

الموافقات في $\mathbb{Z}$ في البكالوريا.

2

بكالوريا 2008 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

35

التمرين

 a و b عدنان طبيعيا حيث $b = 2006$ ، $a = 1428$.1/ عيّن باقى القسمة الإقليدية للعدد a على 9.ب) بيّن أنّ: $b \equiv -1[9]$.ج) هل العدنان a و b متوافقان بترديد 9؟ برّر إجابتك.2/ ما هو باقى قسمة العدد $(a + b^2)$ على 9؟ب) استنتج باقى قسمة $(a + b^2)$ على 3.

بكالوريا 2008 // الموضوع الثانى // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(04 نقاط)

36

التمرين

1- احسب باقى قسمة كل من 3^2 ، 3^3 ، 3^4 ، 3^5 ، 3^6 على 7.2- عيّن باقى قسمة كل من: 3^{6n} و 3^{6n+4} على 7 حيث n عدد طبيعى غير معدوم.استنتج باقى قسمة 3^{2008} على 7.3- بيّن أنّ العدد: $3 \times 3^{6n+4} - 2 \times 3^{6n} + 4$ يقبل القسمة على 7 من أجل كل عدد طبيعى n .

بكالوريا 2009 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(05 نقاط)

37

التمرين

ليكن العدد الطبيعى $a = 25$ 1. أ- تحقق أنّ: $a \equiv 1[3]$.ب- استنتج باقى القسمة الإقليدية للعدد $2a^2 + 4$ على 3.ج- بيّن أنّ: $a^{360} - 5 \equiv 2[3]$.2. أ) ادرس، حسب قيم العدد الطبيعى n ، بواقى قسمة العدد 5^n على 3.ب) عيّن قيم العدد الطبيعى n بحيث: $5^n + a^2 \equiv 0[3]$.

بكالوريا 2009 // الموضوع الثانى // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(05 نقاط)

38

التمرين

1° أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعى n بواقى القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9.2° عيّن باقى القسمة الإقليدية للعدد: $(1429^{2009} + 2008^{1430})$ على 9.3° بيّن أنّ العدد A حيث: $A = 7^{3n} + 7^{3n+1} + 7^{3n+2} + 6$ يقبل القسمة على 9 من أجل كل عدد طبيعى n .

بكالوريا 2010 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

39

التمرين

 a و b عدنان طبيعيا حيث: $a = 2010$ و $b = 1431$.1. أ- عيّن باقى القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 7.ب- استنتج مما سبق، باقى القسمة الإقليدية للعدد $(a + 2b)$ على 7.ج- تحقق أنّ: $a^3 \equiv 1[7]$ و $b^3 \equiv 6[7]$ واستنتج أنّ $a^3 + b^3 \equiv 0[7]$.2. أوجد الأعداد الطبيعية n التى تحقق: $n + 2010^3 \equiv 1431[7]$. ثم استنتج قيم n الأصغر من أو تساوي 16.

التمرين 40

(06 نقاط)

بكالوريا 2010 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

في كل من الأسئلة الآتية، اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاث المقترحة، مع التعليل.

1. باقي القسمة الإقليدية للعدد (-203) على 5 هو:

(أ) -3

(ب) 2

(ج) 3

2. x عدد صحيح. إذا كان باقي القسمة الإقليدية للعدد x على 7 هو 5، فإن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2x + 5$ على 7 هو:

(أ) 0

(ب) 1

(ج) 2

الدوال كثيرات الحدود.

التمرين 41

(06 نقاط)

بكالوريا 2011 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث: $a = 619$ و $b = 2124$.

1. بين أن العددين a و b متوافقان بترديد 5.

2. (أ) بين أن: $2124 \equiv -1[5]$.

(ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2124^{720} و 619^{721} على 5.

(ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $2124^{2n} \equiv 1[5]$.

(د) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون: $2124^{4n} + 619^{4n+1} + n \equiv 0[5]$.

التمرين 42

(06 نقاط)

بكالوريا 2011 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

a ، b و c أعداد صحيحة بحيث

باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 7 هو 3، باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7 هو 4 وباقي القسمة الإقليدية للعدد c على 7 هو 6.

1 - عين باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين: $a \times b$ ، $a^2 - b^2$.

2 - (أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $c^{2n} \equiv 1[7]$.

(ب) تحقق أن $48 \equiv 6[7]$ ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين: 48^{2010} و 48^{2011} على 7.

التمرين 43

(06 نقاط)

بكالوريا 2012 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

اذكر في كل حالة من الحالات الآتية إن كانت العبارة المقترحة صحيحة أو خاطئة مع التعليل.

1. n و n' عدنان طبيعيان حيث: $n = 3n' + 5$. باقي قسمة n على 3 هو 5.

2. باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2012} على 7 هو 4. (لاحظ أن: $2012 = 3 \times 670 + 2$)

3. n عدد صحيح حيث: $n \equiv 2[11]$. باقي القسمة الإقليدية للعدد $2n^2 - 9$ على 11 هو 10.

الدوال التناظرية.

التمرين 44

(06 نقاط)

بكالوريا 2012 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

a و b عدنان طبيعيان بحيث: $a + b \equiv 7[11]$ و $a - b \equiv 5[11]$.

1. (أ) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^2 - b^2$ على العدد 11.

(ب) بين أن: $2a \equiv 1[11]$ و $2b \equiv 2[11]$ ثم استنتج أن: $a \equiv 6[11]$ و $b \equiv 1[11]$.

2. (أ) أثبت أن: $a^5 \equiv -1[11]$.

الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

- (ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $a^{10k} \equiv 1[11]$.
 3. (أ) تحقق أن: $2012 = 10 \times 201 + 2$.
 (ب) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد a^{2012} على العدد 11.

التمرين 45 (06 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

- 1- هل العددين 2013 و 718 متوافقان بترديد؟
 2- (أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^6 على 7.
 (ب) استنتج أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $4^{6n} - 1 \equiv 0[7]$.
 3- (أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2013 و 718 على 7.
 (ب) بيّن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3 \times 718^{6n} + 2013$ يقبل القسمة على 7.
 4- (أ) تحقق أن: $1434 \equiv -1[7]$.
 (ب) عيّن الأعداد الطبيعية n ، الأصغر من 25، بحيث: $1434^{2n} + n \equiv 0[7]$.

التمرين 46 (06 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

- a و b عددين صحيحان حيث: $a \equiv 2[7]$ و $b \equiv 6[7]$.
 1- عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $3a + b$ على 7.
 2- عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^2 + 3b^2$ على 7.
 3- (أ) تحقق أن: $b \equiv -1[7]$.
 (ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين b^{2013} و b^{1434} على 7.
 4- عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث: $(a + b)^n + n \equiv 0[7]$.

التمرين 47 (05 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

- 1) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 28 على العدد 9.
 2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $10^k \equiv 1[9]$.
 3) استنتج أن: $4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv 1[9]$.
 4) (أ) تحقق أن: $2^3 \equiv -1[9]$.
 (ب) عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث: $2^{6n} + n - 1 \equiv 0[9]$.

التمرين 48 (06 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

عيّن الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة في كلّ حالة من الحالات الخمسة مع التبرير:

الاقتراح (ج)	الاقتراح (ب)	الاقتراح (أ)		
2	5	8	عدد قواسم العدد 1435 هو:	1
6	7	-1	إذا كان $a \equiv -1[8]$ فإن باقي قسمة a على 8 هو:	2
3	4	2	العددين 1435 و 2014 متوافقان بتردد:	3
$x^9 + y^9 \equiv 4[5]$	$x^9 + y^9 \equiv 2[5]$	$x^9 + y^9 \equiv 3[5]$	إذا كان $x \equiv 2[5]$ و $y \equiv 2[5]$ فإن:	4
$9 \equiv 7[3]$	$9 \equiv 7[2]$	$9 \equiv 7[6]$	لدينا $21[6] \equiv 27$ إذن:	5

التمرين 49

(05 نقاط)

بكالوريا 2015 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

عَيِّن الاقتراح الصحيح الوحيد، مع التعليل، من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الأربع الآتية:

(1) إذا كان a عدداً صحيحاً حيث: $5 \mid a - 1$ فإن:

(أ) $a \equiv 2 \pmod{5}$

(ب) $a \equiv 6 \pmod{5}$

(ج) $a \equiv 99 \pmod{5}$

(2) باقى القسمة الإقليدية للعدد 99 - على 7 هو:

(أ) -1

(ب) 6

(ج) 1

(3) من أجل كل عدد طبيعى n ، العدد $10^n - 1$ يقبل القسمة على:

(أ) 3

(ب) 5

(ج) 2

(4) مجموع كل ثلاثة أعداد طبيعية متعاقبة هو دوماً:

(أ) عدد زوجي

(ب) مضاعف للعدد 3

(ج) مضاعف للعدد 4

التمرين 50

(07 نقاط)

بكالوريا 2015 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

المتتاليات العددية.

(5) عَيِّن باقى القسمة الإقليدية على 5 لكل عدد من الأعداد 3، 3^2 ، 3^3 و 3^4 .

(ب) استنتج أنه لكل k من $\mathbb{N}$ ؛ $3^{4k} \equiv 1 \pmod{5}$.

(6) عَيِّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $1 - 3^n$ قابلاً للقسمة على 5.

التمرين 51

(06 نقاط)

بكالوريا 2015 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

a و b عددان صحيحان يحققان: $7 \mid a$ و $7 \mid b - 6$.

(1) عَيِّن باقى القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين a و b .

(2) بَيِّن أن العددين $1 + a^3$ و $1 - b^3$ يقبلان القسمة على 7.

(3) أتحقق أن: $7 \mid a$ و $7 \mid b - 1436$.

(ب) عَيِّن باقى القسمة الإقليدية على 7 للعدد $2015^3 + 1436^3$.

(ج) استنتج أن: $7 \mid 2015^3 + 1436^3 - 1962^3 + 1$.

التمرين 52

(05 نقاط)

بكالوريا 2016 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(1) عَيِّن باقى القسمة الإقليدية لكل من الأعداد 2^0 ، 2^1 ، 2^2 ، 2^3 و 2^4 على العدد 5.

(2) أ بَيِّن أنه من أجل كل عدد طبيعى n يكون: $2^{4n} \equiv 1 \pmod{5}$.

(ب) استنتج باقى القسمة الإقليدية للعدد 2^{2016} على العدد 5.

(3) عَيِّن قيم العدد الطبيعى n بحيث يكون: $5 \mid n + 2 + 2^{2016}$.

التمرين 53

(06 نقاط)

بكالوريا 2016 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(1) أ عَيِّن باقى القسمة الإقليدية للعدد 4^3 على 9.

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعى k : $4^{3k} \equiv 1 \pmod{9}$.

(ج) ادرس حسب قيم العدد الطبيعى n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 9.

(د) عَيِّن باقى القسمة الإقليدية للعدد 2016^{2015} على 9.

