1}}{1 - q} \right) = 3 \left(\frac{1 - 2^8}{1 - 2} \right) = \frac{3}{-1} (1 - 256)$

ومنه: $S = -3(-255) = 765$

3. لدينا: (v_n) متتالية معرفة بـ: $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = 2v_n - 1 \end{cases}$

لحساب v_3, v_2, v_1

$v_1 = 2v_0 - 1 = 2(4) - 1 = 7$

$v_2 = 2v_1 - 1 = 2(7) - 1 = 13$

$v_3 = 2v_2 - 1 = 2(13) - 1 = 25$

بالبرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 3 \times 2^n + 1$

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$.

المرحلة 01: (من أجل $n = 0$)، لدينا: $v_0 = 3 \times 2^0 + 1 = 3(1) + 1 = 4$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

• نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $v_n = 3 \times 2^n + 1$ (فرضية التراجع)

• ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $v_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1$

البرهان: لدينا:

$v_{n+1} = 2v_n - 1 = 2(3 \times 2^n + 1) - 1 = 2^1 \times 3 \times 2^n + 2 - 1 = 3 \times 2^{n+1} + 1$

إذن: $P(n+1)$ صحيحة.

الخلاصة: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 3 \times 2^n + 1$

بحساب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_7$

نلاحظ أن $v_n = 3 \times 2^n + 1 = u_n + 1$

ومنه: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_7 = (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \dots + (u_7 + 1)$

وعليه: $S' = (u_0 + u_1 + \dots + u_7) + 8 = S + 8 = 765 + 8 = 773$

حل الثمرين 07: (06 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(أ) لدينا: (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول u_0 بحيث، $u_0 + u_3 = 28$

1. حساب u_0 :

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $u_3 = u_0 \times q^3 = u_0 \times 3^3 = 27u_0$
 العلاقة $u_0 + u_3 = 28$ تُصبح $u_0 + 27u_0 = 28$ ومنه: $28u_0 = 28$ إذن: $u_0 = 1$

كتابة الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ إذن: $u_n = 3^n$

2. حساب المجموع، $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_9$:

لدينا: $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_9 = u_0 \left(\frac{1-q^{9-0+1}}{1-q} \right) = 1 \left(\frac{1-3^{10}}{1-3} \right) = 1 \left(\frac{1-3^{10}}{-2} \right)$

ومنه: $S_1 = \frac{1}{-2} (1 - 3^{10}) = \frac{1}{2} (3^{10} - 1) = \frac{1}{2} (59048) = 29524$

(ب) لدينا: (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام، $v_n = 1 - 5n$

1. تبيان أنّ (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها: (نُبين أنّ الفرق $v_{n+1} - v_n$ عدد ثابت)

لدينا: $v_n = 1 - 5n$ ومنه: $v_{n+1} = 1 - 5(n+1) = 1 - 5n - 5 = -4 - 5n$

وعليه: $v_{n+1} - v_n = (-4 - 5n) - (1 - 5n) = -4 - 5n - 1 + 5n = -5$

أي: $v_{n+1} = v_n - 5$

إذن: (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$

استنتاج اتجاه تغيّرها:

بما أنّ (v_n) حسابية أساسها $(r = -5 < 0)$ سالبة تماماً فإنّها متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$.

2. حساب المجموع، $S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_9$:

لدينا: $S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_9 = (9 - 0 + 1) \left(\frac{v_0 + v_9}{2} \right) = 10 \left(\frac{1 - 44}{2} \right) = \frac{10}{2} (1 - 44)$

ومنه: $S_2 = 5(-43) = -215$

(ملاحظة: $v_9 = 1 - 5(9) = 1 - 45 = -44$)

(ج) لدينا: المتتالية (k_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام، $k_n = 1 + 3^n - 5n$

التحقّق أنّ $k_n = u_n + v_n$:

لدينا: $\begin{cases} u_n = 3^n \\ v_n = 1 - 5n \end{cases}$ ومنه: $k_n = 1 + 3^n - 5n = 3^n + (1 - 5n) = u_n + v_n$

حساب المجموع، $S = k_0 + k_1 + \dots + k_9$:

لدينا: $k_n = u_n + v_n$

ومنه: $S = k_0 + k_1 + \dots + k_9 = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \dots + (u_9 + v_9)$

وعليه: $S = (u_0 + u_1 + \dots + u_9) + (v_0 + v_1 + \dots + v_9) = S_1 + S_2$

إذن: $S = 29524 - 215 = 29309$

حل الثمرين 08: (06 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بحدّيهما العام، $u_n = -2n$ و $v_n = 3^{-2n}$

(نلاحظ أنّ $v_n = 3^{u_n}$)

تعيين الاقتراح الصحيح مع التعليل:

(1) لدينا: $u_n = -2n$ ومنه: $u_{n+1} = -2(n+1) = -2n - 2$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = (-2n - 2) - (-2n) = -2n - 2 + 2n = -2$

إذن: (u_n) هي متتالية حسابية.

مجلة العقبري في الرياضيات (الماتليات العددية في البكالوريا) حلول — الشعبة: الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

(2) بمأن (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ ، فحدها الأول هو u_0 ، وبالتالي: حدها الخامس والأربعون هو:

$$u_{44} = -2(44) = -88$$

(3) حسب السؤال (1) لدينا: (u_n) متتالية حسابية،

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right) = (n + 1) \left(\frac{0 + (-2n)}{2} \right)$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n + 1) \left(\frac{-2n}{2} \right) = (n + 1)(-n) = -n^2 - n$$

(4) (v_n) متتالية هندسية أساسها: $q = \frac{v_{n+1}}{v_n}$

$$v_{n+1} = 3^{-2(n+1)} = 3^{-2n-2} = 3^{-2n+(-2)} = 3^{-2n} \times 3^{-2} \text{ ومنه: } v_n = 3^{-2n}$$

$$q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{-2n} \times 3^{-2}}{3^{-2n}} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

(5) المتتالية (v_n) متزايدة تماماً، لأن:

$$v_{n+1} - v_n = (3^{-2n} \times 3^{-2}) - (3^{-2n}) = 3^{-2n}(3^{-2} - 1) = 3^{-2n} \left(\frac{1}{9} - 1 \right) = \frac{-8}{9} \times 3^{-2n} < 0$$

حل النمرين 09: (06 فقط) بكالوريا 2012 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: a, b, c ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة أساسها r حيث: $a + b + c = 9$.

