

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

أهم الخواص التي تساعد على البرهان في الهندسة

في التعليم المتوسط

Propriétés pour Démontrer en géométrie
Mathématiques, classe de 2nde, éd. 2014, Sésamath.

ترجمة الأستاذ : فرغوس عبدالحق

Ce document est publié sous licence libre « CC by SA »

Le texte intégral est disponible à l'adresse :

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/legalcode>

أهم الخواص التي تساعد على البرهان في الهندسة

لإثبات خاصية ما في الهندسة، يمكن اتّباع الخطوات التالية :

- نبدأ برسم شكل يمثل الوضعية المدروسة.
- نُشَقِّر الشكل حسب المعطيات (منتصف قطعة، زاوية قائمة، مستقيمت متوازية، ... إلخ).
- من بين الخواص التي تنطبق على المطلوب، نبحث عن الخاصية التي يكون الشكل فيها (العمود الأوسط من الجدول الآتي) مماثلاً للشكل المرسوم.
- لتحرير الجواب، يكفي ذكر الخاصية المستعملة (كما في العمود الأيمن) ثمّ تحقيق فرضياتها و استخلاص المطلوب (كما في العمود الأيسر).

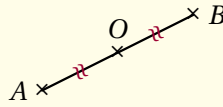
- (1) إثبات أنّ نقطة هي منتصف قطعة خاصية 01 إلى خاصية 06
- (2) إثبات توازي مستقيمين خاصية 07 إلى خاصية 14
- (3) إثبات تعامد مستقيمين خاصية 15 إلى خاصية 22
- (4) إثبات أنّ رباعيا ما متوازي أضلاع خاصية 23 إلى خاصية 29
- (5) إثبات أنّ رباعيا ما معين خاصية 30 إلى خاصية 32
- (6) إثبات أنّ رباعيا ما مستطيل خاصية 33 إلى خاصية 35
- (7) إثبات أنّ رباعيا ما مربع خاصية 36 إلى خاصية 39
- (8) إيجاد طول قطعة خاصية 40 إلى خاصية 53
- (9) تحديد قياس زاوية خاصية 54 إلى خاصية 62
- (10) البرهان بتوظيف خواص المستقيمت الخاصة في المثلث خاصية 63 إلى خاصية 69

Ce document est publié sous licence libre « CC by SA »



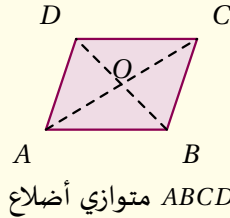
Le texte intégral est disponible à l'adresse : <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/legalcode>

النقطة O تنتمي إلى القطعة $[AB]$
و $OA = OB$ (أو $OA = \frac{1}{2}AB$)
و بالتالي O هي منتصف $[AB]$.



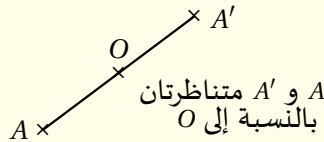
خاصية 1 إذا انتمت نقطة إلى قطعة مستقيمة و كانت متساوية البعد عن طرفيها فإن هذه النقطة هي منتصف القطعة.

بما أن $ABCD$ متوازي الأضلاع فإن قطريه متناصفان و بالتالي O منتصف $[AC]$ و أيضا O منتصف $[BD]$.



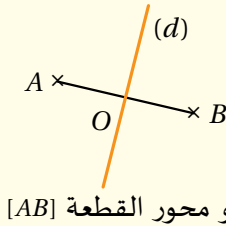
خاصية 2 في متوازي الأضلاع (كفي، مستطيل، مربع، معين)، القطران متناصفان (يتقاطعان في منتصفهما).

بما أن A' نظيرة A بالنسبة إلى O فإن O هي منتصف القطعة $[AA']$.



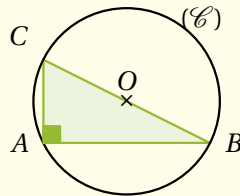
خاصية 3 إذا كانت A و A' متناظرتين بالنسبة إلى O فإن O هي منتصف القطعة $[AA']$.

بما أن المستقيم (d) محور القطعة $[AB]$ يقطعها في O فإن O منتصف $[AB]$.



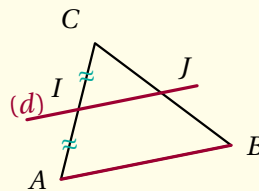
خاصية 4 محور قطعة مستقيم هو المستقيم العمودي على هذه القطعة في منتصفها.

بما أن ABC مثلث قائم وتره $[BC]$ و O مركز الدائرة المحيطة به فإن O منتصف الوتر $[BC]$.