(2) أ بَيِّن أنه من أجل كل عدد طبيعى n : $8^{2n} \equiv 1 \pmod{9}$.

ب) عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $8^{2n} + 4^n + 1$ مضاعفاً للعدد 9.

بكالوريا 2017-د1 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

54

التمرين

نعتبر الأعداد الطبيعية a, b و c حيث $a = 2016, b = 1437$ و $c = 1954$.

- (1) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من a, b و c على 5.
- (2) استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد: $a + b + c, a \times b \times c$ و b^4 على 5.
- (3) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n, b^{4n} \equiv 1[5]$.
- ب) استنتج أنّ العدد $b^{2016} - 1$ يقبل القسمة على 5.
- (4) أ) تحقّق أنّ: $c \equiv -1[5]$.
- ب) بيّن أنّ: $c^{2017} + c^{1438} \equiv 0[5]$.

بكالوريا 2017-د1 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

55

التمرين

a, b و c ثلاثة أعداد طبيعية حيث $a \equiv -5[7]$ و $b = 1966$ و $c = 2017$.

- (1) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد a, b و c على 7.
- (2) تحقّق أنّ: $b \equiv -1[7]$.
- (3) اثبت أنّ العدد: $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2$ يقبل القسمة على 7.
- (4) تحقّق أنّ: من أجل كل عدد طبيعي $k, 2^{3k} \equiv 1[7]$ ثمّ استنتج أنّ: $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ و $2^{3k+2} \equiv 4[7]$.
- (5) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $2^n + 3$ قابلاً للقسمة على 7.

بكالوريا 2017-د2 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

56

التمرين

(1) أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد 4، 4^2 و 4^3 على 9.

- ب) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي $n, 4^{3n} \equiv 1[9]$.
- ج) استنتج أنّ: من أجل كل عدد طبيعي $n, 4^{3n+1} \equiv 4[9]$.
- (2) تحقّق أنّ: $2020^{1438} \equiv 4[9]$.
- (3) بيّن أنّ العدد $(2020^{1438} - 2017^2 + 1995)$ يقبل القسمة على 9.

بكالوريا 2017-د2 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

57

التمرين

a و b عدنان صحيحان حيث: $a \equiv 14[13]$ و $b \equiv -1[13]$.

- (1) أ) بيّن أنّ باقي القسمة الإقليدية للعددين a و b على 13 هو 1 و 12 على الترتيب.
- ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من $a + b, a - b$ و $2a + b^2$ على 13.
- (2) بيّن أنّ العدد $a^{1438} + b^{2017}$ يقبل القسمة على 13.
- (3) عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث: $b^{2017} + n + 1438 \equiv 0[13]$.

بكالوريا 2018 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

58

التمرين

- (1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5.
- (2) عيّن العدد الطبيعي a بحيث يكون: $2018 = 4a + 2$.
- (3) بيّن أنّ العدد: $2^{2018} + 2017^8 - 5$ يقبل القسمة على 5.
- (4) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n: 12^n \equiv 2^n[5]$ و $(-3)^n \equiv 2^n[5]$.

(ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث: $12^n + (-3)^n - 4 \equiv 0 [5]$.

بكالوريا 2018 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

59

التمرين

a و b عدنان طبيعيا غير معدومين حيث $a = 4b + 6$.

(1) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4.

(2) بيّن أنّ a و b متوافقان بترديد 3.

(3) نضع $b = 489$.

(أ) تحقّق أنّ $a \equiv -1 [13]$.

(ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^{2018} + 40^{2968}$ على 13.

(ج) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $a^{2n} + n + 3$ قابلا للقسمة على 13.

بكالوريا 2019 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

60

التمرين

a و b عدنان طبيعيا حيث: $a = 2019$ و $b = 2969$.

(1) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 7.

(ب) استنتج أنّ العددين a و $3b$ متوافقان بترديد 7.

(2) بيّن أنّ: $9a + b \equiv 0 [7]$.

(3) تحقّق أنّ: $2a \equiv -1 [7]$ ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^{2969} \times 2^{2969}$ على 7.

(4) عيّن قيم العدد الطبيعي n حيث: $b^n + an + 2 \equiv 0 [7]$.

بكالوريا 2019 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

61

التمرين

a و b العدنان الطبيعيان حيث $a = 2019$ ، $b = 1441$.

(1) تحقّق أنّ: $a \equiv 13 [17]$.

(2) بيّن أنّ: a و b متوافقان بترديد 17، ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 17.

(3) بيّن أنّ $a \times b \equiv -1 [17]$ ثم استنتج أنّ $3a^2 \times b^2 + 14 \equiv 0 [17]$.

(4) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 13^n على 17.

(5) بيّن أنّ: $2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13 \equiv 0 [17]$.

(6) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق: $n + 1954^{1962} + 16 \equiv 0 [17]$.

بكالوريا 2020 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

62

التمرين

لتكن الأعداد الطبيعية a ، b و c حيث: $a = 2020$ ، $b = 2970$ و $c = 1441$.

(1) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد a ، b و c على 9.

(2) تحقّق أنّ العددين b و $(a + 5)$ متوافقان بترديد 9.

(3) تحقّق أنّ: $2a \equiv -1 [9]$ ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $(2a)^{31}$ على 9.

(4) بيّن أنّ العدد $(3a - 2b - 12c^2)$ يقبل القسمة على 9.

بكالوريا 2020 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

63

التمرين

a و b عدنان صحيحان حيث: $a \equiv 2 [7]$ ، $b = 2020$.

(1) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7.

الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

- (2) بين أن: $a^2 + b^2 \equiv -1[7]$ ثم استنتج أن العدد $8 - (a^2 + b^2)^{1962}$ يقبل القسمة على 7.
- (3) أ. عيّن بواقي القسمة الإقليدية لكلّ من الأعداد 4، 4^2 و 4^3 على 7.
- ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4^{3n} \equiv 1[7]$ ثم استنتج أن: $4^{3n+1} \equiv 4[7]$.
- ج. بين أن: $b^{21} \equiv 1[7]$.
- (4) عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $4^n + a + b^{21} \equiv 0[7]$.

بكالوريا 2021 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

64

التمرين

- ليكن a و b عددين طبيعيين حيث: $a = 2926$ و $b = 1715$.
- (1) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكلّ من العددين a و b على العدد 13.
- (2) أ. بين أن: $b + 1 \equiv 0[13]$ ، ثم استنتج أن: $b \equiv -1[13]$.
- ب. بين أن العدد $a^{1442} + b^{2021}$ يقبل القسمة على 13.
- (3) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $A_n = 27^n + 1$.
- أ. تحقّق أن: $27 \equiv 1[13]$ ، ثم استنتج أن: $A_n \equiv 2[13]$.
- ب. عيّن الأعداد الطبيعية n حتى يكون: $A_n + n + 11 \equiv 0[13]$.

بكالوريا 2021 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

65

التمرين

- لتكن الأعداد الطبيعية a ، b و c حيث: $a = 2021$ ، $b = 1442$ و $c = 1954$.
- (1) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعددين a و c على 3.
- (2) بين أن العددين a و b متوافقان بترديد 3.
- (3) أ. بين أن العدد $a + b - c$ يقبل القسمة على 3.
- ب. استنتج الأعداد الطبيعية n حتى يكون: $n + a + b - c \equiv 0[3]$.
- (4) عيّن باقي قسمة العدد $(b \times c)^{2021} + (a \times c)^{1442}$ على 3.

بكالوريا 2022 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(05 نقاط)

66

التمرين

- a و b عددان طبيعيين حيث: $a = 2022$ و $b = 1443$.
- (1) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكلّ من a و b على 5 ثم استنتج أن: $a + b \equiv 0[5]$.
- (2) أ. تحقّق أن باقي القسمة الإقليدية للعدد $(a + a^2 + a^3)$ على 5 هو 4.
- ب. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $(a + a^2 + a^3 + n)$ القسمة على 5.
- (3) تحقّق أن: $a + b + 4 \equiv -1[5]$ ثم بين أن العدد $(a + b + 4)^b + (a + b + ab)^a$ يقبل القسمة على 5.

بكالوريا 2022 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

67

التمرين

- a و b عددان طبيعيين حيث باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 9 هو 8 و $a + b \equiv 3[9]$.
- (1) بين أن باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 9 هو 4.
- (2) تحقّق أن العددين b و 103 متوافقان بترديد 9.
- (3) أ. بين أن: $a \equiv -1[9]$ و $103^3 \equiv 1[9]$.
- ب. تحقّق أن: $a^{2022} + (16 \times b)^{1443} \equiv 2[9]$.
- (4) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $a^{2022} + 103^3 + n \equiv 0[9]$.

حلول الموافقات في $\mathbb{Z}$ في البكالوريا.

2

بكالوريا 2008 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 35

لدينا: $a = 1428$ و $b = 2006$.أ/1 تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 9:لدينا: $6 + 9 \times (158) = a$ ، أي: $a \equiv 6[9]$ ؛ ومنه: باقي قسمة a على 9 هو 6.ب) تبيان أن $b \equiv -1[9]$:لدينا: $9 \times (223) = 2007 = b - (-1) = b + 1$ (الفرق $b - (-1)$ مضاعف لـ 9)؛ إذن: $b \equiv -1[9]$.ج) دراسة توافق العدد a و b بترديد 9:لدينا: $b \equiv -1[9]$ ، ومنه: $b \equiv (-1 + 9)[9]$ ، أي: $b \equiv 8[9]$ ؛ ومنه: باقي قسمة b على 9 هو 8.نلاحظ أن: العددين a و b ليس لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على 9، فهما غير متوافقين بترديد 9.أ/2 تعيين باقي قسمة العدد $(a + b^2)$ على 9:لدينا: $6 + (-1)^2[9] = a + b^2 \equiv 7[9]$ ؛ إذن: باقي قسمة $(a + b^2)$ على 9 هو 7.ب) استنتاج باقي قسمة $(a + b^2)$ على 3:حسب نتيجة السؤال أ)، لدينا: $a + b^2 \equiv 7[9]$ معناه: $a + b^2 = 9k + 7$ ($k \in \mathbb{N}$)ومنه: $3(3k) + 3(2) + 1 = a + b^2 = 9k' + 1 = 3k' + 1$ (حيث $k' = 3k + 2$)إذن: باقي قسمة $(a + b^2)$ على 3 هو 1.

