



الخليل للمathematics

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

تمارين مع الحل في المتتاليات العددية

5

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 01 / 15

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} \end{cases}$$

و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = u_n - 4$$

- ① بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_n \leq 4$
- ② ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.
- ③ بين أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
- ④ اكتب كل من (v_n) و (u_n) بدلالة n .
- ⑤ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$
- ⑥ لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$w_n = 5 \left(\frac{1}{v_n + 5} - 1 \right)$$

- ① بين أن المتتالية (w_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

$$\textcircled{2} \text{ احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n - w_n]$$

1 تبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_n \leq 4$

نستعمل البرهان بالتراجع:

• من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 1 \leq 4 \dots (*)$$

الخاصية محققة من أجل $n = 0$

• نفرض أن $u_n \leq 4$ محققة ونثبت أن $u_{n+1} \leq 4$:

$$u_n \leq 4 \Rightarrow \frac{2}{3}u_n \leq \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} \leq 4$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq 4 \dots (**)$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع : من (*) و (**) نجد أن:

$$\boxed{u_n \leq 4}$$

2 دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} - u_n \\ &= -\frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} &= 0 \\ \Rightarrow u_n &= 4 \end{aligned}$$

u_n	$-\infty$	4	$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$	+	0	-

ومنه لما $u_n \leq 4$ لدينا (u_n) متزايدة تماماً.

3 تبين أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \\ &= \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} - 4 \\ &= \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{3} \\ &= \frac{2}{3}(u_n - 4) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} v_n$$

ولدينا:

$$v_0 = u_0 - 4 = -3$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = -3$.

④ كتابة كلا من (v_n) و (u_n) بدلالة n :

$$v_n = -3 \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

ولدينا:

$$v_n = u_n - 4 \Rightarrow u_n = v_n + 4$$

$$\Rightarrow u_n = 4 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

⑤ حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= v_1 + 4 + v_2 + 4 + \dots + v_n + 4 \\ &= 4n + (v_1 + v_2 + \dots + v_n) \\ &= 4n - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^1 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \right) \\ &= 4n - 2 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n}{\frac{1}{3}} \right) \\ &= 4n - 6 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right) \end{aligned}$$

⑥

① تبين أن المتتالية (w_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$:

لدينا:

$$w_{n+1} - w_n = 5 \left(\frac{1}{v_{n+1} + 5} - 1 \right) - 5 \left(\frac{1}{v_n + 5} - 1 \right)$$

$$= 5 \left(\frac{1}{\underbrace{5 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}}_{v_{n+1}}} - 1 - \frac{1}{\underbrace{5 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n}_{v_n}} + 1 \right)$$

$$= 5 \left(\frac{1}{5 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}} - \frac{1}{5 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n} \right)$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} < \left(\frac{2}{3} \right)^n &\Rightarrow -3 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} > -3 \left(\frac{2}{3} \right)^n \\ &\Rightarrow 5 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} > 5 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n \\ &\Rightarrow \frac{1}{5 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}} < \frac{1}{5 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n} \\ &\Rightarrow \frac{1}{5 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}} - \frac{1}{5 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n} < 0 \\ &\Rightarrow 5 \left(\frac{1}{5 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}} - \frac{1}{5 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n} \right) < 0 \\ &\Rightarrow w_{n+1} - w_n < 0 \end{aligned}$$

ومنه (w_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

② حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n - w_n]$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n - w_n] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{4 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n}_0 - 5 \left(\frac{1}{\underbrace{-3 \left(\frac{2}{3} \right)^n}_0 + 5} - 1 \right) \right] \\ &= 4 - 5 \left(\frac{1}{5} - 1 \right) \\ &= \boxed{8} \end{aligned}$$

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