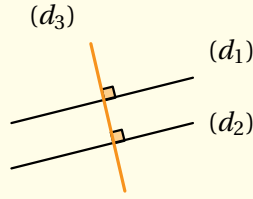
خاصية 5 مركز الدائرة المحيطة بالمثلث القائم هو منتصف الوتر.

في المثلث ABC ، المستقيم (d) يشمل I ، منتصف $[AC]$ ، و يوازي الضلع $[AB]$ و بالتالي I هي منتصف الضلع $[BC]$.



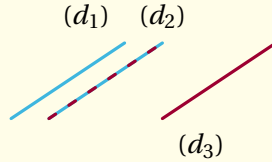
خاصية 6 في مثلث، المستقيم الذي يشمل منتصف أحد الأضلاع و يوازي ضلعاً ثانياً فإنه يشمل منتصف الضلع الثالث (النظرية العكسية لنظرية مستقيم المنتصفين).

بما أن $(d_1) \perp (d_3)$ و $(d_2) \perp (d_3)$
فإن $(d_1) \parallel (d_2)$.



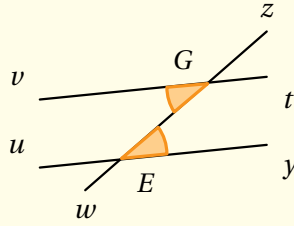
خاصية 7 المستقيمان العموديان على نفس المستقيم هما مستقيمان متوازيان.

بما أن $(d_1) \parallel (d_2)$ و $(d_2) \parallel (d_3)$
فإن $(d_1) \parallel (d_3)$.



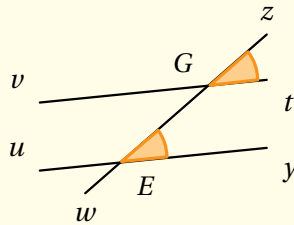
خاصية 8 إذا كان مستقيمان متوازيين فإن كل مستقيم يوازي أحدهما فهو يوازي الآخر.

المستقيمان (vt) و (uy) مقطوعان بالقاطع (zw) والزويتان $\widehat{vGw}$ و $\widehat{zEy}$ متبادلتان داخليا و متقايستان إذن $(vt) \parallel (uy)$.



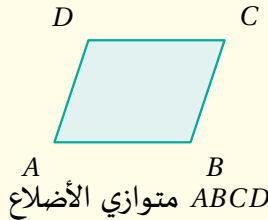
خاصية 9 حتى يتوازي مستقيمان، يكفي أن يُشكّل معهما قاطع زاويتين متبادلتين داخليا و متقايستين.

المستقيمان (vt) و (uy) مقطوعان بالقاطع (zw) والزويتان $\widehat{vGw}$ و $\widehat{zEy}$ متماثلتان و متقايستان إذن $(vt) \parallel (uy)$.



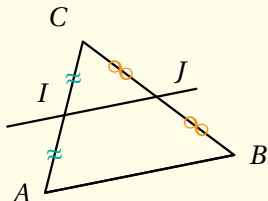
خاصية 10 حتى يتوازي مستقيمان، يكفي أن يُشكّل معهما قاطع زاويتين متماثلتين و متقايستين.

بما أن $ABCD$ متوازي الأضلاع فإن $(AD) \parallel (BC)$ و $(AB) \parallel (CD)$.



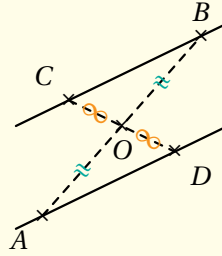
خاصية 11 في متوازي الأضلاع (كيفي، مستطيل، معين، مربع) كل ضلعين متقابلين (متقايسان و) حاملهما متوازيان.

في المثلث ABC لدينا I منتصف $[AC]$ و J منتصف $[BC]$ فحسب نظرية مستقيم المنتصفين نستنتج أن $(IJ) \parallel (AB)$.



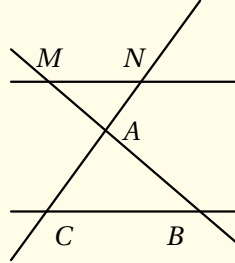
خاصية 12 في مثلث، المستقيم الذي يشمل منتصفَي ضلعين يوازي حامل الضلع الثالث (نظرية مستقيم المنتصفين).

بما أن (AD) و (BC) متناظران
بالنسبة إلى O فإن $(AD) \parallel (BC)$.



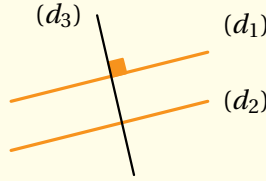
خاصية 13 المستقيمان
المتناظران بالنسبة إلى نقطة هما
مستقيمان متوازيان.