بكالوريا 2008 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(04 نقاط)

حل التمرين 36

1- حساب باقي قسمة كل من $3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$ على 7: لدينا:لدينا: $3^2 \equiv 2[7]$ ، إذن: باقي قسمة 3^2 على 7 هو 2.لدينا: $3^3 \equiv 6[7]$ ، إذن: باقي قسمة 3^3 على 7 هو 6.لدينا: $3^4 \equiv 4[7]$ ، إذن: باقي قسمة 3^4 على 7 هو 4.لدينا: $3^5 \equiv 5[7]$ ، إذن: باقي قسمة 3^5 على 7 هو 5.لدينا: $3^6 \equiv 1[7]$ ، إذن: باقي قسمة 3^6 على 7 هو 1.2- تعيين باقي قسمة كل من 3^{6n} و 3^{6n+4} على 7 حيث n عدد طبيعي غير معدوم:لدينا: $3^6 \equiv 1[7]$ ، ومنه: $(3^6)^n \equiv (1)^n[7]$ (حيث $n \in \mathbb{N}^*$)وعليه: $3^{6n} \equiv 1[7]$ ؛ إذن: باقي قسمة 3^{6n} على 7 هو 1.

$$\textcircled{3} \text{ لدينا: } \begin{cases} 3^{6n} \equiv 1[7] \\ 3^4 \equiv 4[7] \end{cases} \text{ ومنه: } 3^{6n} \times 3^4 \equiv 1 \times 4[7]$$

أي: $3^{6n+4} \equiv 4[7]$ ؛ إذن: باقى قسمة 3^{6n+4} على 7 هو 4.

استنتاج باقى قسمة 3^{2008} على 7: (نقسم الأس 2008 على الدور 6)

لدينا: $3^{2008} \equiv 3^{6 \times (334) + 4}[7]$ ، ومنه: $3^{2008} \equiv 4[7]$ ؛ إذن: باقى قسمة 3^{2008} على 7 هو 4.

3- تبيان أن العدد، $3 \times 3^{6n+4} - 2 \times 3^{6n} + 4$ يقبل القسمة على 7 من أجل كل عدد طبيعى n :

لدينا: $3 \times 3^{6n+4} - 2 \times 3^{6n} + 4 \equiv 3 \times 4 - 2 \times 1 + 4[7]$ ،

ومنه: $3 \times 3^{6n+4} - 2 \times 3^{6n} + 4 \equiv 12 - 2 + 4[7]$ ،

أي: $3 \times 3^{6n+4} - 2 \times 3^{6n} + 4 \equiv 14[7]$ ، وبالتالي: $3 \times 3^{6n+4} - 2 \times 3^{6n} + 4 \equiv 0[7]$ ؛

إذن: $3 \times 3^{6n+4} - 2 \times 3^{6n} + 4$ يقبل القسمة على 7 من أجل كل عدد طبيعى n .

حل التمرين 37 (05 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

لدينا: العدد الطبيعى $a = 25$.

1. أ- التحقق أن، $a \equiv 1[3]$ ؛ لدينا: $a = 3 \times (8) + 1$ ، ومنه: باقى قسمة a على 3 هو 1، إذن: $a \equiv 1[3]$.

ب- استنتاج باقى القسمة الإقليدية للعدد $2a^2 + 4$ على 3:

لدينا: $2a^2 + 4 \equiv 2 \times (1)^2 + 1[3]$ ، أي: $2a^2 + 4 \equiv 3[3]$ ،

وبالتالى: $2a^2 + 4 \equiv 0[3]$ ؛

إذن: باقى قسمة العدد $2a^2 + 4$ على 3 هو 0.

ج- تبيان أن، $a^{360} - 5 \equiv 2[3]$ ؛

لدينا: $a^{360} - 5 \equiv (1)^{360} + 1[3]$ ، أي: $a^{360} - 5 \equiv (1 + 1)[3]$ ؛ إذن: $a^{360} - 5 \equiv 2[3]$.

2. أ) دراسة، حسب قيم العدد الطبيعى n ، بواقى قسمة العدد 5^n على 3: لدينا:

$$\textcircled{1} 5^0 \equiv 1[3]$$

$$\textcircled{2} 5^1 \equiv 2[3]$$

$$\textcircled{3} 5^2 \equiv 1[3]$$

ومنه: بواقى قسمة 5^n على 3 تُشكل متتالية دورية، دورها 2؛ وبالتالي:

$n =$	$2k$	$2k + 1$	$k \in \mathbb{N}$
$5^n \equiv$	1	2	[3]

ب) تعيين قيم العدد الطبيعى n بحيث، $5^n + a^2 \equiv 0[3]$ ؛

$$5^n + a^2 \equiv 0[3] \text{ يعنى: } 5^n + 1 \equiv 0[3]$$

$$\text{ومنه: } 5^n \equiv -1[3]$$

وعليه: $5^n \equiv 2[3]$ ؛ وحسب نتيجة السؤال أ) فإن: $n = 2k + 1$ (حيث $k \in \mathbb{N}$).

بكالوريا 2009 // الموضوع الثاني // الشعبة: آوف؛ لغ أ.

(05 نقاط)

حل التمرين 38

°1) دراسة تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9: لدينا:

$$\textcircled{1} \quad 7^0 \equiv 1[9]$$

$$\textcircled{2} \quad 7^1 \equiv 7[9]$$

$$\textcircled{3} \quad 7^2 \equiv 4[9]$$

$$\textcircled{4} \quad 7^3 \equiv 1[9] \text{ و}$$

ومنه: بواقي قسمة 7^n على 9 تُشكل متتالية دورية، دورها 3؛ وبالتالي:

$n =$	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$	$n \in \mathbb{N}$
$7^n \equiv$	1	7	4	[9]

°2) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد، $1429^{2009} + 2008^{1430}$ على 9:

$$\text{لدينا: } 1429^{2009} + 2008^{1430} \equiv 7^{3 \times (669) + 2} + 1^{1430} \equiv 7^2 + 1 \equiv 4 + 1 \equiv 5[9] \text{ ومنه: } 1429^{2009} + 2008^{1430} \equiv 5[9]$$

$$\text{أي: } 1429^{2009} + 2008^{1430} \equiv 5[9]$$

إذن: باقي قسمة $1429^{2009} + 2008^{1430}$ على 9 هو [5].°3) تبيان أن العدد A حيث، $A = 7^{3n+7} + 7^{3n+1} + 7^{3n+2} + 6$ يقبل القسمة على 9 من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\text{لدينا: } 7^{3n+7} + 7^{3n+1} + 7^{3n+2} + 6 \equiv 1 + 7 + 4 + 6 \equiv 18 \equiv 0[9] \text{ ومنه: } A \equiv 0[9]$$

$$\text{وعليه: } A \equiv 0[9]$$

إذن: A يقبل القسمة على 9 من أجل كل عدد طبيعي n .

بكالوريا 2010 // الموضوع الأول // الشعبة: آوف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 39

لدينا: $a = 2010$ و $b = 1431$.1. أ- تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 7:

$$\textcircled{1} \quad \text{لدينا: } a = 7 \times (287) + 1 \text{ أي: } a \equiv 1[7] \text{ إذن: باقي قسمة } a \text{ على } 7 \text{ هو } [1].$$

$$\textcircled{2} \quad \text{لدينا: } b = 7 \times (204) + 3 \text{ أي: } b \equiv 3[7] \text{ إذن: باقي قسمة } b \text{ على } 7 \text{ هو } [3].$$

ب- استنتاج مما سبق، باقي القسمة الإقليدية للعدد $(a + 2b)$ على 7:

$$\text{لدينا: } a + 2b \equiv 1 + 2 \times (3) \equiv 7 \equiv 0[7] \text{ أي: } a + 2b \equiv 0[7]$$

وبالتالي: $a + 2b \equiv 0[7]$ ؛ إذن: باقي قسمة $a + 2b$ على 7 هو [0].ج- التحقق أن، $a^3 \equiv 1[7]$ و $b^3 \equiv 6[7]$:

$$\textcircled{1} \quad \text{لدينا: } a^3 \equiv (1)^3 \equiv 1[7] \text{ ومنه: } a^3 \equiv 1[7]$$

$$\textcircled{2} \quad \text{ولدينا: } b^3 \equiv (3)^3 \equiv 27 \equiv 6[7] \text{ ومنه: } b^3 \equiv 6[7]$$

« استنتاج أن $a^3 + b^3 \equiv 0[7]$ »

$$\text{لدينا: } a^3 + b^3 \equiv 1 + 6 \equiv 7 \equiv 0[7] \text{ أي: } a^3 + b^3 \equiv 0[7] \text{ إذن: } a^3 + b^3 \equiv 0[7] \text{ (لأن } 7 \equiv 0[7] \text{).}$$

الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

2. ايجاد الأعداد الطبيعية n التي تحقق، $n + 2010^3 \equiv 1431[7]$

$$n + 2010^3 \equiv 1431[7] \text{ معناه: } (n + a^3 \equiv b[7]) \text{ } n + 2010^3 \equiv 1431[7]$$

$$\text{ومنه: } n \equiv (3 - 1)[7]$$

أي: $n \equiv 2[7]$ إذن: $n = 7k + 2$ (حيث $k \in \mathbb{N}$ عدد طبيعي).

« استنتاج قيم n الأصغر من أو تساوي 16:

$$n \leq 16 \text{ معناه: } 7k + 2 \leq 16 \text{ ومنه: } k \leq \frac{14}{7} \text{ أي: } k \leq 2 \text{ وبالتالي:}$$

$k =$	0	1	2
$n =$	2	9	16

بكالوريا 2010 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 40

اختيار الإجابة الصحيحة، مع التعليل:

1. باقي القسمة الإقليدية للعدد (-203) على 5 هو: 2. لأن:

لدينا: $-203 = 5 \times (-41) + 2$ ، أي: $-203 \equiv 2[5]$ ، ومنه: باقي القسمة الإقليدية للعدد (-203) على 5 هو 2؛ إذن: الإجابة الصحيحة هي: ب).

2. x عدد صحيح. إذا كان باقي القسمة الإقليدية للعدد x على 7 هو 5، فإن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2x + 5$ على 7 هو: 1. لأن:

$$\text{إذا كان } x \equiv 5[7] \text{ يكون: } 2x \equiv 10[7]$$

$$\text{ومنه: } 2x \equiv 3[7]$$

$$\text{وعليه: } 2x + 5 \equiv 3 + 5[7]$$

$$\text{أي: } 2x + 5 \equiv 8[7] \text{ وبالتالي: } 2x + 5 \equiv 1[7] \text{ إذن: الإجابة الصحيحة هي: ب).}$$

الدوال كثيرات الحدود.

بكالوريا 2011 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 41

لدينا: $a = 619$ و $b = 2124$.

1. تبيان أن العددين a و b متوافقان بترديد 5:

الطريقة ①:

$$\blacksquare \text{ لدينا: } a = 5 \times (123) + 4 \text{، أي: } a \equiv 4[5] \text{؛ إذن: باقي قسمة } a \text{ على 5 هو 4.}$$

$$\blacksquare \text{ ولدينا: } b = 5 \times (424) + 4 \text{، أي: } b \equiv 4[5] \text{؛ إذن: باقي قسمة } b \text{ على 5 هو 4.}$$

نلاحظ أن: للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على 5 فهما متوافقين بترديد 5.

