

الاستدلال بالتراجع - المتتاليات العددية



1- الاستدلال بالتراجع

$P(n)$ خاصية متعلقة بمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ و n_0 عدد طبيعي.

لنبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 يكفي أن نثبت:

الشطر 1- نتأكد من صحة الخاصية من أجل $n = n_0$ أي أن $P(n_0)$ صحيحة.

الشطر 2- نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي n_0 (فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ من أجل $n+1$.

مبرهنة

❖ إذا كان $n \in \mathbb{N}$ فإن $n_0 = 0$ وإذا كان $n \in \mathbb{N}^*$ فإن $n_0 = 1$ وهكذا...

ملاحظات

2- المتتاليات العددية: (u_n) متتالية عددية

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية	
(u_n) متتالية حسابية معناه: $u_{n+1} - u_n = r$ أو $u_{n+1} = u_n + r$ حيث $r \in \mathbb{R}$	(u_n) متتالية هندسية معناه: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ أو $u_{n+1} = q \times u_n$ حيث $q \in \mathbb{R}_+^*$	الأساس
بصفة عامة: عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية هي من الشكل: $u_n = u_p + (n - p)r$ حيث: ✓ u_p الحد الأول في المتتالية (u_n) . ✓ p دليل الحد الأول. ✓ r الأساس المتتالية (u_n) .	بصفة عامة: عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية هي من الشكل: $u_n = u_p \times q^{n-p}$ حيث: ✓ u_p الحد الأول في المتتالية (u_n) . ✓ p دليل الحد الأول. ✓ r الأساس المتتالية (u_n) .	عبارة الحد العام
الوسط الحسابي: إذا كانت a, b و c بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية فإن: $2b = a + c$	الوسط الهندسي: إذا كانت a, b و c بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن: $b^2 = a \times c$	الوسط
$(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}) \times \frac{\text{عدد الحدود}}{2} = \text{المجموع}$	$\left(\frac{\text{الحد الأول}}{1 - \text{الأساس}} \right) \times \frac{\text{عدد الحدود}}{1 - \text{الأساس}} = \text{المجموع}$	المجموع
$1 + \text{دليل الحد الأول} - \text{دليل الحد الأخير} = \text{عدد الحدود}$		
✓ إذا كان $r > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً ✓ إذا كان $0 < r < 1$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً ✓ إذا كان $r = 1$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة تماماً ✓ إذا كان $r > 1$ و $u_p < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً ✓ إذا كان $0 < r < 1$ و $u_p < 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً	✓ إذا كان $r > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً ✓ إذا كان $r < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً ✓ إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة	اتجاه التغير



❖ متتالية محدودة من الأعلى، متتالية محدودة من الأسفل، متتالية محدودة:

✍ نقول عن المتتالية (u_n) أنها محدودة من الأعلى إذا كان $u_n \leq A$ (أو $u_n < A$) حيث A عدد حقيقي

✍ نقول عن المتتالية (u_n) أنها محدودة من الأسفل إذا كان $u_n \geq B$ (أو $u_n > B$) حيث B عدد حقيقي

✍ نقول عن المتتالية أنها محدودة إذا كان محدودة من الأعلى ومحدودة من الأسفل.

❖ تقارب متتالية:

✍ إذا كانت متتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فإن (u_n) متقاربة.

✍ إذا كانت متتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فإن (u_n) متقاربة.

✍ إذا كانت نهاية المتتالية نهاية منتهية فإن (u_n) متقاربة.

تقارب أو تباعد متتالية هندسية	تقارب أو تباعد متتالية حسابية
☒ إذا كان $q > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ هذا يعني أن المتتالية الهندسية في هذه الحالة متباعدة.	☒ إذا كان $r > 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
☒ إذا كان $0 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ هذا يعني أن المتتالية الهندسية في هذه الحالة متقاربة.	☒ إذا كان $r < 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
	إذن المتتالية الحسابية دوما متباعدة.

❖ المتتاليتان المتجاورتان: غير مقرر هذا العام

تكون المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان إذا كانت إحدهما متزايدة والأخرى متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