النقط M ، A ، B من جهة
و النقط N ، A ، C من جهة
أخرى على استقامة واحدة و بهذا
الترتيب مع $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ فحسب
النظرية العكسية لنظرية طاليس نستنتج أن
 $(MN) \parallel (BC)$.



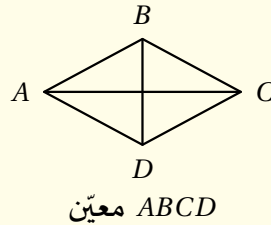
خاصية 14 عكس نظرية طاليس
إذا كانت النقط M ، B ، A
من جهة و النقط N ، A ، C
من جهة أخرى على استقامة
واحدة و بنفس الترتيب بحيث
 $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ فإن المستقيمين (BC)
و (MN) متوازيان.

بما أن $(d_1) \parallel (d_2)$ و $(d_1) \perp (d_3)$
فإن $(d_2) \perp (d_3)$.



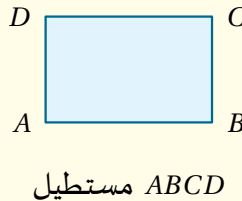
خاصية 15 إذا عامد مستقيم
أحد مستقيمين متوازيين فإنه
يعامد الآخر.

بما أن $ABCD$ معين فإن قطريه
متعامدان أي $(AC) \perp (BD)$.



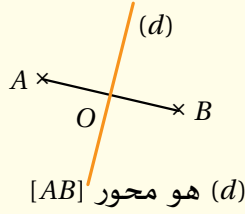
خاصية 16 قُطرا المعين
(أو المربع) متعامدان.

بما أن $ABCD$ مستطيل فإن
 $(AD) \perp (DC)$ ، $(AB) \perp (AD)$
و $(BC) \perp (AB)$ و $(DC) \perp (BC)$.



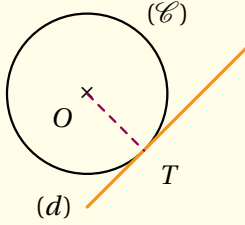
خاصية 17 في المستطيل
(أو المربع)، كل ضلعين متتاليين
حاملهما متعامدان.

بما أن (d) هو محور $[AB]$ فإن $(d) \perp (AB)$.



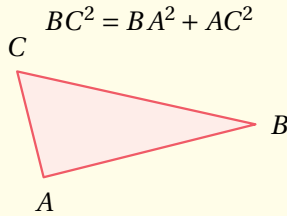
خاصية 18 محور قطعة مستقيم هو مستقيم يعامدها (في المنتصف).

بما أن (d) هو المماس في النقطة T للدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها O فإن $(d) \perp (OT)$.



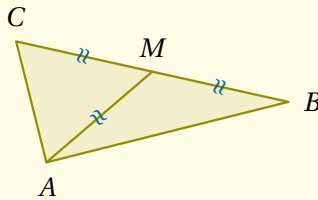
خاصية 19 المماس لدائرة في نقطة منها يعامد المستقيم القطري الذي يمر من هذه النقطة.

بما أن $BC^2 = BA^2 + AC^2$ فحسب النظرية العكسية لنظرية فيثاغورس نستنتج أن المثلث ABC قائم في A أي $(AB) \perp (AC)$.



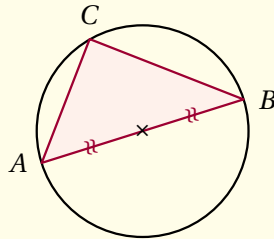
خاصية 20 عكس نظرية فيثاغورس في مثلث ABC ، إذا كان $[BC]$ هو الضلع الأطول بحيث $BC^2 = BA^2 + AC^2$ فإن المثلث ABC قائم ووتره هو الضلع $[BC]$.

بما أن $[AM]$ هو المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ بحيث $AM = BC \div 2$ فإن المثلث ABC قائم في A أي $(AB) \perp (AC)$.



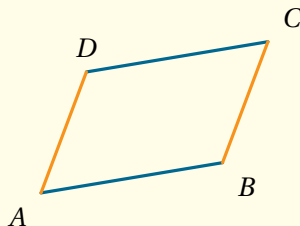
خاصية 21 في مثلث، إذا كان طول المتوسط المتعلق بأحد الأضلاع يساوي نصف طول هذا الضلع فإن هذا المثلث قائم ووتره هو ذلك الضلع.