الطريقة ②:

$$\text{لدينا: } (301) \times 5 = 1505 = 2124 - 619 = b - a \text{ (الفرق } b - a \text{ مضاعف لـ 5)، إذن: } a \equiv b[5].$$

$$2. \text{ (أ) تبيان أن، } 2124 \equiv -1[5] \text{ (أي: تبيان أن } b \equiv -1[5] \text{)}$$

$$\text{لدينا: } b - (-1) = b + 1 = 2125 = 5 \times (425) \text{ (الفرق } b - (-1) \text{ مضاعف لـ 5)، إذن: } b \equiv -1[5].$$

الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

ب) استنتاج باقى القسمة الإقليدية لكل من العددين 619^{721} و 2124^{720} على 5:
(استنتاج باقى قسمة b^{720} و a^{721} على 5)

❶ لدينا: $b \equiv -1[5]$ ، ومنه: $b^{720} \equiv (-1)^{720}[5]$

ويكون: $b^{720} \equiv 1[5]$ (لأنّ عدد زوجي)؛ إذن: باقى قسمة b^{720} على 5 هو 1.

❷ ولدينا: $a \equiv -1[5]$ (لأنّ $a \equiv b[5]$ و $b \equiv -1[5]$)، ومنه: $a^{721} \equiv (-1)^{721}[5]$

ويكون: $a^{721} \equiv -1[5]$ (لأنّ عدد فردي)،

وبالتالى: $a^{721} \equiv 4[5]$ ؛

إذن: باقى قسمة a^{721} على 5 هو 4.

ج) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن، $2124^{2n} \equiv 1[5]$: (أي: تبين أن $b^{2n} \equiv 1[5]$)

لدينا: $b \equiv -1[5]$ ، ومنه: $b^{2n} \equiv (-1)^{2n}[5]$ ، ويكون: $b^{2n} \equiv 1[5]$ (لأنّ عدد زوجي).

د) تعيين قيم العدد طبيعي n حتى يكون، $2124^{4n} + 619^{4n+1} + n \equiv 0[5]$:
($b^{4n} + a^{4n+1} + n \equiv 0[5]$)

$b^{4n} + a^{4n+1} + n \equiv 0[5]$ تكافئ: $b^{4n} + a^{4n} \times a + n \equiv 0[5]$

ومنه: $(b^{2n})^2 + (a^{2n})^2 \times a + n \equiv 0[5]$

وعليه: $(1)^2 + (1)^2 \times (-1) + n \equiv 0[5]$

أي: $n \equiv 0[5]$ ؛ إذن: $n = 5k$ (حيث $k \in \mathbb{N}$ عدد طبيعي).

بكالوريا 2011 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 42

لدينا: a, b, c أعداد صحيحة.

❶ باقى قسمة العدد a على 7 هو 3، أي: $a \equiv 3[7]$ ؛

❷ باقى قسمة العدد b على 7 هو 4، أي: $b \equiv 4[7]$ ؛

❸ باقى قسمة العدد c على 7 هو 6، أي: $c \equiv 6[7]$.

1- تعيين باقى القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين، $a \times b$ ، $a^2 - b^2$:

❶ لدينا: $a \times b \equiv 3 \times 4[7]$ ، أي: $a \times b \equiv 12[7]$

وبالتالى: $a \times b \equiv 5[7]$ ؛ إذن: $a \times b$ باقى قسمة على 7 هو 5.

❷ ولدينا: $a^2 - b^2 \equiv (3)^2 - (4)^2[7]$ ، ومنه: $a^2 - b^2 \equiv -7[7]$

وبالتالى: $a^2 - b^2 \equiv 0[7]$ ؛

إذن: باقى قسمة $(a^2 - b^2)$ على 7 هو 0.

2- أ) اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $c^{2n} \equiv 1[7]$:

لدينا: $c \equiv 6[7]$ ، ومنه: $c \equiv (6 - 7)[7]$

أي: $c \equiv -1[7]$ ، وبالتالى: $c^{2n} \equiv (-1)^{2n}[7]$ ؛ إذن: $c^{2n} \equiv 1[7]$ (لأنّ عدد زوجي).

ب) التحقق أن $48 \equiv 6[7]$: لدينا: $48 = 7 \times (6) + 6$ ، أي: باقى قسمة 48 على 7 هو 6؛ إذن: $48 \equiv 6[7]$.

الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

« استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 48^{2010} و 48^{2011} على 7:

لدينا: $48 \equiv 6[7]$ ، ومنه: $48 \equiv (6 - 7)[7]$

أي: $48 \equiv -1[7]$

وعليه:
$$\begin{cases} 48^{2010} \equiv (-1)^{2010}[7] \\ 48^{2011} \equiv (-1)^{2011}[7] \end{cases}$$

وبالتالي:
$$\begin{cases} 48^{2010} \equiv 1[7] & (\text{لأن } 2010 \text{ عدد زوجي}) \\ 48^{2011} \equiv -1[7] & (\text{لأن } 2011 \text{ عدد فردي}) \end{cases}$$

إذن: باقي قسمة 48^{2010} على 7 هو 1، وباقي قسمة 48^{2011} على 7 هو 6.

حل التمرين 43 (06 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

ذكر في كل حالة من الحالات إن كانت العبارة المقترحة صحيحة أو خاطئة مع التعليل:

1. خاطئة، لأن:

3 الطريقة 1: $5 > 3$.

3 الطريقة 2: $n = 3n' + 5 = 3n' + 3 \times (1) + 2 = 3(n' + 1) + 2 = 3n'' + 2$ (حيث $n'' = n' + 1$)

إذن: باقي قسمة n على 3 هو 2.

2. صحيحة، لأن:

لدينا: $2^{2012} \equiv 2^{3 \times (370) + 2}[7]$ ، ومنه: $2^{2012} \equiv 2^{3 \times (370)} \times 2^2[7]$

وعليه: $2^{2012} \equiv (2^3)^{370} \times 2^2[7]$

نجد: $2^{2012} \equiv (1)^{370} \times 4[7]$

أي: $2^{2012} \equiv 1 \times 4[7]$ ، وبالتالي: $2^{2012} \equiv 4[7]$

إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2012} على 7 هو 4.

3. صحيحة، لأن:

لدينا: $n \equiv 2[11]$ ، ومنه: $n^2 \equiv 4[11]$

وعليه: $2n^2 \equiv 8[11]$

ويكون: $2n^2 - 9 \equiv 8 - 9[11]$

أي: $2n^2 - 9 \equiv -1[11]$

ومنه: $2n^2 - 9 \equiv -1 + 11[11]$ ، وبالتالي: $2n^2 - 9 \equiv 10[11]$

إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد $2n^2 - 9$ على 11 هو 10.

الدوال التناظرية.

بكالوريا 2012 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 44

لدينا: a و b عدنان طبيعيان بحيث، $a + b \equiv 7[11]$ و $a - b \equiv 5[11]$.
 1.1 (أ) تعيين باقى القسمة الإقليدية للعدد $a^2 - b^2$ على العدد 11: (نعلم أن $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$)

$$\text{لدينا: } \begin{cases} a + b \equiv 7[11] \\ a - b \equiv 5[11] \end{cases} \text{ ومنه: } (a + b)(a - b) \equiv 7 \times 5[11]$$

$$\text{أي: } a^2 - b^2 \equiv 35[11]$$

$$\text{وبالتالى: } a^2 - b^2 \equiv 2[11]$$

إذن: باقى القسمة الإقليدية للعدد $a^2 - b^2$ على العدد 11 هو 2.

(ب) تبيان أن، $2a \equiv 1[11]$ و $2b \equiv 2[11]$:

$$\text{لدينا: } \begin{cases} a + b \equiv 7[11] \\ a - b \equiv 5[11] \end{cases} \text{ بالجمع نجد: } (a + b) + (a - b) \equiv 7 + 5[11]$$

$$\text{أي: } a + b + a - b \equiv 12[11]$$

$$\text{ومنه: } 2a \equiv 12[11] \text{ وعليه: } 2a \equiv 1[11]$$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} a + b \equiv 7[11] \\ a - b \equiv 5[11] \end{cases} \text{ بالطرح نجد: } (a + b) - (a - b) \equiv 7 - 5[11]$$

$$\text{أي: } a + b - a + b \equiv 2[11] \text{ ومنه: } 2b \equiv 2[11]$$

« استنتاج أن، $a \equiv 6[11]$ و $b \equiv 1[11]$ »

$$\text{لدينا: } 2a \equiv 1[11] \text{ ومنه: } 12a \equiv 6[11] \text{ وبمأن: } 12 \equiv 1[11] \text{ فإن: } a \equiv 6[11]$$

$$\text{ولدينا: } 2b \equiv 2[11] \text{ وبمأن: } 2 \equiv 2[11] \text{ فإن: } b \equiv 1[11]$$

2.1 (أ) اثبات أن، $a^5 \equiv -1[11]$:

$$\text{لدينا: } a \equiv 6[11] \text{ ومنه: } a^5 \equiv (6)^5[11]$$

$$\text{أي: } a^5 \equiv 7776[11] \text{ وعليه: } a^5 \equiv 10[11] \text{ إذن: } a^5 \equiv -1[11]$$

(ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعى k ، $a^{10k} \equiv 1[11]$:

$$\text{لدينا: } a^5 \equiv -1[11] \text{ ومنه: } (a^5)^{2k} \equiv (-1)^{2k}[11] \text{ إذن: } a^{10k} \equiv 1[11] \text{ (لأن } 2k \text{ عدد زوجي).}$$

3.1 (أ) التحقق أن، $2012 = 10 \times 201 + 2$:

$$\text{لدينا: } 2012 = 2010 + 2 = 10 \times 201 + 2 \text{ (الانتقال من طرف والوصول إلى الطرف الآخر)}$$

الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

(ب) تعيّن باقى القسمة الإقليدية للعدد a^{2012} على العدد 11:

$$\text{لدينا: } a^{2012} \equiv a^{10 \times (201) + 2} [11] \text{، ومنه: } a^{2012} \equiv a^{10 \times (201)} \times a^2 [11]$$

وحسب نتيجة السؤال 2.ب)، نجد: $a^{2012} \equiv 1 \times 6^2 [11]$

$$\text{أي: } a^{2012} \equiv 1 \times 36 [11]$$

$$\text{وعليه: } a^{2012} \equiv 36 [11]$$

وبالتالى: $a^{2012} \equiv 3 [11]$ ؛ إذن: باقى قسمة a^{2012} على 11 هو 3.

بكالوريا 2013 // الموضوع الأول // الشعبة: آوف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 45

1- دراسة توافق العددين 2013 و 718 بترديد 7:

الطريقة ①:

لدينا: $2013 = 7 \times (287) + 4$ ، أي: $2013 \equiv 4 [7]$ ؛ ولدينا: $718 = 7 \times (102) + 4$ ، أي: $718 \equiv 4 [7]$.
 إذن: العددين 2013 و 718 متوافقان بترديد 7 لأنّ لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على 7 وهو 4.