1.1 حساب b :

حسب خاصية الوسط الحسابي لدينا: $a + c = 2b$.

$$a + b + c = 9 \text{ يُصبح } 2b + b = 9 \text{ ومنه: } 3b = 9 \text{ إذن: } b = 3$$

كتابة a و c بدلالة r :

$$\begin{cases} a = 3 - r \\ c = 3 + r \end{cases} \text{ وبالتالي: } \begin{cases} b = a + r \\ c = b + r \end{cases} \text{ إذن: } \begin{cases} a = 3 - r \\ c = 3 + r \end{cases}$$

(ب) علماً أن: $a \times c = -16$ **تعيين الأساس r :**

لدينا مما سبق: $a = 3 - r$ و $c = 3 + r$

$$a \times c = -16 \text{ تُكافئ: } (3 - r) \times (3 + r) = -16$$

$$3^2 - r^2 = -16 \text{ ومنه:}$$

$$-r^2 = -25 \text{ وعليه:}$$

$$r^2 = 25 \text{ ويكون:}$$

$$\text{وبالتالي: } r = \sqrt{25} = 5 \text{ أو } r = -\sqrt{25} = -5 \text{ (مرفوض)}$$

$$\text{إذن: } r = 5 \text{ (لأن المتتالية حسابية متزايدة)}$$

استنتاج a و c :

$$\text{لدينا: } \begin{cases} a = 3 - r \\ c = 3 + r \end{cases} \text{ و } r = 5 \text{ إذن: } \begin{cases} a = -2 \\ c = 8 \end{cases}$$

(2) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = -2$ وأساسها 5.

$$\text{نلاحظ أن } \begin{cases} u_0 = -2 = a \\ u_2 = c = 8 \end{cases} \text{ إذن: } \begin{cases} u_1 = b = 3 \\ u_2 = c = 8 \end{cases}$$

أ. التعبير عن الحد العام u_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 + nr \text{ إذن: } u_n = -2 + 5n$$

(ب) حساب u_{15} :

لدينا: $u_{15} = -2 + 5(15) = -2 + 75 = 73$.

استنتاج المجموع، $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{15}$.

لدينا: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{15} = (15 - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_{15}}{2} \right) = 16 \left(\frac{-2 + 73}{2} \right)$

ومنه: $S = 16(35,5) = 568$.

3. لدينا: (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $8v_n - u_n = 0$.

حساب المجموع، $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{15}$.

لدينا: $8v_n - u_n = 0$ ومنه: $v_n = \frac{1}{8}u_n$

وبالتالي: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{15} = \frac{1}{8}u_0 + \frac{1}{8}u_1 + \dots + \frac{1}{8}u_{15}$

ومنه: $S' = \frac{1}{8}(u_0 + u_1 + \dots + u_{15}) = \frac{1}{8}S = \frac{1}{8}(568) = 71$

حل النمرين 10: (06 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r ، حدّها الأول u_1 و $u_3 = 7$.

1. أ. حساب بدلالة r الجداين $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$

لدينا: $u_n = u_p + (n - p)r$

$$\begin{cases} u_1 = u_3 + (1 - 3)r = 7 - 2r \\ u_2 = u_3 + (2 - 3)r = 7 - r \\ u_4 = u_3 + (4 - 3)r = 7 + r \\ u_5 = u_3 + (5 - 3)r = 7 + 2r \end{cases}$$

ومنه: $u_n = u_3 + (n - 3)r$ وعليه:

وبالتالي: $T_1 = u_1 \times u_5 = (7 - 2r)(7 + 2r) = 7^2 - (2r)^2 = 49 - 4r^2$

و $T_2 = u_2 \times u_4 = (7 - r)(7 + r) = 7^2 - (r)^2 = 49 - r^2$

ب. تعيين الأساس r بحيث، $T_2 - T_1 = 27$

لدينا: $T_2 - T_1 = 27$ تكافئ: $(49 - r^2) - (49 - 4r^2) = 27$

ومنه: $49 - r^2 - 49 + 4r^2 = 27$

وعليه: $r^2 = \frac{27}{3}$

أي: $r^2 = 9$

وبالتالي: $r = -\sqrt{9} = -3$ أو $r = \sqrt{9} = 3$

وبما أن (u_n) حسابية متزايدة (أساسها موجب)، فإن: $r = 3$

2. بوضع $r = 3$.

أ. كتابة عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n

لدينا: (u_n) متتالية حسابية، أساسها $r = 3$ ، حدّها الأول $u_1 = 7 - 2(3) = 1$

فإن: $u_n = u_1 + (n - 1)r$ بالتعويض نجد: $u_n = 1 + (n - 1)(3)$ إذن: $u_n = 3n - 2$

ب. $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ (n عدد طبيعي غير معدوم)

تبيان أن، $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$

لدينا: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n - 1 + 1) \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right) = n \left(\frac{1 + (3n - 2)}{2} \right) = n \left(\frac{3n - 1}{2} \right)$

ومنه: $S_n = \frac{n(3n - 1)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$

(ج) إيجاد العدد الطبيعي n بحيث، $S_n = 145$:

$$\frac{3n^2 - n}{2} = 145 \text{ معناه: } S_n = 145$$

$$3n^2 - n - 290 = 0 \text{ ومنه:}$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-290) = 1 + 3480 = 3481 > 0 \text{ مميزها:}$$

للمعادلة حلين متمايزين هما:

$$n' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{3481}}{2(3)} = \frac{1+59}{6} = \frac{60}{6} = 10 \in \mathbb{N}$$

$$n'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{3481}}{2(3)} = \frac{1-59}{6} = \frac{-29}{3} \notin \mathbb{N} \text{ و}$$

إذن: $(S_{10} = 145)$ $n = 10$

3. أ. كتابة الحد u_{n+5} بدلالة n :

$$\text{لدينا: } u_n = 3n - 2$$

$$\text{ومنه: } u_{n+5} = 3(n+5) - 2 = 3n + 15 - 2 = 3n + 13 \text{ إذن: } u_{n+5} = 3n + 13$$

(ب) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$:

$$\text{لدينا: } \frac{u_{n+1}}{n} = \frac{3n+13}{n} = \frac{3n}{n} + \frac{13}{n} = 3 + \frac{13}{n}$$

(ج) استنتاج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعياً:

$$3 + \frac{13}{n} \in \mathbb{N} \text{ معناه: } \frac{u_{n+1}}{n} \in \mathbb{N}$$

$$\frac{13}{n} \in \mathbb{N} \text{ ومنه:}$$

$$\text{وعليه: } n \in D_{13} \text{ أي: } n \in \{1; 13\} \text{ (قيم } n \text{ هي قواسم العدد 13)}$$

إذن: $n = 1$ أو $n = 13$.

حل الثمرين 11: (06 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (v_n) متتالية هندسية حدّها الأول $v_0 = 2$ وأساسها 3.

1. أ. التعبير عن v_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } v_n = v_0 \times q^n \text{ إذن: } v_n = 2 \times 3^n$$

(ب) حساب بدلالة n الفرق $v_{n+1} - v_n$:

$$\text{لدينا: } v_n = 2 \times 3^n \text{ ومنه: } v_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 2 \times 3^n \times 3^1$$

$$\text{وعليه: } v_{n+1} - v_n = (6 \times 3^n) - (2 \times 3^n) = 4 \times 3^n$$

$$\text{إذن: } v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n$$

استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (v_n) :

$$\text{بما: } v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n > 0 \text{ فإن: } (v_n) \text{ متزايدة تماماً على } \mathbb{N}.$$

2. $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ ، n عدد طبيعي غير معدوم.

أ. حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$\text{لدينا: } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \left(\frac{1 - q^{(n-1)-0+1}}{1-q} \right) = 2 \left(\frac{1 - 3^n}{1-3} \right) = \frac{2}{-2} (1 - 3^n)$$

$$\text{ومنه: } S_n = -(1 - 3^n) = 3^n - 1$$

(ب) تعيين قيمة العدد الطبيعي n بحيث، $S_n = 80$:

$$S_n = 80 \text{ معناه: } 3^n - 1 = 80$$

$$\text{ومنه: } 3^n = 81 \text{ (لدينا: } 81 = 3^4 \text{)}$$

$$\text{أي: } 3^n = 3^4 \text{، إذن: } \boxed{n = 4} \text{ (} S_4 = 80 \text{)}$$

ج) اثبات بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$.