بما أن الرأس C ينتمي إلى الدائرة التي قطرها $[AB]$ فإن المثلث ABC قائم في C أي $(AC) \perp (BC)$.



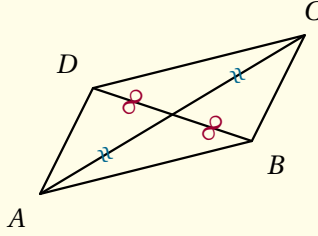
خاصية 22 إذا كان أحد أضلاع مثلث قطعاً للدائرة المحيطة به فإن هذا المثلث قائم ووتره هو ذلك الضلع.

بما أن $(AD) \parallel (BC)$ و $(AB) \parallel (DC)$ فإن $ABCD$ متوازي الأضلاع.



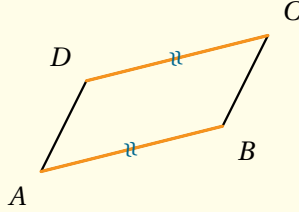
خاصية 23 إذا كان في رباعي كل ضلعين متقابلين حاملهما متوازيان فإن هذا الرباعي متوازي الأضلاع.

بما أن القطرين $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان فإنّ الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.



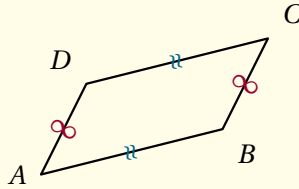
خاصية 24 إذا كان لرباعي قطران متناصفان (يتقاطعان في منتصفهما) فإنّ هذا الرباعي متوازي الأضلاع.

الرباعي $ABCD$ غير متصلب فيه $AB = DC$ و $(AB) \parallel (CD)$ و بالتالي $ABCD$ متوازي الأضلاع.



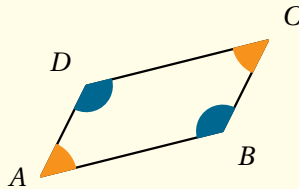
خاصية 25 إذا كان لرباعي (غير متصلب) ضلعان متقايسان و حاملهما متوازيان فإنّ هذا الرباعي متوازي الأضلاع.

بما أن $AB = CD$ و $AD = BC$ فإنّ الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.



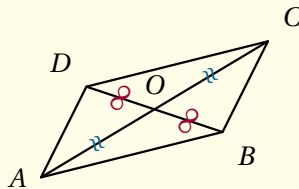
خاصية 26 إذا كان في رباعي كل ضلعين متقابلين متقايسان فإنّ هذا الرباعي متوازي الأضلاع.

في الرباعي $ABCD$ لدينا : $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$ و $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ إذاً $ABCD$ متوازي الأضلاع.



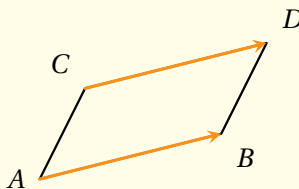
خاصية 27 إذا كان في رباعي كل زاويتين متقابلتين متقايسان فإنّ هذا الرباعي متوازي الأضلاع.

النقطتان A و C من جهة، و النقطتان B و D من جهة أخرى، متناظرتان بالنسبة إلى O و بالتالي فالرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.



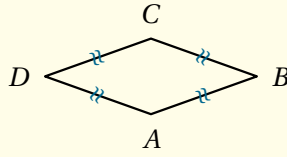
خاصية 28 إذا كان لرباعي مركز تناظر فإنّ هذا الرباعي متوازي الأضلاع.

بما أن $\vec{AB} = \vec{CD}$ فإنّ الرباعي $ABDC$ متوازي الأضلاع.



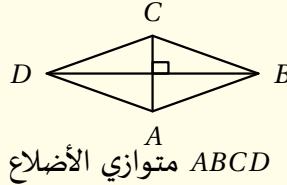
خاصية 29 إذا كانت A ، B ، C ، D أربع نقط بحيث $\vec{AB} = \vec{CD}$ فإنّ الرباعي $ABDC$ متوازي الأضلاع.

بما أن $AB = BC = CD = DA$ فإنّ الرباعي $ABCD$ معين.



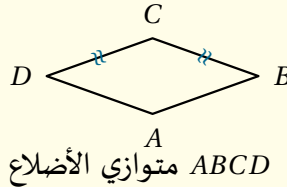
خاصية 30 إذا كان لرباعي أربعة أضلاع متقايسة فإنّ هذا الرباعي معين.

$ABCD$ متوازي الأضلاع بحيث $(AC) \perp (BD)$ (قطراه متعامدان) وبالتالي $ABCD$ معين.