الطريقة ②:

لدينا: $2013 - 718 = 1295 = 7 \times (185)$ (الفرق $2013 - 718$ مضاعف لـ 7)، إذن: $2013 \equiv 718 [7]$.
 2-أ) تعيّن باقى القسمة الإقليدية للعدد 4^6 على 7:

لدينا: $4^6 \equiv 1 [7]$ ($4^6 = 4096$)، إذن: باقى القسمة الإقليدية للعدد 4^6 على 7 هو 1.ب) استنتاج أنّه، من أجل كل عدد طبيعى n ، $4^{6n} - 1 \equiv 0 [7]$ ؛

لدينا: $4^6 \equiv 1 [7]$ ، ومنه: $(4^6)^n \equiv 1^n [7]$ (حيث $n \in \mathbb{N}$)، وعليه: $4^{6n} \equiv 1 [7]$ ؛ ويكون: $4^{6n} - 1 \equiv 0 [7]$.
 3-أ) تعيّن باقى القسمة الإقليدية لكل من العددين 2013 و 718 على 7:

لدينا: $2013 = 7 \times (287) + 4$ ، أي: $2013 \equiv 4 [7]$ ؛ إذن: باقى قسمة 2013 على 7 هو 4.لدينا: $718 = 7 \times (102) + 4$ ، أي: $718 \equiv 4 [7]$ ؛ إذن: باقى قسمة 718 على 7 هو 4.ب) تبيان أنّ، العدد $3 \times 718^{6n} + 2013$ يقبل القسمة على 7:

$$\text{لدينا: } 3 \times 718^{6n} + 2013 \equiv 3 \times 4^{6n} + 4 [7] \text{، ومنه: } 3 \times 718^{6n} + 2013 \equiv 3 \times 1 + 4 [7]$$

$$\text{وعليه: } 3 \times 718^{6n} + 2013 \equiv 7 [7]$$

$$\text{وبالتالى: } 3 \times 718^{6n} + 2013 \equiv 0 [7]$$

إذن: $3 \times 718^{6n} + 2013$ يقبل القسمة على 7.4-أ) التحقّق أنّ، $1434 \equiv -1 [7]$ ؛

لدينا: $1434 - (-1) = 1434 + 1 = 1435 = 7 \times (205)$ (الفرق $1434 - (-1)$ مضاعف لـ 7)؛
 إذن: $1434 \equiv -1 [7]$.

ب) تعيّن الأعداد الطبيعية n ، الأصغر من 25، بحيث، $1434^{2n} + n \equiv 0 [7]$ ؛

$$\text{معناه: } 1434^{2n} + n \equiv 0 [7] \text{، } (-1)^{2n} + n \equiv 0 [7]$$

$$\text{ومنه: } 1 + n \equiv 0 [7] \text{ (لأنّ } 2n \text{ عدد زوجي)،}$$

$$\text{وعليه: } n \equiv -1 [7] \text{، ويكون: } n \equiv 6 [7] \text{؛ وبالتالى: } n = 7k + 6 \text{ (حيث } k \in \mathbb{N} \text{).}$$

$$\textcircled{3} \quad n < 25 \quad \text{أي: } 7k + 6 < 25$$

$$\text{ومنه: } 7k < 19$$

$$\text{وعليه: } k < \frac{19}{7} \quad \text{وبالتالي: } k \in \{0; 1; 2\} \quad \text{إذن: } n \in \{6; 13; 20\}$$

بكالوريا 2013 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

46 حل التمرين

لدينا: a و b عدنان صحيحان حيث، $a \equiv 2[7]$ و $b \equiv 6[7]$.
1- تعيين باقى القسمة الإقليدية للعدد $3a + b$ على 7:

$$\text{لدينا: } 3a + b \equiv 3 \times 2 + 6[7] \quad \text{ومنه: } 3a + b \equiv 12[7]$$

$$\text{وعليه: } 3a + b \equiv 5[7]$$

إذن: باقى القسمة الإقليدية للعدد $3a + b$ على 7 هو 5.

2- تعيين باقى القسمة الإقليدية للعدد $a^2 + 3b^2$ على 7:

$$\text{لدينا: } a^2 + 3b^2 \equiv (2)^2 + 3 \times (6)^2[7] \quad \text{ومنه: } a^2 + 3b^2 \equiv 4 + 3 \times 36[7]$$

$$\text{أي: } a^2 + 3b^2 \equiv 112[7]$$

$$\text{وبالتالي: } a^2 + 3b^2 \equiv 0[7]$$

إذن: باقى القسمة الإقليدية للعدد $a^2 + 3b^2$ على 7 هو 0.

3- أ) التحقق أن، $b \equiv -1[7]$ لدينا: $b \equiv 6[7]$ ومنه: $b \equiv (6 - 7)[7]$ إذن: $b \equiv -1[7]$.

ب) استنتاج باقى القسمة الإقليدية لكل من العددين b^{2013} و b^{1434} على 7:

$$\textcircled{3} \quad \text{لدينا: } b \equiv -1[7] \quad \text{ومنه: } b^{2013} \equiv (-1)^{2013}[7]$$

$$\text{وعليه: } b^{2013} \equiv -1[7] \quad (\text{لأن } 2013 \text{ عدد فردي})$$

$$\text{وبالتالي: } b^{2013} \equiv 6[7] \quad \text{إذن: باقى القسمة الإقليدية للعدد } b^{2013} \text{ على 7 هو } 6.$$

$$\textcircled{3} \quad \text{ولدينا: } b \equiv -1[7] \quad \text{ومنه: } b^{1434} \equiv (-1)^{1434}[7]$$

$$\text{وعليه: } b^{1434} \equiv 1[7] \quad (\text{لأن } 1434 \text{ عدد زوجي})$$

إذن: باقى القسمة الإقليدية للعدد b^{1434} على 7 هو 1.

4- تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث، $(a + b)^n + n \equiv 0[7]$:

$$\text{لدينا: } (a + b)^n + n \equiv 0[7] \quad \text{معناه: } (2 + 6)^n + n \equiv 0[7]$$

$$\text{ومنه: } 8^n + n \equiv 0[7]$$

$$\text{وعليه: } 1^n + n \equiv 0[7]$$

$$\text{ويكون: } 1 + n \equiv 0[7]$$

$$\text{ومنه: } n \equiv -1[7] \quad \text{وبالتالي: } n \equiv 6[7] \quad \text{إذن: } n = 7k + 6 \quad (\text{حيث } k \in \mathbb{N}).$$

بكالوريا 2014 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(05 نقاط)

حل التمرين 47

- (1) تعين باقى القسمة الإقليدية للعدد 28 على العدد 9:
لدينا: $28 = 9 \times (3) + 1$ ، أي: $28 \equiv 1[9]$ ؛ إذن: باقى القسمة الإقليدية للعدد 28 على العدد 9 هو $\boxed{1}$.
- (2) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعى k ، $10^k \equiv 1[9]$ ،
لدينا: $10 \equiv 1[9]$ ، ومنه: $10^k \equiv 1^k[9]$ (حيث $k \in \mathbb{N}$)؛ إذن: $10^k \equiv 1[9]$.
- (3) استنتاج أن، $4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv 1[9]$ ،
لدينا: حسب نتيجة السؤال (1)، $28 \equiv 1[9]$.

$$\textcircled{3} \text{ ولدينا: حسب نتيجة السؤال (2)، من أجل كل عدد طبيعى } k، 10^k \equiv 1[9] \text{ يعني: } \begin{cases} 10^2 \equiv 1[9] \\ 10^3 \equiv 1[9] \\ 10^4 \equiv 1[9] \end{cases}$$

$$\text{ومنه: } 4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv 4 \times 1 + 3 \times 1 + 2 \times 1 + 1[9]$$

$$\text{وعليه: } 4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv 4 + 3 + 2 + 1[9]$$

$$\text{أي: } 4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv 10[9]$$

$$\text{إذن: } 4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv 1[9]$$

$$(4) \text{ أ) التحقق أن، } 2^3 \equiv -1[9] \text{ لدينا: } 2^3 \equiv 8[9] \text{، ومنه: } 2^3 \equiv 8 - 9[9] \text{؛ إذن: } 2^3 \equiv -1[9].$$

$$\text{ب) تعين الأعداد الطبيعية } n \text{ بحيث، } 2^{6n} + n - 1 \equiv 0[9]$$

$$\text{لدينا: } 2^{6n} + n - 1 \equiv 0[9] \text{، تكافئ: } 2^{3 \times 2n} + n - 1 \equiv 0[9]$$

$$\text{ومنه: } (2^3)^{2n} + n - 1 \equiv 0[9]$$

$$\text{وعليه: } (-1)^{2n} + n - 1 \equiv 0[9]$$

$$\text{ويكون: } 1 + n - 1 \equiv 0[9] \text{ (لأن } 2n \text{ عدد زوجي)،}$$

$$\text{وبالتالي: } n \equiv 0[9] \text{؛ إذن: } n = 9k \text{ (حيث } k \in \mathbb{N} \text{).}$$

بكالوريا 2014 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 48

تعين الاقتراح الصحيح، مع التبرير:

(1) لدينا:

$$\begin{array}{r|l} 1435 & 5 \\ 287 & 7 \\ 41 & 41 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{ومنه: } 1435 = 5^1 \times 7^1 \times 41^1$$

$$\text{وبالتالي: عدد قواسم العدد 1435 هو } (1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (أ).

$$(2) \text{ إذا كان: } a \equiv -1[8] \text{ فإن: } a \equiv (-1+8)[8] \text{، أي: } a \equiv 7[8] \text{، وبالتالي: باقى قسمة } a \text{ على 8 هو } \boxed{7}؛$$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ب).

(3) لدينا: $2014 = 3 \times (671) + 1$ ، أي: $2014 \equiv 1[3]$. ولدينا: $1435 = 3 \times (478) + 1$ ، أي: $1435 \equiv 1[3]$.
نلاحظ أن: العددين 2014 و 1435 لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على 3 فهما متوافقان بترديد 3؛
إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ج).

$$(4) \text{ لدينا: } \begin{cases} x \equiv 2[5] \\ y \equiv 2[5] \end{cases} \text{ ومنه: } x^9 + y^9 \equiv 2^9 + 2^9[5]$$

$$\text{وعليه: } x^9 + y^9 \equiv 512 + 512[5]$$

$$\text{أي: } x^9 + y^9 \equiv 1024[5] \text{ وبالتالي: } x^9 + y^9 \equiv 4[5]$$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ج).

$$(5) \text{ لدينا: } 27 \equiv 21[6]$$

$$\text{الطريقة ①: } 27 \equiv 21[6] \text{ معناه: } 3 \times 9 \equiv 3 \times 7[3 \times 2] \text{ ومنه: } 9 \equiv 7[2]$$

$$\text{الطريقة ②: } 27 \equiv 21[6] \text{ معناه: } 27 = 6k + 21$$

$$\text{ومنه: } 27 = 3(2k + 7)$$

$$\text{وعليه: } \frac{27}{3} = \frac{3(2k + 7)}{3} \text{، أي: } 9 = 2k + 7 \text{ وبالتالي: } 9 \equiv 7[2]$$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ب).

