

تمارين للمنافسات الفكرية



1. f دالة معرفة على الأعداد الطبيعية بحيث : $f(x) = \begin{cases} x + 2; & x < 10 \\ f(x - 2); & x \geq 10 \end{cases}$
عين $\max_{x \in \mathbb{N}} f(x)$ مع التعليل.

2. احسب طول قطر مكعب القيمة العددية لمساحته الكلية تساوي ضعف القيمة العددية لحجمه.

3. احسب : $S = 8^0 + 8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{2}{3}} + 8^1 + \dots + 8^3$

4. $ABCD$ مربع طول ضلعه 2 cm. نختار بصفة عشوائية نقطة E داخل هذا المربع.
– احسب احتمال أن يكون المثلث ABE منفرج الزاوية.

5. نختار بصفة عشوائية قاسما من قواسم العدد 15^{90} .
– احسب احتمال أن يكون هذا القاسم من مضاعفات 15^{65} .

6. ابحث عن كل الأعداد الطبيعية من رقمين و التي تزيد بـ 9 إذا قلبنا رقميها.

7. يحتوي كيس على كريات زرقاء و أخرى خضراء. إذا سحبنا ثلاث كريات خضراء منه فإن احتمال سحب كرية خضراء من بين الكريات المتبقية يصبح $\frac{2}{5}$ أما إذا أضفنا 7 كريات زرقاء إلى الكيس فإن احتمال سحب كرية زرقاء يصبح $\frac{5}{8}$.
– كم كان عدد الكريات الزرقاء في الكيس في البداية ؟

8. العدد $1 - 2^{11} 2^{13}$ أولي و يُكتب بـ 3 376 رقما. ما هو رقم آحاد هذا العدد ؟

الحلول

1. بما أن الدالة $x \mapsto x + 2$ متزايدة تماما فإن $\max_{x \in \mathbb{N}, x < 10} f(x) = f(9) = 9 + 2 = 11$

من جهة أخرى، إذا كان $x \geq 10$ عددا زوجيا فإن : $f(x) = f(x-2) = \dots = f(8) = 8 + 2 = 10$

و إذا كان $x \geq 10$ عددا فرديا فإن : $f(x) = f(x-2) = \dots = f(9) = 11$

إذن أكبر قيمة للدالة f هي 11 و تتحصل عليها عند الأعداد الفردية $x \geq 9$.

2. نرمز بـ $c > 0$ لطول حرف المكعب. مساحته الكلية هي $6c^2$ و حجمه c^3 .

قيمة المساحة تساوي ضعف قيمة الحجم أي $6c^2 = 2c^3$ و بقسمة الطرفين على $2c^2$ نجد $c = 3$ إذن طول حرف المكعب هو 3 وحدات.

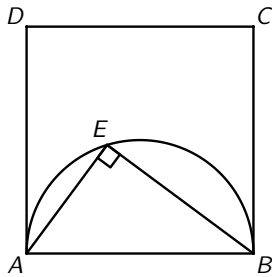
حسب نظرية فيثاغورس، طول قطر أحد أحرف المكعب هو $\sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$ و بالتالي طول قطر

المكعب (حسب فيثاغورس دائما) هو $\sqrt{3^2 + (\sqrt{18})^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

3. بملاحظة أن $8 = 2^3$ ينتج :

$$\begin{aligned} S &= 8^0 + 8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{2}{3}} + 8^1 + \dots + 8^3 \\ &= 1 + (2^3)^{\frac{1}{3}} + (2^3)^{\frac{2}{3}} + \dots + (2^3)^3 \\ &= 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^9 \\ &= \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} \\ S &= 1023 \end{aligned}$$

4. الزاويتان $\widehat{ABE}$ و $\widehat{BAE}$ حادتان إذن الزاوية الوحيدة التي يمكن أن تكون منفرجة هي $\widehat{AEB}$.



• إذا كانت النقطة E تنتمي إلى نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ فإن المثلث AEB قائم في E .