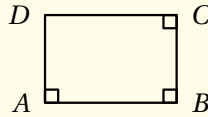
خاصية 31 إذا كان متوازي الأضلاع قطران متعامدان فإنه معين.

بما أنّ $ABCD$ متوازي الأضلاع وفيه $CD = CB$ فإنّ الرباعي $ABCD$ معين.



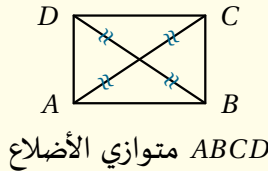
خاصية 32 إذا كان متوازي الأضلاع ضلعان متتاليان متقايسان فهو معين.

بما أنّ $(AD) \perp (AB)$ ، $(AB) \perp (BC)$ و $(BC) \perp (DC)$ فإنّ الرباعي $ABCD$ مستطيل.



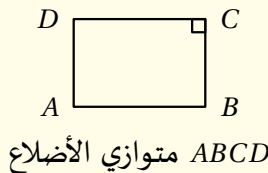
خاصية 33 إذا كان لرباعي ثلاث زوايا قائمة فإنّ هذا الرباعي مستطيل.

بما أنّ $ABCD$ متوازي الأضلاع بحيث $AC = BD$ (قطراه متقايسان) فإنّ $ABCD$ مستطيل.



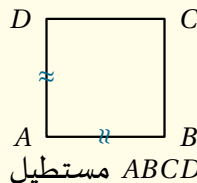
خاصية 34 إذا كان متوازي الأضلاع قطران متقايسان فهو مستطيل.

بما أنّ $ABCD$ متوازي الأضلاع وفيه $(BC) \perp (CD)$ فإنّ $ABCD$ مستطيل.



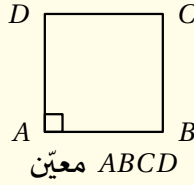
خاصية 35 إذا كان متوازي الأضلاع ضلعان متتاليان متعامدان فهو مستطيل.

بما أنّ $ABCD$ مستطيل بحيث $AB = AD$ (ضلعان متتاليان متقايسان) فإنّ $ABCD$ مربع.



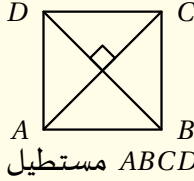
خاصية 36 إذا كان لمستطيل ضلعان متتاليان متقايسان فهو مربع.

بما أن $ABCD$ معين بحيث
(ضلعان متتاليان $(AB) \perp (AD)$)
و متعامدان) فإن $ABCD$ مربع.



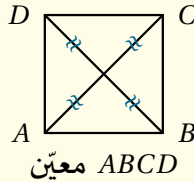
خاصية 37 إذا كان لمعين
ضلعان متتاليان متعامدان فهو
مربع.

بما أن $ABCD$ مستطيل بحيث
(قطراه متعامدان) $(AC) \perp (BD)$
فإن $ABCD$ مربع.



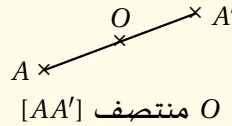
خاصية 38 إذا كان لمستطيل
قطران متعامدان فهو مربع.

بما أن $ABCD$ معين بحيث
 $AC = BD$ (قطراه متقايسان) فإن
 $ABCD$ مربع.



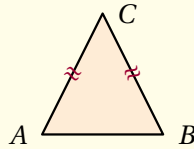
خاصية 39 إذا كان لمعين
قطران متقايسان فهو مربع.

بما أن O منتصف القطعة $[AA']$
فإن $OA = OA' = AA' \div 2$.



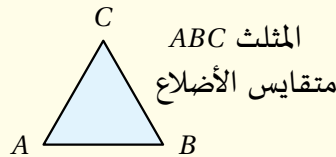
خاصية 40 منتصف قطعة
مستقيم تبعد بنفس المسافة عن
طرفيها.

المثلث ABC متساوي الساقين
رأسه الأساسي C و بالتالي
 $CA = CB$.



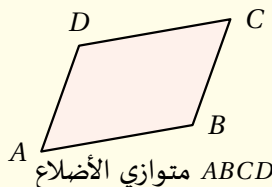
خاصية 41 للمثلث المتساوي
الساقين ضلعان متقايسان (لهما
نفس الطول)

المثلث ABC متقايس الأضلاع
و بالتالي $AB = BC = CA$.



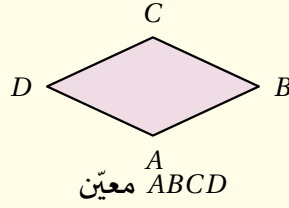
خاصية 42 للمثلث المتقايس
الأضلاع ثلاثة أضلاع متقايسة (لهما
نفس الطول).