بكالوريا 2015 // الموضوع الأول // الشعبة: آف؛ لغ أ.

(05 نقاط)

حل التمرين 49

تعيين الاقتراح الصحيح، مع التعليل:

(1) إذا كان a عدداً صحيحاً حيث: $a \equiv -1[5]$ ، فإن: ج) $a \equiv 99[5]$. لأن:

لدينا: $a \equiv -1[5]$ ، ومنه: $a \equiv 4[5]$ ، ولدينا: $99 \equiv 4[5]$ ، إذن: $a \equiv 99[5]$.

(2) باقي القسمة الإقليدية للعدد -99 على 7 هو: ب) 6، لأن:

$$\text{لدينا: } 99 \equiv 1[7] \text{ ومنه: } -99 \equiv -1[7]$$

$$\text{وعليه: } -99 \equiv 6[7] \text{؛ إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد } -99 \text{ على 7 هو 6.}$$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $10^n - 1$ يقبل القسمة على: أ) 3. لأن:

$$\text{لدينا: } 10 \equiv 1[3] \text{، ومنه: } 10^n \equiv 1^n[3] \text{ (حيث } n \in \mathbb{N} \text{)}$$

$$\text{أي: } 10^n \equiv 1[3] \text{، وبالتالي: } 10^n - 1 \equiv 0[3] \text{؛ إذن: } 10^n - 1 \text{ يقبل القسمة على 3.}$$

(4) مجموع كل ثلاثة أعداد طبيعية متعاقبة هو دوماً: ب) مضاعف للعدد 3. لأن:

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n \text{، لدينا: } n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1) = 3k \text{ (حيث } k = n + 1 \text{).}$$

بكالوريا 2015 // الموضوع الأول // الشعبة: آف؛ لغ أ.

(07 نقاط)

حل التمرين 50

المتتاليات العددية.

(5) أ) تعيين باقي القسمة الإقليدية على 5 لكل عدد من الأعداد 3، 3^2 ، 3^3 و 3^4 : لدينا:

$$\text{③ } 3 \equiv 3[5] \text{، إذن: باقي قسمة 3 على 5 هو 3.}$$

الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

$$\textcircled{3} \quad 3^2 \equiv 4[5] \text{، إذن: باقي قسمة } 3^2 \text{ على } 5 \text{ هو } 4[5].$$

$$\textcircled{3} \quad 3^3 \equiv 2[5] \text{، إذن: باقي قسمة } 3^3 \text{ على } 5 \text{ هو } 2[5].$$

$$\textcircled{3} \quad 3^4 \equiv 1[5] \text{، إذن: باقي قسمة } 3^4 \text{ على } 5 \text{ هو } 1[5].$$

(ب) استنتاج أنه لكل k من $\mathbb{N}$ ؛ $3^{4k} \equiv 1[5]$:

لدينا: $3^4 \equiv 1[5]$ ، ومنه: $(3^4)^k \equiv (1)^k[5]$ ؛ $(k \in \mathbb{N})$ ؛ وعليه: $3^{4k} \equiv 1[5]$.
(6) تعيين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3^n - 1$ قابلاً للقسمة على 5:

$$3^n - 1 \equiv 0[5] \text{ معناه: } 3^n - 1 \equiv 0[5]$$

ومنه: $3^n \equiv 1[5]$ ؛ وحسب نتيجة السؤال (5)؛ فإن: $n = 4k$ (حيث $k \in \mathbb{N}$).

بكالوريا 2015 // الموضوع الثاني // الشعبة: آف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 51

لدينا: a و b عدنان صحيحان يحققان، $a \equiv 13[7]$ و $b \equiv -6[7]$.

(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين a و b :

$$\textcircled{3} \quad \text{لدينا: } a \equiv 13[7] \text{، ومنه: } a \equiv 6[7] \text{؛ إذن: باقي قسمة } a \text{ على } 7 \text{ هو } 6[7].$$

$$\textcircled{3} \quad \text{ولدينا: } b \equiv -6[7] \text{، ومنه: } b \equiv (-6 + 7)[7] \text{، أي: } b \equiv 1[7] \text{؛ إذن: باقي قسمة } b \text{ على } 7 \text{ هو } 1[7].$$

(2) تبين أن العددين $a^3 + 1$ و $b^3 - 1$ يقبلان القسمة على 7:

$$\textcircled{3} \quad \text{لدينا: } a \equiv 6[7] \text{، ومنه: } a \equiv -1[7]$$

$$\text{وعليه: } a^3 \equiv (-1)^3[7]$$

$$\text{نجد: } a^3 \equiv -1[7] \text{ (لأن } 3 \text{ عدد فردي)،}$$

$$\text{وبالتالي: } a^3 + 1 \equiv 0[7] \text{؛ إذن: } a^3 + 1 \text{ يقبل القسمة على } 7.$$

$$\textcircled{3} \quad \text{لدينا: } b \equiv 1[7] \text{، ومنه: } b^3 \equiv (1)^3[7]$$

$$\text{نجد: } b^3 \equiv 1[7] \text{، وبالتالي: } b^3 - 1 \equiv 0[7] \text{؛ إذن: } b^3 - 1 \text{ يقبل القسمة على } 7.$$

(3) أ) التحقق أن، $a \equiv 2015[7]$ و $b \equiv 1436[7]$:

$$\textcircled{3} \quad \text{لدينا: } 2015 \equiv 6[7] \text{ (لأن باقي قسمة } 2015 \text{ على } 7 \text{ هو } 6) \text{، ولدينا من جهة أخرى: } a \equiv 6[7] \text{؛}$$

$$\text{إذن: } a \equiv 2015[7].$$

$$\textcircled{3} \quad \text{لدينا: } 1436 \equiv 1[7] \text{ (لأن باقي قسمة } 1436 \text{ على } 7 \text{ هو } 1) \text{، ولدينا من جهة أخرى: } b \equiv 1[7] \text{؛}$$

$$\text{إذن: } b \equiv 1436[7].$$

(ب) تعيين باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $2015^3 + 1436^3$:

$$\text{لدينا: } 2015^3 + 1436^3 \equiv a^3 + b^3[7] \text{، ومنه: } 2015^3 + 1436^3 \equiv -1 + 1[7]$$

$$\text{أي: } 2015^3 + 1436^3 \equiv 0[7]$$

$$\text{إذن: باقي قسمة العدد } 2015^3 + 1436^3 \text{ على } 7 \text{ هو } 0[7].$$

(ج) استنتاج أن، $2015^3 + 1436^3 - 1962^3 + 1 \equiv 0[7]$:

$$\text{لدينا: } 2015^3 + 1436^3 - 1962^3 + 1 \equiv 0 - 2^3 + 1[7]$$

$$\text{ومنه: } 2015^3 + 1436^3 - 1962^3 + 1 \equiv -8 + 1[7]$$

أي: $2015^3 + 1436^3 - 1962^3 + 1 \equiv -7[7]$ ؛ إذن: $2015^3 + 1436^3 - 1962^3 + 1 \equiv 0[7]$.

بكالوريا 2016 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(05 نقاط)

52

حل التمرين

(1) تعيين باقى القسمة الإقليدية لكل من الأعداد $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ و 2^4 على العدد 5: لدينا:

❖ $2^0 \equiv 1[5]$ ، إذن: باقى قسمة 2^0 على 5 هو 1.

❖ $2^1 \equiv 2[5]$ ، إذن: باقى قسمة 2^1 على 5 هو 2.

❖ $2^2 \equiv 4[5]$ ، إذن: باقى قسمة 2^2 على 5 هو 4.

❖ $2^3 \equiv 3[5]$ ، إذن: باقى قسمة 2^3 على 5 هو 3.

❖ $2^4 \equiv 1[5]$ ، إذن: باقى قسمة 2^4 على 5 هو 1.

(2) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعى n يكون، $2^{4n} \equiv 1[5]$:

لدينا: $2^4 \equiv 1[5]$ ، ومنه: $(2^4)^n \equiv (1)^n[5]$ (حيث $n \in \mathbb{N}$)؛ إذن: $2^{4n} \equiv 1[5]$.

ب) استنتاج باقى القسمة الإقليدية للعدد 2^{2016} على العدد 5: (نقسم الأس 2016 على الدور 4)

لدينا: $2^{2016} \equiv 2^{4 \times (504)}[5]$ (حسب نتيجة السؤال 2)؛ نجد: $2^{2016} \equiv 1[5]$ ؛ إذن: باقى قسمة 2^{2016} على 5 هو 1.

(3) تعيين قيم العدد الطبيعى n بحيث يكون، $2^{2016} + 2 + n \equiv 0[5]$:

$2^{2016} + 2 + n \equiv 0[5]$ تكافئ: $1 + 2 + n \equiv 0[5]$

ومنه: $n \equiv -3[5]$ ، وعليه: $n \equiv 2[5]$ ؛ إذن: $n = 5k + 2$ (حيث $k \in \mathbb{N}$).

بكالوريا 2016 // الموضوع الثانى // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

53

حل التمرين

(1) أ) تعيين باقى القسمة الإقليدية للعدد 4^3 على 9:

لدينا: $4^3 \equiv 1[9]$ (لأن $4^3 = 64$)، إذن: باقى قسمة 4^3 على 9 هو 1.

ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعى k ، $4^{3k} \equiv 1[9]$:

لدينا: $4^3 \equiv 1[9]$ ، ومنه: $(4^3)^k \equiv (1)^k[9]$ (حيث $k \in \mathbb{N}$)؛ إذن: $4^{3k} \equiv 1[9]$.

ج) دراسة حسب قيم العدد الطبيعى n بواقى القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 9: لدينا:

❖ $4^0 \equiv 1[9]$

❖ $4^1 \equiv 4[9]$

❖ $4^2 \equiv 7[9]$

❖ $4^3 \equiv 1[9]$ و

ومنه: بواقى قسمة 4^n على 9 تُشكل متتالية دورية، دورها 3؛ وبالتالي:

$n =$	$3k$	$3k + 2$	$3k + 2$	$k \in \mathbb{N}$
$4^n \equiv$	1	4	7	[9]

د) تعيين باقى القسمة الإقليدية للعدد 2015^{2016} على 9:

❖ الطريقة 1: لدينا: $2015 \equiv 8[9]$ ، ومنه: $2015 \equiv -1[9]$

وعليه: $2015^{2016} \equiv (-1)^{2016}[9]$

أي: $2015^{2016} \equiv 1[9]$ (لأن 2016 عدد زوجي)؛

الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

إذن: باقي قسمة 2015^{2016} على 9 هو [1].