• إذا كانت النقطة E خارج نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ فإن الزاوية $\widehat{AEB}$ حادة.

• إذا كانت النقطة E داخل نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ فإن الزاوية $\widehat{AEB}$ منفرجة.

إذن حتى يكون المثلث ABE منفرج الزاوية، يجب أن تقع النقطة E داخل نصف الدائرة التي نصف

$$\text{قطرها } r = \frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$s = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \times 1^2}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ cm}^2$$

مساحة نصف الدائرة هذه هي :

$$S = AB^2 = 2^2 = 4 \text{ cm}^2$$

و مساحة المربع هي :

$$\mathbb{P} = \frac{s}{S} = \frac{\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{8} \approx 0,39$$

إذن احتمال أن يكون المثلث ABE منفرج الزاوية هو :

5. لدينا : $15^{90} = 3^{90} \times 5^{90}$

$$(90 + 1)(90 + 1) = 91^2 = 8281$$

عدد قواسم هذا العدد هو :

$$\frac{15^{90}}{15^{65}} = 15^{90-25} = 15^{25} = 3^{25} \times 5^{25} \quad \text{من جهة أخرى :}$$

و عدد قواسم 15^{25} هو : $(25 + 1)(25 + 1) = 26^2 = 676$

إذا اخترنا قاسما ممن بين قواسم 15^{25} و ضربناه في 15^{65} فإننا نحصل على عدد يقسم 15^{90} و يقبل القسمة على 15^{65} .

$$\mathbb{P} = \frac{676}{8281} = \frac{4}{49} \quad \text{إذن احتمال أن يكون أحد قواسم } 15^{90} \text{ من مضاعفات } 15^{65} \text{ هو :}$$

6. إذا كان $10a + b$ هذا العدد فإن $10b + a = 10a + b + 9$ منه $9b - 9a = 9$ منه $b - a = 1$.

إذن رقما هذا العدد متتاليان و الأعداد التي تحقق هذه الشروط هي : 89-78-67-56-45-34-23-12.

7. احتمال سحب كرية خضراء من الكيس يساوي حاصل قسمة عدد الكريات الخضراء فيه على العدد الكلي للكرات.

نرمز بـ b إلى عدد الكريات الزرقاء في الكيس في البداية و نرمز بـ v إلى عدد الكريات الخضراء في الكيس في البداية. بعد سحب 3 كريات خضراء، تبقى $v - 3$ كرية خضراء إذن عدد الكريات الكلي يصبح $b + v - 3$.

$$\text{احتمال سحب كرية خضراء هو } \frac{2}{5} \text{ معناه } \frac{v - 3}{b + v - 3} = \frac{2}{5} \text{ منه } 3v - 2b = 9.$$

$$\text{بالمثل، عند إضافة 7 كريات زرقاء إلى الكيس يصبح احتمال سحب كرية زرقاء } \frac{5}{8} \text{ معناه } \frac{b + 7}{b + v + 7} = \frac{5}{8} \text{ منه } 5v - 3b = 21.$$

$$\text{بحل جملة المعادلتين} \quad \begin{cases} 3v - 2b = 9 \\ 5v - 3b = 21 \end{cases} \quad \text{نجد } v = 15 \text{ و } b = 18.$$

عدد الكريات الزرقاء في الكيس في البداية كان 18 كرية.

8. لدينا : $2^1 = 2$ ؛ $2^2 = 4$ ؛ $2^3 = 8$ ؛ $2^4 = 16$ ؛ $2^5 = 32$ ؛ $2^6 = 64$ ؛ $2^7 = 128$ ؛ ...

إذن متتالية رقم آحاد قوى 2 دورية دورها 4. بما أن $11\,213 = 4 \times 2803 + 1$ فإن رقم آحاد $2^{11\,213}$ هو 2^1 أي هو 2 و بالتالي رقم آحاد $2^{11\,213} - 1$ هو $2 - 1$ أي هو 1.