بما أن $ABCD$ متوازي الأضلاع فإن
 $AD = BC$ و $AB = DC$



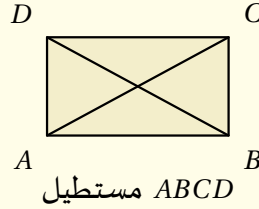
خاصية 43 في متوازي الأضلاع
(كفي، معين، مستطيل، مربع)،
كل ضلعين متقابلين متقايسان.

بما أن $ABCD$ معين فإن أضلاعه الأربعة متقايسة أي $AB = BC = CD = DA$.



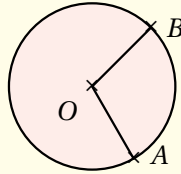
خاصية 44 الأضلاع الأربعة للمعين (أو المربع) متقايسة (لها نفس الطول).

بما أن $ABCD$ مستطيل فإن قطريه متقايسان أي $AC = BD$.



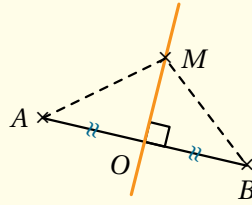
خاصية 45 قطرا المستطيل متقايسان (لهما نفس الطول).

النقطتان A و B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها O إذاً $OA = OB$.



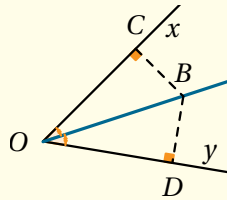
خاصية 46 إذا انتمت نقطتان إلى نفس الدائرة فإنهما تبعدان بنفس المسافة عن مركزها.

النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ إذاً فهي تبعد بنفس المسافة عن طرفيها أي $MA = MB$.



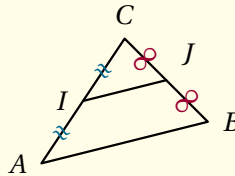
خاصية 47 إذا انتمت نقطة إلى محور قطعة مستقيم فإنها تبعد بنفس المسافة عن طرفيها.

B تنتمي إلى منصف الزاوية $\widehat{xOy}$ مع $(BC) \perp (OC)$ و $(BD) \perp (OD)$ إذاً فهي تبعد بنفس المسافة عن ضلعيها أي $BC = BD$.



خاصية 48 إذا انتمت نقطة إلى منصف زاوية فإنها تبعد بنفس المسافة عن ضلعيها.

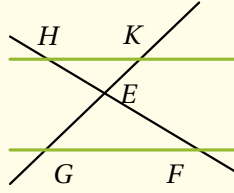
في المثلث ABC لدينا :
 I منتصف $[AC]$ و J منتصف $[BC]$
 فحسب نظرية مستقيم المنتصين نستنتج أن $IJ = AB \div 2$.



خاصية 49 في مثلث، طول القطعة الواصلة بين منتصفي الضلعين يساوي نصف طول الضلع الثالث (نظرية مستقيم المنتصين).

خاصية 50 نظرية طاليس

إذا كانت $M \in (AB)$ و $N \in (BC)$ بحيث $(MN) \parallel (AC)$ فإن :

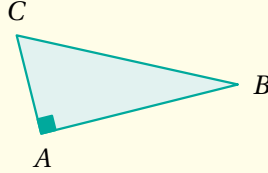
$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$$


بما أن $H \in (EF)$ و $K \in (EG)$ بحيث $(HK) \parallel (GF)$ فحسب نظرية طاليس نستنتج أن :

$$\frac{EF}{EH} = \frac{EG}{EK} = \frac{GF}{HK}$$

خاصية 51 نظرية فيثاغورس

في المثلث القائم، مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين القائمين.

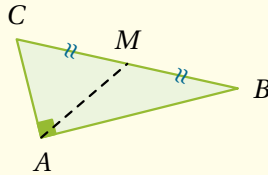


بما أن المثلث ABC قائم في A فحسب نظرية فيثاغورس نستنتج أن :

$$BC^2 = BA^2 + AC^2$$

خاصية 52

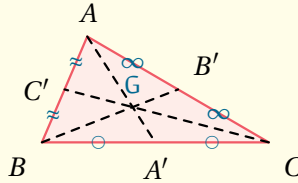
في المثلث القائم، طول المتوسط المتعلق بالوتر يساوي نصف طول الوتر (نظرية طول المتوسط المتعلق بالوتر في المثلث القائم).



المثلث ABC قائم في A و M منتصف الوتر $[BC]$ فحسب نظرية طول المتوسط المتعلق بالوتر نستنتج أن : $AM = BC \div 2$

خاصية 53

مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات) يبعد عن كل رأس بثُلثي طول المتوسط الذي يشمل هذا الرأس.