الطريقة 2:

لدينا: $2015 \equiv 8[9]$ ، أي: $2015 \equiv 2^3[9]$

ومنه: $2015^{2016} \equiv (2^3)^{2016}[9]$

وعليه: $2015^{2016} \equiv (2^3)^{2 \times 1008}[9]$

ويكون: $2015^{2016} \equiv (2^2)^{3 \times 1008}[9]$

أي: $[9] 2015^{2016} \equiv 4^{3 \times (1008)}$ وحسب نتيجة السؤال (ب)، فإن: $[9] 2015^{2016} \equiv 1$

إذن: باقي قسمة 2015^{2016} على 9 هو [1].

(2) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $8^{2n} \equiv 1[9]$

لدينا: $8 \equiv -1[9]$ ، ومنه: $8^{2n} \equiv (-1)^{2n}[9]$ ؛ إذن: $[9] 8^{2n} \equiv 1$ (لأن $2n$ عدد زوجي).

ب) تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $8^{2n} + 4^n + 1$ مضاعفاً للعدد 9:

العدد $8^{2n} + 4^n + 1$ مضاعفاً للعدد 9، معناه: $8^{2n} + 4^n + 1 \equiv 0[9]$

ومنه: $1 + 4^n + 1 \equiv 0[9]$

وعليه: $4^n \equiv -2[9]$

ويكون: $[9] 4^n \equiv 7$ وحسب نتيجة السؤال (ج)؛

فإن: $[n = 3k + 2]$ (حيث $k \in \mathbb{N}$).

بكالوريا 2017-1د // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 54

لدينا: $a = 2016$ ، $b = 1437$ و $c = 1954$.

(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من a ، b و c على 5:

لدينا: $a = 5 \times (403) + 1$ ، ومنه: $[a \equiv 1[5]]$ ؛ إذن: باقي قسمة a على 5 هو [1].

لدينا: $b = 5 \times (287) + 2$ ، ومنه: $[b \equiv 2[5]]$ ؛ إذن: باقي قسمة b على 5 هو [2].

لدينا: $c = 5 \times (390) + 4$ ، ومنه: $[c \equiv 4[5]]$ ؛ إذن: باقي قسمة c على 5 هو [4].

(2) استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد، $a + b + c$ ، $a \times b \times c$ و b^4 على 5:

لدينا: $[a + b + c \equiv 1 + 2 + 4[5]]$ ، ومنه: $[a + b + c \equiv 7[5]]$ وبالتالي: $[a + b + c \equiv 2[5]]$ ؛

إذن: باقي قسمة $a + b + c$ على 5 هو [2].

لدينا: $[a \times b \times c \equiv 1 \times 2 \times 4[5]]$ ، ومنه: $[a \times b \times c \equiv 8[5]]$ وبالتالي: $[a \times b \times c \equiv 3[5]]$ ؛

إذن: باقي قسمة $a \times b \times c$ على 5 هو [3].

لدينا: $[b^4 \equiv 2^4[5]]$ ، ومنه: $[b^4 \equiv 16[5]]$ وبالتالي: $[b^4 \equiv 1[5]]$ ؛ إذن: باقي قسمة b^4 على 5 هو [1].

(3) أ) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $b^{4n} \equiv 1[5]$

لدينا: $b^4 \equiv 1[5]$ ، ومنه: $(b^4)^n \equiv (1)^n[5]$ (حيث $n \in \mathbb{N}$)؛ إذن: $[b^{4n} \equiv 1[5]]$.

(ب) استنتاج أن العدد $b^{2016} - 1$ يقبل القسمة على 5: (نقسم الأس 2016 على الدور 4)

$$\text{لدينا: } b^{2016} - 1 \equiv b^{4 \times (504)} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{5} \text{، ومنه: } b^{2016} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

أي: $b^{2016} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$ ؛ إذن: $b^{2016} - 1$ يقبل القسمة على 5.

(4) أ) التحقق أن، $c \equiv -1 \pmod{5}$: لدينا: $c \equiv 4 \pmod{5}$ ، ومنه: $c \equiv (4 - 5) \pmod{5}$ ؛ إذن: $c \equiv -1 \pmod{5}$.

ب) تبيان أن، $c^{1438} + c^{2017} \equiv 0 \pmod{5}$:

حسب نتيجة السؤال السابق (4) أ) لدينا: $c \equiv -1 \pmod{5}$ ،

$$\text{ومنه: } c^{1438} + c^{2017} \equiv (-1)^{1438} + (-1)^{2017} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

وعليه: $c^{1438} + c^{2017} \equiv 1 + (-1) \equiv 0 \pmod{5}$ (لأن 1438 عدد زوجي و 2017 عدد فردي)؛

إذن: $c^{1438} + c^{2017} \equiv 0 \pmod{5}$ (وهو المطلوب).

بكالوريا 2017-1د // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 55

a, b و c ثلاثة أعداد طبيعية حيث $a \equiv -5 \pmod{7}$ ، $b = 1966$ و $c = 2017$.

(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد a, b و c على 7:

❶ لدينا: $a \equiv -5 \pmod{7}$ ، ومنه: $a \equiv -5 + 7 \pmod{7}$ ، أي: $a \equiv 2 \pmod{7}$ ؛ إذن: باقي قسمة a على 7 هو 2.

❷ لدينا: $b = 7 \times (280) + 6$ ، أي: $b \equiv 6 \pmod{7}$ ؛ إذن: باقي قسمة b على 7 هو 6.

❸ لدينا: $c = 7 \times (288) + 1$ ، أي: $c \equiv 1 \pmod{7}$ ؛ إذن: باقي قسمة c على 7 هو 1.

(2) التحقق أن، $b \equiv -1 \pmod{7}$: لدينا: $b \equiv 6 \pmod{7}$ ، ومنه: $b \equiv 6 - 7 \pmod{7}$ ؛ إذن: $b \equiv -1 \pmod{7}$.

(3) اثبات أن العدد، $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2$ يقبل القسمة على 7:

$$\text{لدينا: } b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2 \equiv (-1)^{2017} + 3 \times (1)^{1438} - 2 \equiv -1 + 3 - 2 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\text{ومنه: } b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2 \equiv -1 + 3 \times (1) - 2 \equiv -1 + 3 - 2 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\text{وعليه: } b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2 \equiv -3 + 3 \pmod{7}$$

وبالتالي: $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2 \equiv 0 \pmod{7}$ ؛ إذن: $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2$ يقبل القسمة على 7.

(4) التحقق أن من أجل كل عدد طبيعي k ، $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$:

لدينا: $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ (لأن $2^3 = 8$)، ومنه: $(2^3)^k \equiv (1)^k \pmod{7}$ (حيث $k \in \mathbb{N}$)؛ إذن: $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$.

« استنتاج أن، $2^{3k+1} \equiv 2 \pmod{7}$ و $2^{3k+2} \equiv 4 \pmod{7}$ (لاحظ أن $2^{3k+1} = 2^{3k} \times 2^1$ و $2^{3k+2} = 2^{3k} \times 2^2$) »

❶ لدينا: $2^{3k+1} \equiv 2^{3k} \times 2^1 \pmod{7}$ ، ومنه: $2^{3k+1} \equiv 1 \times 2 \pmod{7}$ ؛ إذن: $2^{3k+1} \equiv 2 \pmod{7}$.

❷ لدينا: $2^{3k+2} \equiv 2^{3k} \times 2^2 \pmod{7}$ ، ومنه: $2^{3k+2} \equiv 1 \times 4 \pmod{7}$ ؛ إذن: $2^{3k+2} \equiv 4 \pmod{7}$.

(5) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $2^n + 3$ قابلاً للقسمة على 7:

$$2^n + 3 \equiv 0 \pmod{7} \text{ معناه: } 2^n \equiv -3 \pmod{7}$$

$$\text{ومنه: } 2^n \equiv -3 \pmod{7}$$

وعليه: $2^n \equiv 4 \pmod{7}$ حسب نتيجة السؤال السابق (4)؛

نستنتج أن: $n = 3k + 1$ (حيث $k \in \mathbb{N}$).

بكالوريا 2017-2017 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 56

(1) أ) تعيين باقى القسمة الإقليدية لكل من الأعداد 4، 4² و 4³ على 9: لدينا:

$$\textcircled{1} \quad 4^1 \equiv 4[9] \text{، إذن: باقى قسمة } 4 \text{ على } 9 \text{ هو } 4.$$

$$\textcircled{2} \quad 4^2 \equiv 7[9] \text{، إذن: باقى قسمة } 4^2 \text{ على } 9 \text{ هو } 7.$$

$$\textcircled{3} \quad 4^3 \equiv 1[9] \text{، إذن: باقى قسمة } 4^3 \text{ على } 9 \text{ هو } 1.$$

(ب) تبيان أن من أجل كل عدد طبيعى n ، $4^{3n} \equiv 1[9]$:

$$\text{لدينا: } 4^3 \equiv 1[9] \text{، ومنه: } (4^3)^n \equiv (1)^n[9] \text{ (حيث } n \in \mathbb{N} \text{)؛ إذن: } 4^{3n} \equiv 1[9].$$

(ج) استنتاج أن من أجل كل عدد طبيعى n ، $4^{3n+1} \equiv 4[9]$: (لاحظ أن)

$$\text{لدينا: } 4^{3n+1} \equiv 4^{3n} \times 4^1[9] \text{، ومنه: } 4^{3n+1} \equiv 1 \times 4[7] \text{؛ إذن: } 4^{3n+1} \equiv 4[9].$$

(2) التحقق أن، $2020^{1438} \equiv 4[9]$: لدينا: $2020^{1438} \equiv 4^{3 \times (479) + 1}[9]$ ، ومنه: $2020^{1438} \equiv 4[9]$.(3) تبيان أن العدد $2020^{1438} - 2017^2 + 1995$ يقبل القسمة على 9:

$$\text{لدينا: } 2020^{1438} - 2017^2 + 1995 \equiv 4 - 1^2 + 6[9] \text{ (لأن } 2020 \equiv 4[9] \text{ و } 2017 \equiv 1[9] \text{ و } 1995 \equiv 6[9] \text{)؛ ومنه:}$$

$$2020^{1438} - 2017^2 + 1995 \equiv 4 - 1 + 6[9]$$

$$\text{وعليه: } 2020^{1438} - 2017^2 + 1995 \equiv 9[9]$$

وبالتالى: $2020^{1438} - 2017^2 + 1995 \equiv 0[9]$ ؛ إذن: العدد $2020^{1438} - 2017^2 + 1995$ يقبل القسمة على 9.