المرحلة 01: من أجل $n = 0$ ، لدينا: $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ و 0 يقبل القسمة على 2، إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

• نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 ($3^n - 1 = 2k$) (فرضية التراجع)

• ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $3^{n+1} - 1$ يقبل القسمة على 2 ($3^{n+1} - 1 = 2k'$).

البرهان:

$$\text{لدينا: } 3^{n+1} - 1 = 3^n \times 3^1 - 1 = (2k + 1) \times 3 - 1 = 6k + 3 - 1 = 6k + 2$$

$$\text{ومنه: } 3^{n+1} - 1 = 2(3k + 1) = 2k' \text{ (حيث } k' = 3k + 1 \text{)}$$

بالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

حل التمرين 12: (06 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث، $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$.

1- حساب u_0 :

نكتب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 بدلالة الحد الأول u_0

$$\begin{cases} u_1 = u_0 + r = u_0 + 5 \\ u_2 = u_0 + 2r = u_0 + 10 \\ u_3 = u_0 + 3r = u_0 + 15 \end{cases} \text{ لدينا: } u_n = u_0 + nr \text{ ومنه: } \begin{cases} u_1 = u_0 + 5 \\ u_2 = u_0 + 10 \\ u_3 = u_0 + 15 \end{cases}$$

$$u_0 + (u_0 + 5) + (u_0 + 10) + (u_0 + 15) = 34 \text{ نُصبح: } u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$$

$$\text{ومنه: } 4u_0 = 34 - 30$$

$$\text{ويكون: } 4u_0 = 4$$

$$\text{إذن: } \boxed{u_0 = 1}$$

2- تبين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 5n + 1$:

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 + nr \text{، إذن: } \boxed{u_n = 1 + 5n}$$

3- تعيين العدد الطبيعي n بحيث، $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$:

$$\text{لدينا: } u_n = 5n + 1 \text{ ومنه: } u_{n+1} = 5(n+1) + 1 = 5n + 6$$

$$\text{لدينا: } u_{n+1} + u_n - 8n = 4033 \text{ معناه: } (5n + 6) + (5n + 1) - 8n = 4033$$

$$\text{ومنه: } 7 + 2n = 4033$$

$$\text{وعليه: } 2n = 4026 \text{ إذن: } \boxed{n = 2013}$$

4- حساب المجموع، $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2013}$:

$$\text{لدينا: } u_{2013} = 5(2013) + 1 = 10066$$

$$\text{ومنه: } S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2013} = (2013 - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_{2013}}{2} \right) = \frac{2014}{2} (1 + 10066)$$

$$\text{وعليه: } S = 1007(10067) = 10137469$$

5- لدينا: المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة، $v_n = 2u_n + 1$.

أ) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (v_n) : (ندرس إشارة الفرق $v_{n+1} - v_n$)

مجلة العقبري في الرياضيات (المتتاليات العددية في البكالوريا) حلول ————— الشعبة: الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

لدينا: $v_n = 2u_n + 1$ ولدينا: $u_{n+1} = u_n + 5$ لأن (u_n) حسابية أساسها 5.

نجد: $v_{n+1} = 2u_{n+1} + 1 = 2(u_n + 5) + 1 = 2u_n + 11$

ومنه: $v_{n+1} - v_n = (2u_n + 11) - (2u_n + 1) = 10 > 0$

إذن: (v_n) متزايدة تماما.

(ب) حساب المجموع، $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{2013}$:

لدينا: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{2013} = (2u_0 + 1) + (2u_1 + 1) + \dots + (2u_{2013} + 1)$

ومنه: $S' = 2(u_0 + u_1 + \dots + u_{2013}) + 1(2013 - 0 + 1) = 2S + 2014$

إذن: $S' = 20276951$.

حل الثميرين 13: (06 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

تعيين الاقتراح الصحيح، مع التعليل:

(1) (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدها $u_2 = 1$.

الحد العام للمتتالية (u_n) هو:

الطريقة 01: $u_n = u_2 + (n - 2)r = 1 + (n - 2)(3) = 1 + 3n - 6 = -5 + 3n$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ج) $u_n = -5 + 3n$.

الطريقة 02:

• في حالة: $u_n = 1 + 3n$ ، نجد: $u_2 = 1 + 3(2) = 7 \neq 1$.

• في حالة: $u_n = 7 + 3n$ ، نجد: $u_2 = 7 + 3(2) = 13 \neq 1$.

• في حالة: $u_n = -5 + 3n$ ، نجد: $u_2 = -5 + 3(2) = 1$.

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ج) $u_n = -5 + 3n$.

(2) عدد طبيعي،

المجموع $1 + 2 + 3 + \dots + n$ هو عبارة عن مجموع n حد من متتالية حسابية حدّها الأول يساوي 1

وأساسها 1 لتكن هذه المتتالية (u_n) نضع: $u_1 = 1$ نجد: $u_n = n$

ومنه: $1 + 2 + 3 + \dots + n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = (n - 1 + 1) \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right)$

وعليه: $1 + 2 + 3 + \dots + n = n \left(\frac{1+n}{2} \right) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (أ) $\frac{n^2+n}{2}$.

(3) عدد حقيقي.

الأعداد $x - 2$ ، x ، $x + 1$ بهذا الترتيب **حدودا متعاقبة** لمتتالية هندسية، معناه: $(x - 2) \times (x + 1) = x^2$

ومنه: $x^2 + x - 2x - 2 = x^2$

وعليه: $-x - 2 = 0$

وبالتالي: $x = -2$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ج) $x = -2$.

(4) (v_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ ، حدّها العام $v_n = 2 \times 3^{n+1}$

أساس المتتالية (v_n) هو:

الطريقة 01: $q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \times 3^{(n+1)+1}}{2 \times 3^{n+1}} = \frac{2 \times 3^{n+1} \times 3^1}{2 \times 3^{n+1}} = 3$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ب) 3.

الطريقة 02: لدينا: $v_n = 2 \times 3^{n+1}$ ومنه: $v_{n+1} = 2 \times 3^{(n+1)+1} = 2 \times 3^{(n+1)} \times 3^1 = v_n \times 3$

$$v_{n+1} = 3v_n \text{ أي:}$$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح ب) 3.

حل النمرين 14: (06 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (v_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي، $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 5v_n + 4 \end{cases}$

1) حساب v_1, v_2, v_3 :

$$v_1 = 5v_0 + 4 = 5(1) + 4 = 5 + 4 = 9$$

$$v_2 = 5v_1 + 4 = 5(9) + 4 = 45 + 4 = 49$$

$$v_3 = 5v_2 + 4 = 5(49) + 4 = 245 + 4 = 249$$

2) لدينا: $u_n = v_n + 1$

لتبيان أن (u_n) متتالية هندسية أساسها 5 $q = 5$ وحدها الأول $u_0 = 2$:

ط01) نبين أن الحاصل $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت.

$$u_{n+1} = v_{n+1} + 1 = (5v_n + 4) + 1 = 5v_n + 5 = 5(v_n + 1) \text{ ومنه: } u_{n+1} = 5u_n$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5(v_n + 1)}{v_n + 1} = 5 \text{ وعليه:}$$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها 5 $q = 5$ وحدها الأول $u_0 = 2$

بكتابة u_n بدلالة n :

(u_n) هندسية أساسها 5 وحدها الأول $u_0 = 2$ ، عبارة الحد العام هي: $u_n = u_0 \times q^n$

بالتعويض نجد: $u_n = 2 \times 5^n$

استنتاج v_n بدلالة n :

$$v_n = u_n - 1 = 2 \times 5^n - 1 \text{ إذن:}$$

ج- تحليل العدد 1250 إلى جداء عوامل أولية:

$$\begin{array}{r|l} 1250 & 2 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{إذن: } 1250 = 2 \times 5^4$$

استنتاج أن 1250 حد من حدود المتتالية (u_n) :

$$\text{نضع: } u_n = 1250 \text{ نجد: } 2 \times 5^n = 2 \times 5^4$$

$$\text{أي: } n = 4 \in \mathbb{N} \text{ (} u_4 = 1250 \text{)}$$

إذن: 1250 حد من حدود المتتالية (u_n) .