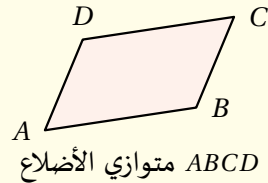


النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC و $[AA']$ هو المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ و بالتالي :

$$AG = \frac{2}{3} AA'$$

خاصية 54

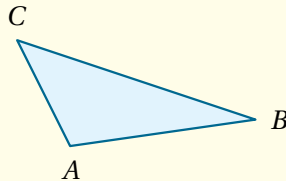
في متوازي الأضلاع (كفي، معين، مستطيل، مربع)، كل زاويتين متقابلتين متقايستان.



بما أن $ABCD$ متوازي الأضلاع فإن $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ و $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$

خاصية 55

مجموع أقياس زوايا المثلث يساوي 180° .

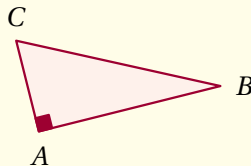


في المثلث ABC لدينا :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

خاصية 56

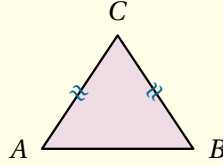
في المثلث القائم، الزاويتان الحادتان متتامتان (مجموعهما يساوي 90°).



بما أن المثلث ABC قائم في A فإن :

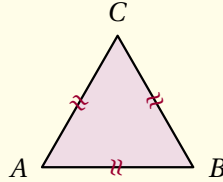
$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

بما أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه الأساسي C فإن :
 $\hat{A} = \hat{B}$



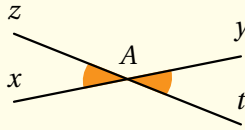
خاصية 57 في المثلث المتساوي الساقين، زاويتا القاعدة متقايستان.

بما أن المثلث ABC متقايس الأضلاع فإن :
 $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$



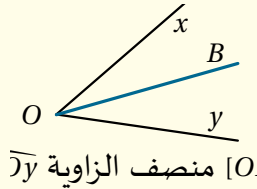
خاصية 58 للمثلث المتقايس الأضلاع ثلاث زوايا متقايسة و قيس كل منها يساوي 60° .

الزاويتان $\widehat{yAt}$ و $\widehat{xAz}$ متقابلتان بالرأس إذا :
 $\widehat{xAz} = \widehat{yAt}$



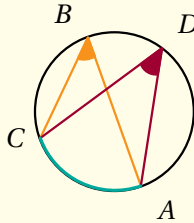
خاصية 59 الزاويتان المتقابلتان بالرأس متقايستان.

بما أن $[OB]$ هو منصف الزاوية $\widehat{xOy}$ فإن :
 $\widehat{xOB} = \widehat{BOy} = \widehat{xOy} \div 2$



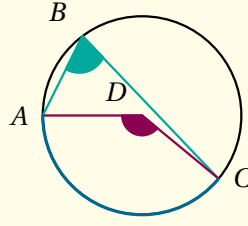
خاصية 60 منصف زاوية يقسمها إلى زاويتين متجاورتين و متقايستين (لهما نفس القيس).

الزاويتان $\widehat{ABC}$ و $\widehat{ADC}$ تحصران نفس القوس $\widehat{AC}$ و بالتالي فهما متقايستان أي :
 $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$



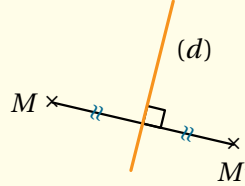
خاصية 61 الزاويتان المرسومتان داخل دائرة و اللتان تحصران نفس القوس هما زاويتان متقايستان.

الزاوية المحيطية $\widehat{ABC}$ و الزاوية المركزية $\widehat{ADC}$ تحصران نفس القوس $\widehat{AC}$ و بالتالي:
 $\widehat{ADC} = 2\widehat{ABC}$



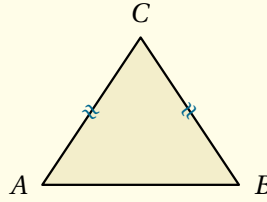
خاصية 62 قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي نصف قياس الزاوية المركزية التي تحصر نفس القوس معها.

النقطتان M و M' متناظرتان بالنسبة إلى المستقيم (d) إذاً (d) هو محور القطعة $[MM']$.



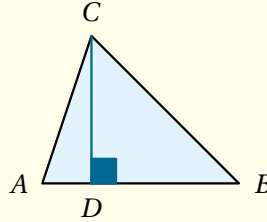
خاصية 63 إذا كانت نقطتان متناظرتين بالنسبة إلى مستقيم فإن هذا المستقيم هو محور القطعة الواصلة بين النقطتين.

بما أن $CA = CB$ فإن النقطة C تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$.



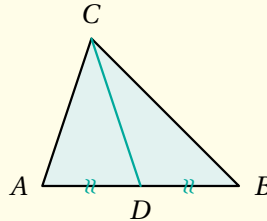
خاصية 64 كل نقطة متساوية المسافة عن طرفي قطعة مستقيم هي نقطة تنتمي إلى محور هذه القطعة.

بما أن $(CD) \perp (AB)$ فإن المستقيم (CD) هو الارتفاع المتعلق بالضلع $[AB]$ في المثلث ABC .



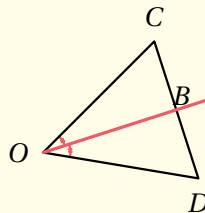
خاصية 65 المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس مثلث و يعامد حامل الضلع المقابل لهذا الرأس هو الارتفاع المتعلق بهذا الضلع.

بما أن النقطة D هي منتصف الضلع $[AB]$ فإن القطعة $[CD]$ هي المتوسط المتعلق بالضلع $[AB]$ في المثلث ABC .



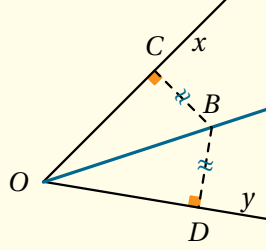
خاصية 66 القطعة التي طرفاها أحد رؤوس مثلث و منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس هي المتوسط المتعلق بهذا الضلع.

المستقيم (OB) يقسم الزاوية $\widehat{COD}$ إلى زاويتين متقايسيتين إذاً (OB) هو منصف الزاوية $\widehat{COD}$.



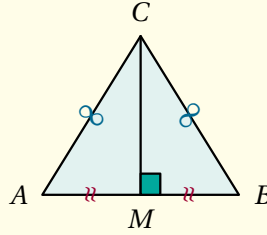
خاصية 67 المستقيم الذي يقسم زاوية إلى زاويتين متقايسيتين هو منصف هذه الزاوية.

بما أن $(OC) \perp (BC)$ ، $BC = BD$ فإن النقطة O تنتمي إلى منصف الزاوية $\widehat{COD}$ (إذاً نصف المستقيم $[OB]$ هو منصف الزاوية $\widehat{COD}$).



خاصية 68 كل نقطة متساوية البعد عن ضلعي زاوية هي نقطة تنتمي إلى منصف هذه الزاوية.

بما أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه الأساسي C ، M منتصف $[AB]$ و $(CM) \perp (AB)$ فإن (CM) هو : المتوسط المتعلق بالزاوية $\widehat{ACB}$ ، الارتفاع المتعلق بالزاوية $\widehat{ACB}$ و منصف الزاوية $\widehat{ACB}$.



خاصية 69 محور قاعدة المثلث المتساوي الساقين هو أيضا الارتفاع المتعلق بهذه القاعدة، المتوسط المتعلق بها و منصف زاوية الرأس الأساسي.

وَاحْذَرِ يَفُوتُكَ فَخْرُ ذَاكَ الْمَغْرَسِ
مَنْ هُمُّهُ فِي مَطْعَمٍ أَوْ مَلْبَسِ
فِي حَالَتِيهِ: عَارِيًّا أَوْ مُكْتَسِ
وَاهْجُرْ لَهُ طَيْبَ الرَّقَادِ وَ عَبَسِ
كُنْتُ الرَّئِيسَ وَفَخْرُ ذَاكَ الْمَجْلِسِ

الْعِلْمُ مَغْرُسٌ كُلُّ فَخْرٍ فَافْتَحِرْ
وَاعْلَمْ بِأَنَّ الْعِلْمَ لَيْسَ يَنَالُهُ
إِلَّا أَخُو الْعِلْمِ الَّذِي يُعْنَى بِهِ
فَاجْعَلْ لِنَفْسِكَ مِنْهُ حِطًّا وَافِرًّا
فَلَعَلَّ يَوْمًا إِنْ حَضَرْتَ بِمَجْلِسِ

سَأُنَبِّكَ عَنْ تَقْصِيلِهَا بَيَّانٍ
وَ صُحْبَةُ أُسْتَاذٍ وَ طُولُ زَمَانٍ

أَخِي لَنْ تَنَالَ الْعِلْمَ إِلَّا بِسِتَّةٍ
ذِكَاةً وَ حِرْصَ وَ اجْتِهَادَ وَ بُلْعَةً