3) أ- حساب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

$$\text{لدينا: } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \left(\frac{1 - q^{(n-1)-0+1}}{1 - q} \right) = 2 \left(\frac{1 - 5^n}{1 - 5} \right) = \frac{2}{-4} (1 - 5^n)$$

$$\text{إذن: } S_n = \frac{1}{2} (5^n - 1)$$

ب- حساب بدلالة n المجموع S'_n : $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

$$\text{لدينا: } u_n = v_n + 1 \text{ ومنه: } v_n = u_n - 1$$

مجلة البقري في الرياضيات (الماتليات العددية في البكالوريا) حلول ————— الشعبة: الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

وعليه: $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = (u_0 - 1) + (u_1 - 1) + \dots + (u_{n-1} - 1)$
 ويكون: $S'_n = (u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}) - 1[(n-1) - 0 + 1] = S_n - n$
 إذن: $S'_n = \frac{1}{2}(5^n - 1) - n = \frac{1}{2}(5^n - 1) - n$

حل النمرين 15: (07 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية هندسية حدّها الأول u_0 وأساسها q ، حيث $u_0 = 2$ و $q = 3$.

(1) حساب u_1 و u_2 :

بمأن (u_n) متتالية هندسية فإن: $u_{n+1} = u_n \times q$

وبالتالي: $u_2 = u_1 \times q = 6 \times 3 = 18$ و $u_1 = u_0 \times q = 2 \times 3 = 6$

(2) كتابة u_n بدلالة n :

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $u_n = 2 \times 3^n$

استنتاج u_5 : $u_5 = 2 \times 3^5 = 2 \times 243 = 486$

(3) تعيين اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) : (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

لدينا: $u_n = 2 \times 3^n$ ومنه: $u_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 2 \times 3^n \times 3^1$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = (6 \times 3^n) - (2 \times 3^n) = 4 \times 3^n > 0$

إذن: (u_n) متزايدة تماما.

(4) أ) حسب بدلالة n المجموع S_n حيث، $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$:

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = u_0 \left(\frac{1 - q^{(n-1) - 0 + 1}}{1 - q} \right) = 2 \left(\frac{1 - 3^n}{1 - 3} \right)$

ومنه: $S_n = \frac{2}{-2}(1 - 3^n) = -(1 - 3^n) = 3^n - 1$

ب) استنتج قيمة المجموع، $2 + 6 + 18 + \dots + 486$:

لدينا: $2 + 6 + 18 + \dots + 486 = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_5 = 3^6 - 1 = 728$

(5) أ) تعيين باقي القسمة الإقليدية على 5 لكل عدد من الأعداد $3^4, 3^3, 3^2, 3$:

لدينا: $3 \equiv 3[5]$ ، إذن: باقي قسمة 3 على 5 هو 3.

$3^2 \equiv 4[5]$ ، إذن: باقي قسمة 3^2 على 5 هو 4.

$3^3 \equiv 2[5]$ ، إذن: باقي قسمة 3^3 على 5 هو 2.

$3^4 \equiv 1[5]$ ، إذن: باقي قسمة 3^4 على 5 هو 1.

ب) استنتج أنّه لكل k من $\mathbb{N}$ ، $3^{4k} \equiv 1[5]$:

لدينا: $3^4 \equiv 1[5]$ ومنه: $(3^4)^k \equiv (1)^k[5]$ و $(k \in \mathbb{N})$ وعليه: $3^{4k} \equiv 1[5]$

(6) تعيين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5:

$3^n - 1 \equiv 0[5]$ معناه: $3^n \equiv 1[5]$

ومنه: $3^n \equiv 1[5]$

وحسب نتيجة السؤال (5) ب)، فإن: $n = 4k$ (حيث $k \in \mathbb{N}$).

حل النمرين 16: (06 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_1 وأساسها r ، حيث $u_2 = \frac{1}{2}$ و $u_1 - u_3 = 5$.

1) أ) تبيان أن: $u_1 + u_3 = 1$

حسب خاصية الوسط الحسابي، $u_1 + u_3 = 2u_2 = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

ب) تعيين الحد الأول u_1 ؛ ثم استنتاج أن $r = -\frac{5}{2}$

لدينا: $\begin{cases} u_1 - u_3 = 5 \\ u_1 + u_3 = 1 \end{cases}$ بالجمع طرفاً لطرف نجد: $(u_1 - u_3) + (u_1 + u_3) = 5 + 1$

ومنه: $2u_1 = 6$ وعليه: $u_1 = \frac{6}{2} = 3$

استنتاج أن $r = -\frac{5}{2}$ لدينا: $r = u_2 - u_1 = \frac{1}{2} - 3 = \frac{1-6}{2} = -\frac{5}{2}$

2) كتابة u_n بدلالة n

لدينا: $u_n = u_p + (n - p)r$ ومنه: $u_n = u_1 + (n - 1)r$

بالتعويض نجد: $u_n = 3 + (n - 1)\left(-\frac{5}{2}\right)$

وبالتالي: $u_n = -\frac{5}{2}n + 3 + \frac{5}{2}$ إذن: $u_n = -\frac{5}{2}n + \frac{11}{2}$

3) أ) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

لدينا: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n - 1 + 1)\left(\frac{u_1 + u_n}{2}\right) = (n)\left(\frac{3 + \left(-\frac{5}{2}n + \frac{11}{2}\right)}{2}\right)$

ومنه: $S_n = \frac{n}{2}\left(3 - \frac{5}{2}n + \frac{11}{2}\right) = \frac{n}{2}\left(-\frac{5}{2}n + \frac{17}{2}\right) = \frac{-5n^2 + 17n}{4}$

ب) عَيِّن قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $S_n = -\frac{657}{2}$

$S_n = -\frac{657}{2}$ معناه: $\frac{-5n^2 + 17n}{4} = -\frac{657}{2}$

ومنه: $2(-5n^2 + 17n) = 4(-657)$

وعليه: $-10n^2 + 34n + 2628 = 0$

مميزها: $\Delta = (34)^2 - 4(-10)(2628) = 1156 + 105120 = 106276 > 0$

للمعادلة حلين متميزين هما:

$n' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-34 + \sqrt{106276}}{2(-10)} = \frac{-34 + 326}{-20} = \frac{292}{-20} = \frac{-146}{10} \notin \mathbb{N}$

$n'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-34 - \sqrt{106276}}{2(-10)} = \frac{-34 - 326}{-20} = \frac{-360}{-20} = 18 \in \mathbb{N}$

إذن: $(n = 18) \left(S_{18} = -\frac{657}{2} \right)$

4) $T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n$ عدد طبيعي غير معدوم،

أ) التحقق أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، $(n + 2)(9 - 5n) = -5n^2 - n + 18$

لدينا: $(n + 2)(9 - 5n) = 9n - 5n^2 + 18 - 10n = -5n^2 - n + 18$

ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع، إثبات أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، $T_n = \frac{1}{6}n(n + 1)(14 - 5n)$

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 1$

الطرف الأول: $T_1 = 1u_1 = u_1 = 3$

الطرف الثاني: $\frac{1}{6}(1)((1) + 1)(14 - 5(1)) = \frac{2(9)}{6} = 3$ إذن: $P(1)$ صحيحة.

- نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$ (فرضية التراجع)
- ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$

البرهان: لدينا:

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + (n+1)u_{n+1} \\ &= \underbrace{u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n}_{T_n} + (n+1)u_{n+1} \\ &= T_n + (n+1)u_{n+1} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + (n+1)u_{n+1} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + (n+1)\left(-\frac{5}{2}n+3\right) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)[n(14-5n) + (-15n+18)] \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(-5n^2 - n + 18) \end{aligned}$$

حسب السؤال أ) نجد: $T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$

إذن: $P(n+1)$ صحيحة.

الخلاصة: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$

حل النمرين 17: (07 نقاط) بكالوريا 2016 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل عدد طبيعي n بـ: $u_n = 3n - 2$.

1) حساب u_0, u_1, u_2 و u_3 :

$$\begin{aligned} u_0 &= 3(0) - 2 = 0 - 2 = -2 \\ u_1 &= 3(1) - 2 = 3 - 2 = 1 \\ u_2 &= 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4 \\ u_3 &= 3(3) - 2 = 9 - 2 = 7 \end{aligned}$$

2) تبين أن المتتالية (u_n) حسابية وتعيين أساسها: (نبين أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت)

$$\text{لدينا: } u_n = 3n - 2 \text{ ومنه: } u_{n+1} = 3(n+1) - 2 = 3n + 3 - 2 = 3n + 1$$

$$\text{وعليه: } u_{n+1} - u_n = (3n + 1) - (3n - 2) = 3n + 1 - 3n + 2 = 3$$

إذن: (u_n) حسابية، أساسها $r = 3$.

3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

بما أن (u_n) حسابية أساسها موجب تماماً ($r = 3 > 0$) فإنها متزايدة تماماً.

4) تبين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n) وتعيين رتبته:

$$\text{نضع: } u_n = 1954 \text{ نجد: } 3n - 2 = 1954$$

$$\text{ومنه: } 3n = 1956$$

$$\text{وعليه: } n = \frac{1956}{3} = 652 \in \mathbb{N} \text{ (} u_{652} = 1954 \text{)}$$

إذن: 1954 حد من حدود المتتالية (u_n) ، رتبته: 653 (لأن الحد الأول هو u_0)

5) حساب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$:

$$\text{لدينا: } S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right) = (n + 1) \left(\frac{-2 + (3n - 2)}{2} \right)$$

مجلة البقري في الرياضيات (المتتاليات العددية في البكالوريا) حلول ————— الشعبة: الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

$$S_n = (n+1) \left(\frac{3n-4}{2} \right) = \frac{(n+1)(3n-4)}{2} = \frac{3n^2-n-4}{2}$$

ب) تعيين العدد n بحيث يكون $S_n = 328$

$$S_n = 328 \text{ معناه: } \frac{3n^2-n-4}{2} = 328$$

$$\text{ومنه: } 3n^2 - n - 4 = 2(328)$$

$$\text{وعليه: } 3n^2 - n - 660 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-660) = 1 + 7920 = 7921 > 0 \text{ مميزها:}$$

للمعادلة حلين متمايزين هما:

$$n' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{7921}}{2(3)} = \frac{1+89}{6} = \frac{90}{6} = 15 \in \mathbb{N}$$

$$n'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{7921}}{2(3)} = \frac{1-89}{6} = \frac{-88}{6} = \frac{-44}{3} \notin \mathbb{N}$$

إذن: $(S_{15} = 328) \Rightarrow n = 15$

حل التمرين 18: (06 نقاط) بكالوريا 2016 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية حسابية، أساسها 3 وحدّها الأول u_0 ونُحقّق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$.

1) حساب الحد الأول u_0

نكتب u_1 ؛ u_2 و u_3 بدلالة u_0

$$\begin{cases} u_1 = u_0 + (1)r = u_0 + 3 \\ u_2 = u_0 + (2)r = u_0 + 6 \text{ ومنه: } u_n = u_0 + nr \\ u_3 = u_0 + (3)r = u_0 + 9 \end{cases}$$

$$\text{العلاقة } u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10 \text{ تُصبح: } u_0 + (u_0 + 3) + (u_0 + 6) + (u_0 + 9) = 10$$

$$\text{ومنه: } 4u_0 + 18 = 10$$

$$\text{وعليه: } 4u_0 = -8 \text{ إذن: } u_0 = \frac{-8}{4} = -2$$

2) كتابة الحد العام u_n بدلالة n

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 + nr \text{ ومنه: } u_n = -2 + 3n$$

3) تعيين العدد الطبيعي n بحيث $u_n = 145$

$$u_n = 145 \text{ تُكافئ: } -2 + 3n = 145$$

$$\text{ومنه: } 3n = 147 \text{ وعليه: } n = \frac{147}{3} = 49 \text{ (} u_{49} = 145 \text{)}$$

4) حساب المجموع S بحيث $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{49}$

$$\text{لدينا: } S = u_0 + u_1 + \dots + u_{49} = (49 - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_{49}}{2} \right) = (50) \left(\frac{-2 + 145}{2} \right)$$

$$\text{ومنه: } S = (50) \left(\frac{143}{2} \right) = (50)(71,5) = 3575$$

5) لدينا: (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n = 2u_n + 3$

حساب المجموع S' بحيث $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{49}$

$$\text{لدينا: } v_n = 2u_n + 3$$

$$\text{ومنه: } S' = (2u_0 + 3) + (2u_1 + 3) + \dots + (2u_{49} + 3)$$

$$\text{وعليه: } S' = 2(u_0 + u_1 + \dots + u_{49}) + 3(94 - 0 + 1)$$

مجلة العبقرى في الرياضيات (الماتليات العددية في البكالوريا) حلول ————— الشعبة: الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.
وبالتالى: $S' = 2S + 3(50) = 2(3575) + 150 = 7300$.

حل الثمرين 19: (06 نقاط) بكالوريا 2017_01 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

1) تبيان أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5:

لدينا: $u_n = u_p \times q^{n-p}$ ومنه: $u_3 = u_1 \times q^{3-1}$

وعليه: $320 = 20 \times q^2$

ويكون: $q^2 = \frac{320}{20} = 16$

وبالتالى: $q = \sqrt{16} = 4$ أو $q = -\sqrt{16} = -4$ (مرفوض)

إذن: $q = 4$ لأنها حدود موجبة تماما.

2) كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n :

بما أن (u_n) هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ فإن حدها الأول هو: $u_0 = \frac{u_1}{q} = \frac{20}{4} = 5$

وبالتالى: $u_n = u_0 \times q^n$ إذن: $u_n = 5 \times 4^n$

استنتاج قيمة حدها السابع:

الحد السابع هو: $u_6 = 5 \times 4^6 = 5(4096) = 20480$

3) أ) حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$:

لدينا: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) = 5 \left(\frac{1-4^{n+1}}{1-4} \right) = \frac{5}{-3} (1 - 4^{n+1})$

ومنه: $S = \frac{5}{3} (4^{n+1} - 1)$

ب) استنتاج قيمة المجموع S' حيث: $S' = u_0 + u_1 + \dots + u_6$:

حسب السؤال السابق أ) نجد: $S' = u_0 + u_1 + \dots + u_6 = \frac{5}{3} (4^{6+1} - 1) = \frac{5}{3} (4^7 - 1)$

ومنه: $S' = \frac{5}{3} (16384 - 1) = \frac{5}{3} (16383) = 27305$

حل الثمرين 20: (06 نقاط) بكالوريا 2017_01 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.

1) تعيين الأساس r للمتتالية (u_n) :

نكتب u_3 و u_7 بدلالة u_0

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $\begin{cases} u_3 = u_0 + (3)r = -5 + 3r \\ u_7 = u_0 + (7)r = -5 + 7r \end{cases}$

بالتعويض في العلاقة $u_3 + u_7 = 50$ نجد: $(-5 + 3r) + (-5 + 7r) = 50$

ومنه: $10r - 10 = 50$

وعليه: $10r = 60$ إذن: $r = \frac{60}{10} = 6$

2) تبيان أن: من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n = 6n - 5$:

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $u_n = -5 + 6n$

3) اثبات أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) ، مع تعيين رتبته:

نضع: $u_n = 2017$ نجد: $-5 + 6n = 2017$

$$\text{ومنه: } 6n = 2022$$

$$(u_{337} = 2017) \quad \boxed{n = \frac{2022}{6} = 337 \in \mathbb{N}} \quad \text{وبالتالي:}$$

إذن: العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) ، رتبته: 338 لأن الحد الأول هو u_0 .

4) حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$:

$$\text{لدينا: } S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right) = (n + 1) \left(\frac{-5 + (-5 + 6n)}{2} \right)$$

$$\text{ومنه: } S = (n + 1) \left(\frac{-10 + 6n}{2} \right) = (n + 1)(-5 + 3n)$$

حل الثمرين 21: (06 نقاط) بكالوريا 2017_02 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بحددها الأول u_0 وأساسها r .

1) حساب الحد u_4 علما أن، $u_3 + u_5 = 20$:

$$\text{حسب خاصية الوسط الحسابي، لدينا: } \boxed{u_3 + u_5 = 2u_4}$$

$$\text{العلاقة } u_3 + u_5 = 20 \text{ تُصبح: } 2u_4 = 20 \text{ إذن: } \boxed{u_4 = \frac{20}{2} = 10}$$

2) حساب الحد u_5 علما أن، $2u_4 - u_5 = 7$:

$$2(10) - u_5 = 7 \text{ تُكافئ: } 2u_4 - u_5 = 7$$

$$\text{ومنه: } -u_5 = 7 - 20 \text{ وعليه: } -u_5 = -13 \text{ إذن: } \boxed{u_5 = 13}$$

3) استنتاج قيمة r وحساب u_0 :

$$\text{بما أن } (u_n) \text{ متتالية حسابية، ولدينا: } u_4 = 10؛ u_5 = 13 \text{ إذن: } \boxed{r = u_5 - u_4 = 13 - 10 = 3}$$

حساب u_0 :

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 + nr \text{ ومنه: } u_4 = u_0 + 4r \text{ وعليه: } 10 = u_0 + 4(3) \text{ إذن: } \boxed{u_0 = 10 - 12 = -2}$$

4) التحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 3n - 2$:

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 + nr \text{ ومنه: } \boxed{u_n = -2 + 3n}$$

5) حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n ، $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$:

$$\text{لدينا: } S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right) = (n + 1) \left(\frac{-2 + (3n - 2)}{2} \right)$$

$$\text{ومنه: } S_n = (n + 1) \left(\frac{3n - 4}{2} \right) = \frac{(n + 1)(3n - 4)}{2} = \frac{3n^2 - n - 4}{2}$$

6) إيجاد العدد الطبيعي n حيث، $S_n = 33$:

$$S_n = 33 \text{ معناه: } \frac{3n^2 - n - 4}{2} = 33$$

$$\text{ومنه: } 3n^2 - n - 4 = 2(33)$$

$$\text{وعليه: } 3n^2 - n - 70 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-70) = 1 + 840 = 841 > 0 \text{ مميزها:}$$

للمعادلة حلين متميزين هما:

$$n' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{841}}{2(3)} = \frac{1 + 29}{6} = \frac{30}{6} = 5 \in \mathbb{N}$$

$$n'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{841}}{2(3)} = \frac{1 - 29}{6} = \frac{-28}{6} = \frac{-14}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$\text{إذن: } \boxed{n = 5} \text{ (} S_5 = 33 \text{)}$$

حل النمرين 22: (06 فقط) بكالوريا 2017_02 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغ أ.

تعيين الاقتراح الصحيح مع التبرير:

(1) الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها 3 - وحدها الأول 1 هو: (ب) 14 - .

التبرير:

■ الطريقة 01: إذا كان: $u_0 = 1$ هو الحد الأول للمتتالية الحسابية التي أساسها $r = -3$

فإن: حدها السادس هو u_5 وبالتالي: $u_5 = u_0 + 5r = 1 + 5(-3) = -14$

■ الطريقة 02: إذا كان: $u_1 = 1$ هو الحد الأول للمتتالية الحسابية التي أساسها $r = -3$

فإن: حدها السادس هو u_6 وبالتالي: $u_6 = u_1 + (6 - 1)r = 1 + 5(-3) = -14$

(2) مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية حدها الأول هو 1 وأساسها 3 هو: (ج) $\frac{3^{100}-1}{2}$

لأن: $\left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right) = 1 \left(\frac{1-3^{100}}{1-3}\right) = \left(\frac{1-3^{100}}{-2}\right) = \frac{3^{100}-1}{2}$

(3) لدينا: $a = 2x + 2$, $b = 6x - 3$, $c = 4x$

الأعداد الحقيقية a , b , c بهذا الترتيب تُشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون: (أ) $x = \frac{4}{3}$

التبرير:

بمأن: الأعداد الحقيقية a , b , c بهذا الترتيب تُشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية

فإن: حسب خاصية الوسط الحسابي $a + c = 2b$ ومنه: $(2x + 2) + (4x) = 2(6x - 3)$

وعليه: $6x + 2 = 12x - 6$

وبالتالي: $-6x = -8$ إذن: $x = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$

(4) المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ هي متتالية: (ج) لا حسابية ولا هندسية.

لأن: العلاقة $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ ليست من الشكل $u_{n+1} = u_n + r$ وليست من الشكل $u_{n+1} = qu_n$

حل النمرين 23: (06 فقط) بكالوريا 2018 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

تعيين الاقتراح الصحيح، مع التبرير:

(1) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = n^2 - 1$

المتتالية (u_n) : (أ) متزايدة تماما، لمعرفة اتجاه تغير متتالية ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

لدينا: $u_n = n^2 - 1$ ، ومنه: $u_{n+1} = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 1^2 + 2(n)(1) - 1 = n^2 + 2n$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = (n^2 + 2n) - (n^2 - 1) = 2n + 1 > 0$

إذن: المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

(2) (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1 = 3$ وأساسها $q = 2$

عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي: (ب) $v_n = 3 \times 2^{n-1}$ لأن: $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$

المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ يساوي: (أ) $3(2^n - 1)$

لأن: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = 3 \left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right) = 3 \left(\frac{1-2^{n+1}}{-1}\right) = 3(2^{n+1} - 1)$

(3) الاحتمالات.

حل النمرين 24: (06 نقاط) بكالوريا 2018 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث:

$$u_0 + u_1 = 30 \text{ و } u_0 \times u_2 = 576$$

1) تبيان أنّ $u_1 = 24$:

حسب خاصية الوسط الهندسي، لدينا: $u_0 \times u_2 = u_1^2$

$$\text{ومنه: } u_0 \times u_2 = 576$$

$$\text{تُصبح: } u_1^2 = 576$$

$$\text{وعليه: } u_1 = \sqrt{576} = 24 \text{ أو } u_1 = -\sqrt{576} = -24 \text{ (مرفوض)}$$

إذن: $u_1 = 24$ لأنّ حدود (u_n) موجبة تماما.

استنتاج قيمة u_0 : لدينا: $u_0 + u_1 = 30$ ومنه: $u_0 = 30 - u_1 = 30 - 24 = 6$

2) تبيان أنّ $q = 4$: لدينا: $q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{24}{6} = 4$

كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 \times q^n \text{ ومنه: } u_n = 6 \times 4^n$$

3) اثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$:

$$\text{لدينا: } u_n = 6 \times 4^n \text{ ومنه: } u_{n+1} = 6 \times 4^{n+1} = 6 \times 4^n \times 4^1$$

$$\text{وعليه: } u_{n+1} - u_n = (24 \times 4^n) - (6 \times 4^n) = 18 \times 4^n$$

استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

بما أنّ $0 < u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$ ، فإنّ (u_n) متزايدة تماما.

4) حساب 4^4 : $4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$

التحقّق أنّ العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وتعيين رتبته:

$$\text{نضع: } u_n = 1536 \text{ نجد: } 6 \times 4^n = 1536$$

$$\text{ومنه: } 4^n = \frac{1536}{6}$$

$$\text{أي: } 4^n = 256$$

$$\text{وعليه: } 4^n = 4^4 \text{ (لأنّ } 4^4 = 256)$$

إذن: $n = 4$ ($u_4 = 1536$)، رتبته: 5 لأنّ الحد الأوّل هو u_0 .

5) حساب بدلالة n المجموع $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$:

$$\text{لدينا: } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = 24 \left(\frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} \right) = \frac{24}{-3} (1 - 4^{n+1})$$

$$\text{ومنه: } S_n = -8(1 - 4^{n+1}) = 8(4^{n+1} - 1)$$

حل النمرين 25: (06 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \frac{2}{5}n - 1$

1) تبيان أنّ المتتالية (u_n) حسابية أساسها $\frac{2}{5}$ يطلب حساب حدّها الأول u_1 :

نُبين أنّ الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت $\frac{2}{5}$.

$$\text{لدينا: } u_n = \frac{2}{5}n - 1 \text{، ومنه: } u_{n+1} = \frac{2}{5}(n+1) - 1 = \frac{2}{5}n + \frac{2}{5} - 1 = \frac{2}{5}n + \frac{2-5}{5} = \frac{2}{5}n - \frac{3}{5}$$

مجلة العقبري في الرياضيات (الماتليات العددية في البكالوريا) حلول ————— الشعبة: الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{5}n - \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{2}{5}n - 1\right) = \frac{2}{5}n - \frac{3}{5} - \frac{2}{5}n + 1 = -\frac{3}{5} + 1 = \frac{-3+5}{5}$$

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}}$$
 وبالتالي:

$$u_1 = \frac{2}{5}(1) - 1 = \frac{2}{5} - 1 = \frac{2-5}{5} = \frac{-3}{5}$$

(2) **تعيين رتبة الحد الذي قيمته 575:**

$$\frac{2}{5}n - 1 = 575 \quad u_n = 575 \quad \text{نجد:}$$

$$\frac{2}{5}n = 576$$

$$2n = 5(576) \quad \text{وعليه:}$$

$$(u_{1440} = 575) \quad n = \frac{2880}{2} = 1440 \in \mathbb{N} \quad \text{وبالتالي: } 2n = 2880$$

إذن: رتبة الحد الذي قيمته 575 هي 1440 لأن الحد الأول هو u_1 .

(3) **حساب قيمة المجموع S حيث: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{1440}$**

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{1440} = (1440 - 1 + 1) \left(\frac{u_1 + u_{1440}}{2} \right) = (1440) \left(\frac{\frac{-3}{5} + 575}{2} \right) \quad \text{لدينا:}$$

$$S = \frac{1440}{2} \left(\frac{-3}{5} + 575 \right) = 720 \left(\frac{-3+5(575)}{5} \right) = 720 \left(\frac{-3+2875}{5} \right) = 720 \left(\frac{2872}{5} \right) \quad \text{ومنه:}$$

$$S = 720(574,4) = 413568 \quad \text{وعليه:}$$

(4) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n = 4^{5u_n+6}$.

أ) **تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_1 :**

(نُبين أن حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت)

$$v_{n+1} = 4^{5u_{n+1}+6} \quad \text{ومنه: } v_n = 4^{5u_n+6}$$

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + \frac{2}{5}} \quad \text{أي: } u_{n+1} = u_n + r \quad \text{وبما أن } (u_n) \text{ حسابية فإن:}$$

$$v_{n+1} = 4^{5u_{n+1}+6} = 4^{5(u_n + \frac{2}{5})+6} = 4^{5u_n+2+6} = 4^{(5u_n+6)+2} = 4^{5u_n+6} \times 4^2 \quad \text{وعليه:}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4^{5u_n+6} \times 4^2}{4^{5u_n+6}} = 4^2 = 16 \quad \text{وبالتالي:}$$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = 16}$ ، وحدّها الأول

$$v_1 = 4^{5u_1+6} = 4^{5(\frac{-3}{5})+6} = 4^{-3+6} = 4^3 = 64 \quad \text{لأنها معرفة على } \mathbb{N}^*$$

(ب) **حساب بدلالة n المجموع S_n :**

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \left(\frac{1-q^{n-1+1}}{1-q} \right) = 64 \left(\frac{1-16^n}{1-16} \right) = \frac{64}{-15} (1 - 16^n) \quad \text{لدينا:}$$

$$\boxed{S_n = \frac{64}{15} (16^n - 1)} \quad \text{إذن:}$$

حل الثمرين 26: (04 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) المتتالية الحسابية التي حدّها الأول u_0 وأساسها r .

(1) **علماً أن: $u_0 + u_1 + u_2 = 6$ ، تعيين u_1 :**

$$\boxed{u_0 + u_2 = 2u_1} \quad \text{لدينا: حسب خاصية الوسط الحسابي}$$

مجلة البقري في الرياضيات (الماتليات العددية في البكالوريا) حلول ————— الشعبة: الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

العلاقة $u_0 + u_1 + u_2 = 6$ تُصبح: $u_1 + 2u_1 = 6$ ومنه: $3u_1 = 6$ إذن: $u_1 = \frac{6}{3} = 2$.

2) علماً أن: $2u_0 - 3u_1 = -10$ ، تعيين الحد الأول u_0 ، ثم استنتاج قيمة r أساس المتتالية (u_n) :

$$2u_0 - 3(2) = -10 \text{ نكافئ: } 2u_0 - 6 = -10$$

ومنه: $2u_0 = -10 + 6$ أي: $2u_0 = -4$ إذن: $u_0 = \frac{-4}{2} = -2$.

استنتاج قيمة r أساس المتتالية (u_n) :

بما أن (u_n) حسابية؛ ولدينا: $u_1 = 2$ ، $u_0 = -2$ فإن $r = u_1 - u_0 = 2 - (-2) = 4$.

3) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $u_n = -2 + 4n$.

4) تعيين قيمة n حتى يكون $u_n = 2018$:

نضع: $u_n = 2018$ نجد: $-2 + 4n = 2018$

ومنه: $4n = 2020$ وبالتالي: $n = \frac{2020}{4} = 505 \in \mathbb{N}$ (و $u_{505} = 2018$)

ب) حساب الحد الخامس عشر للمتتالية (u_n) :

بما أن الحد الأول هو u_0 فإن الحد الخامس عشر هو: $u_{14} = -2 + 4(14) = 54$.

5) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$:

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$

ومنه: $S_n = (n + 1) \left(\frac{-2 + (-2 + 4n)}{2} \right) = (n + 1) \left(\frac{-4 + 4n}{2} \right) = (n + 1)(2n - 2)$.

6) تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 96$:

$S_n = 96$ معناه: $(n + 1)(2n - 2) = 96$

ومنه: $2n^2 - 2n + 2n - 2 = 96$

وعليه: $2n^2 = 98$

أي: $n^2 = 49$

وبالتالي: $n = \sqrt{49} = 7$ أو $n = -\sqrt{49} = -7$ (مرفوض)

إذن: $n = 7$ ($S_7 = 96$).

حل التمرين 27: (06 نقاط) بكالوريا 2020 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية حسابية، حدّها الأول u_0 ، وأساسها r حيث: $\begin{cases} u_2 - u_0 = 4 \\ u_1 + u_3 = 16 \end{cases}$

1) حساب الحد u_2 :

حسب خاصية الوسط الحسابي، $u_1 + u_3 = 2u_2$ وبالتعويض في العلاقة: $u_1 + u_3 = 16$

نجد: $2u_2 = 16$

ومنه: $u_2 = \frac{16}{2} = 8$ إذن: $u_2 = 8$

حساب الحد u_0 :

لدينا: $\begin{cases} u_2 - u_0 = 4 \\ u_2 = 8 \end{cases}$ ومنه: $8 - u_0 = 4$ وعليه: $-u_0 = -4$ إذن: $u_0 = 4$.

استنتاج الأساس r للمتتالية (u_n) :

لدينا: $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_2 = 8 \end{cases}$ ، بالتعويض في العلاقة: $u_n = u_0 + nr$

نجد: $u_2 = u_0 + 2r$

وعليه: $8 = 4 + 2r$

وبالتالي: $2r = 4$ إذن: $r = 2$

2. أ. تبيان أن الحد العام للمتتالية (u_n) معرف بـ $u_n = 4 + 2n$:

بمأن: (u_n) متتالية حسابية، حدّها الأول $u_0 = 4$ ، وأساسها $r = 2$ ؛ فإن: $u_n = u_0 + nr$ وبالتعويض نجد: $u_n = 4 + 2n$ (وهو المطلوب).

ب. تحديد مع التبرير اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لتحديد اتجاه تغير متتالية (u_n) بصيغة عامة؛ ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

وبمأن: (u_n) حسابية فإن: $u_{n+1} - u_n = r = 2 > 0$ إذن: المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

3. تبيان أن العدد 2020 حد من حدود المتتالية (u_n) ، محدداً رتبته:

نضع: $u_n = 2020$ نجد: $4 + 2n = 2020$

ومنه: $2n = 2020 - 4$

أي: $n = \frac{2016}{2} = 1008 \in \mathbb{N}$ ($u_{1008} = 2020$)

إذن: 2020 حد من حدود المتتالية (u_n) ، رتبته: 1009 لأن الحد الأول هو u_0 .

4. حساب المجموع S المعروف بـ $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{1008}$:

لدينا: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{1008} = (1008 - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_{1008}}{2} \right) = 1009 \left(\frac{4 + 2020}{2} \right)$

ومنه: $S = 1009 \left(\frac{2024}{2} \right) = 1009(1012) = 1021108$

حل النمرين 28: (06 نقاط) بكالوريا 2020 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية هندسية، حدّها الأول u_1 ، حدودها موجبة تماماً حيث: $u_3 \times u_5 = 2916$.

1. حساب الحد u_4 :

حسب خاصية الوسط الهندسي، $u_3 \times u_5 = u_4^2$

وبالتعويض في العلاقة: $\frac{u_3 \times u_5}{u_4^2} = 2916$

نجد: $u_4^2 = 2916$

وعليه: $u_4 = \sqrt{2916} = 54$ أو $u_4 = -\sqrt{2916} = -54$ (مرفوض)

إذن: $u_4 = 54$ لأن حدود (u_n) موجبة تماماً.

2. علما أن $u_3 = 18$ ، التحقق أن أساس المتتالية (u_n) هو 3:

بمأن: (u_n) متتالية هندسية، ولدينا: $\begin{cases} u_3 = 18 \\ u_4 = 54 \end{cases}$ ؛ فإن أساسها هو: $q = \frac{u_4}{u_3} = \frac{54}{18} = 3$

3. حساب الحد الأول u_1 ، ثم كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

بمأن: (u_n) متتالية هندسية، حدّها الأول u_1 ، وأساسها $q = 3$ ؛ فإن: $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

□ ولدينا من جهة أخرى: $u_3 = 18$ ، بالتعويض نجد: $u_3 = u_1 \times q^{3-1}$

$$18 = u_1 \times 3^2 \text{ أي: } 18 = u_1 \times 9$$

$$u_1 = \frac{18}{9} = 2 \text{ وهذا يعني: } 9u_1 = 18 \text{ إذن: } u_1 = 2$$

$$u_4 = u_1 \times q^{4-1} \text{ بالتعويض نجد: } u_4 = 54 \text{ ولدينا من جهة أخرى: } u_4 = 54$$

$$54 = u_1 \times 3^3 \text{ أي: } 54 = u_1 \times 27$$

$$u_1 = \frac{54}{27} = 2 \text{ وهذا يعني: } 27u_1 = 54 \text{ إذن: } u_1 = 2$$

كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} \text{ نجد: } u_n = 2 \times 3^{n-1}$$

4) تعيين رتبة الحد الذي قيمته 1458: (بملاحظة: $3^6 = 729$)

$$u_n = 1458 \text{ نجد: } 2 \times 3^{n-1} = 1458$$

$$3^{n-1} = \frac{1458}{2} \text{ ومنه: } 3^{n-1} = 729$$

$$3^{n-1} = 729 \text{ أي: } 3^{n-1} = 3^6$$

$$3^{n-1} = 3^6 \text{ (لأن } 3^6 = 729 \text{)} \text{ وعليه: } 3^{n-1} = 3^6$$

$$n - 1 = 6 \text{ وبالتالي: } n = 7$$

$$\text{إذن: } n = 7 \text{ (} u_7 = 1458 \text{)، رتبته: } 7 \text{ لأن الحد الأول هو } u_1.$$

5) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = 2 \left(\frac{1 - 3^n}{1 - 3} \right) = \frac{2}{-2} (1 - 3^n)$$

$$S_n = -(1 - 3^n) = 3^n - 1 \text{ ومنه: } S_n = 3^n - 1$$

الحمد لله.

جمع الأستاذ بوعزة مصطفى.