بكالوريا 2017-2017 // الموضوع الثانى // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 57

لدينا: a و b عدنان صحيحان حيث، $a \equiv 14[13]$ و $b \equiv -1[13]$.(1) أ) تبيان أن باقى القسمة الإقليدية للعددين a و b على 13 هو 1 و 12 على الترتيب:

$$\textcircled{1} \quad \text{لدينا: } a \equiv 14[13] \text{، ومنه: } a \equiv 14 - 13[13] \text{، أي: } a \equiv 1[13] \text{؛ إذن: باقى قسمة } a \text{ على } 13 \text{ هو } 1.$$

$$\textcircled{2} \quad \text{لدينا: } b \equiv -1[13] \text{، ومنه: } b \equiv -1 + 13[13] \text{، أي: } b \equiv 12[13] \text{؛ إذن: باقى قسمة } b \text{ على } 13 \text{ هو } 12.$$

(ب) استنتاج باقى القسمة الإقليدية لكل من $a + b$ ، $a - b$ و $2a + b^2$ على 13:

$$\textcircled{1} \quad \text{لدينا: } a + b \equiv 1 + (-1)[13] \text{، أي: } a + b \equiv 0[13] \text{؛ إذن: باقى قسمة } a + b \text{ على } 13 \text{ هو } 0.$$

$$\textcircled{2} \quad \text{لدينا: } a - b \equiv 1 - (-1)[13] \text{، أي: } a - b \equiv 2[13] \text{؛ إذن: باقى قسمة } a - b \text{ على } 13 \text{ هو } 2.$$

$$\textcircled{3} \quad \text{لدينا: } 2a + b^2 \equiv 2 \times (1) + (-1)^2[13] \text{، ومنه: } 2a + b^2 \equiv (2 + 1)[13] \text{، أي: } 2a + b^2 \equiv 3[13] \text{؛ إذن: باقى قسمة } 2a + b^2 \text{ على } 13 \text{ هو } 3.$$

(2) تبيان أن العدد $a^{1438} + b^{2017}$ يقبل القسمة على 13:

$$\text{لدينا: } a^{1438} + b^{2017} \equiv (1)^{1438} + (-1)^{2017}[13] \text{، ومنه: } a^{1438} + b^{2017} \equiv 1 + (-1)[13]$$

$$\text{أي: } a^{1438} + b^{2017} \equiv 0[13]$$

إذن: العدد $a^{1438} + b^{2017}$ يقبل القسمة على 13.(3) تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث، $b^{2017} + n + 1438 \equiv 0[13]$:

$$b^{2017} + n + 1438 \equiv 0[13] \text{ تُكافئ: } -1 + n + 8 \equiv 0[13] \text{ (لأن } b^{2017} \equiv -1[13] \text{ و } 1438 \equiv 8[13] \text{)؛ ومنه:}$$

$$n \equiv -7[13]$$

$$\text{وعليه: } n \equiv 6[13] \text{؛ إذن: } n = 13k + 6 \text{ (حيث } k \in \mathbb{N} \text{).}$$

بكالوريا 2018 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 58

(1) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5: لدينا:

$$2^0 \equiv 1[5] \quad \text{❶}$$

$$2^1 \equiv 2[5] \quad \text{❷}$$

$$2^2 \equiv 4[5] \quad \text{❸}$$

$$2^3 \equiv 3[5] \quad \text{❹}$$

$$2^4 \equiv 1[5] \quad \text{❺}$$

ومنه: بواقي قسمة 2^n على 5 تُشكل متتالية دورية، دورها 4؛ وبالتالي:

$n =$	$4k$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$	$k \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	3	[5]

(2) تعيين العدد الطبيعي a بحيث يكون، $2018 = 4a + 2$:

$$2018 = 4a + 2 \quad \text{يكافئ: } 4a = 2018 - 2$$

$$\text{أي: } 4a = 2016 \quad \text{وبالتالي: } a = \frac{2016}{4} = 504 \quad \text{؛ إذن: } 2018 = 4 \times (504) + 2.$$

(3) تبين أن العدد، $2^{2018} + 2017^8 - 5$ يقبل القسمة على 5:

$$\text{لدينا: } 2^{2018} + 2017^8 - 5 \equiv 2^{4 \times (504) + 2} + 2^{4 \times 2} - 5[5]$$

$$\text{ومنه: } 2^{2018} + 2017^8 - 5 \equiv 2^{4 \times 504} \times 2^2 + 2^{4 \times 2} - 5[5]$$

$$\text{وعليه: } 2^{2018} + 2017^8 - 5 \equiv 1 \times 4 + 1 - 5[5]$$

$$\text{ويكون: } 2^{2018} + 2017^8 - 5 \equiv 4 + 1 - 5[5]$$

$$\text{وبالتالي: } 2^{2018} + 2017^8 - 5 \equiv 0[5] \quad \text{؛ إذن: } 2^{2018} + 2017^8 - 5 \text{ يقبل القسمة على 5.}$$

(4) أ) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $12^n \equiv 2^n[5]$ و $(-3)^n \equiv 2^n[5]$:

$$\text{❶ لدينا: } 12 \equiv 2[5] \quad \text{ومنه: } 12^n \equiv 2^n[5] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$\text{❷ لدينا: } -3 \equiv 2[5] \quad \text{ومنه: } (-3)^n \equiv 2^n[5] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث، $12^n + (-3)^n - 4 \equiv 0[5]$:

$$\text{لدينا: } 12^n + (-3)^n - 4 \equiv 0[5] \quad \text{تكافئ: } 2^n + 2^n - 4 \equiv 0[5] \quad \text{أي: } 2 \times 2^n - 4 \equiv 0[5].$$

$$\text{الطريقة ❶: ومنه: } 2^{n+1} \equiv 4[5] \quad \text{وبالتالي: } n+1 = 4k+2 \quad \text{؛ إذن: } n = 4k+1 \quad (\text{حيث } k \in \mathbb{N}).$$

$$\text{الطريقة ❷: وعليه: } 2 \times 2^n \equiv 2 \times 2[5] \quad \text{أي: } 2^n \equiv 2[5] \quad \text{؛ إذن: } n = 4k+1 \quad (\text{حيث } k \in \mathbb{N}).$$

بكالوريا 2018 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 59

لدينا: a و b عدنان طبيعيان غير معدومين حيث $a = 4b + 6$.(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4: (بمأن $6 > 4$ فهو ليس الباقي).

$$\text{❶ الطريقة ❶: لدينا: } a = 4b + 6 = 4b + 4 \times (1) + 2 = 4(b+1) + 2 \quad \text{؛ ومنه: } a \equiv 2[4]$$

$$\text{إذن: باقي قسمة } a \text{ على 4 هو } 2.$$

$$\text{❷ الطريقة ❷: لدينا: } a = 4b + 6 \quad \text{ومنه: } a \equiv 6[4] \quad \text{وبالتالي: } a \equiv 2[4] \quad \text{؛ إذن: باقي قسمة } a \text{ على 4 هو } 2.$$

(2) تبين أن a و b متوافقان بترديد 3:

$$\text{لدينا: } a - b = (4b + 6) - b = 3b + 6 = 3 \times (b + 2) \quad \text{الفرق } a - b \text{ مضاعف لـ } 3 \text{، إذن: } a \equiv b[3].$$

(3) بوضع $b = 489$.(أ) التحقق أن $a \equiv -1[13]$:الطريقة ①: لدينا $b = 489$ ، ومنه $a = 4b + 6 = 4(489) + 6 = 1962$.ولدينا: $a = 1962 = 13 \times (150) + 12$ أي: $a \equiv 12[13]$ ، وعليه: $a \equiv 12 - 13[13]$ ؛ إذن: $a \equiv -1[13]$.

الطريقة ②:

لدينا: $a - (-1) = a + 1 = 1963 = 13 \times (151)$ (الفرق $a - (-1)$ مضاعف لـ 13)، إذن: $a \equiv -1[13]$.(ب) استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^{2018} + 40^{2968}$ على 13:لدينا: $a^{2018} + 40^{2968} \equiv (-1)^{2018} + (1)^{2968}[13]$ ومنه: $a^{2018} + 40^{2968} \equiv 1 + 1[13]$ (لأن 2018 عدد زوجي)،وبالتالي: $a^{2018} + 40^{2968} \equiv 2[13]$ ؛ إذن: باقي قسمة $a^{2018} + 40^{2968}$ على 13 هو [2].(ج) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $a^{2n} + n + 3$ قابلاً للقسمة على 13:لدينا: $a^{2n} + n + 3$ قابلاً للقسمة على 13، معناه: $a^{2n} + n + 3 \equiv 0[13]$ ومنه: $(-1)^{2n} + n + 3 \equiv 0[13]$ وعليه: $1 + n + 3 \equiv 0[13]$ (لأن $2n$ عدد زوجي)،أي: $n + 4 \equiv 0[13]$ ويكون: $n \equiv -4[13]$ وبالتالي: $n \equiv 9[13]$ ؛ إذن: $n = 13k + 9$ (حيث $k \in \mathbb{N}$).

بكالوريا 2019 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 60

لدينا: $a = 2019$ و $b = 2969$.(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 7:③ لدينا: $a = 7 \times (288) + 3$ ، أي: $a \equiv 3[7]$ ؛ إذن: باقي قسمة a على 7 هو [3].④ لدينا: $b = 7 \times (424) + 1$ ، أي: $b \equiv 1[7]$ ؛ إذن: باقي قسمة b على 7 هو [1].(ب) استنتاج أن العددين a و $3b$ متوافقان بترديد 7:لدينا: $3b \equiv 3 \times 1[7]$ ، ومنه: $3b \equiv 3[7]$ ، وبما أن: $a \equiv 3[7]$ ؛ فإن: $a \equiv 3b[7]$.(2) تبين أن، $9a + b \equiv 0[7]$:لدينا: $9a + b \equiv 9 \times (3) + 1[7]$ ، ومنه: $9a + b \equiv 28[7]$ ، وعليه: $9a + b \equiv 0[7]$ (لأن $28 \equiv 0[7]$).(3) التحقق أن، $2a \equiv -1[7]$:لدينا: $2a \equiv 2 \times 3[7]$ ، ومنه: $2a \equiv 6[7]$ ، وعليه: $2a \equiv 6 - 7[7]$ ؛ إذن: $2a \equiv -1[7]$.

الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

« استنتاج باقى القسمة الإقليدية للعدد $2^{2969} \times a^{2969}$ على 7: (لاحظ أن $(2a)^{2969} = 2^{2969} \times a^{2969}$)

حسب نتيجة السؤال السابق، لدينا: $2a \equiv -1[7]$

ومنه: $(2a)^{2969} \equiv (-1)^{2969}[7]$

وعليه: $2^{2969} \times a^{2969} \equiv -1[7]$ (لأن 2969 عدد فردي)،

وبالتالى: $2^{2969} \times a^{2969} \equiv 6[7]$ ؛

إذن: باقى قسمة $2^{2969} \times a^{2969}$ على 7 هو 6.

(4) تعيين قيم العدد الطبيعي n حيث، $b^n + an + 2 \equiv 0[7]$

لدينا: $b^n + an + 2 \equiv 0[7]$ معناه: $(1)^n + an + 2 \equiv 0[7]$

ومنه: $1 + an + 2 \equiv 0[7]$

وعليه: $an + 3 \equiv 0[7]$

ويكون: $an \equiv -3[7]$

وبمأن: $a \equiv 3[7]$ فإن: $n \equiv -1[7]$

وبالتالى: $n \equiv 6[7]$ ؛ إذن: $n = 7k + 6$ (حيث $k \in \mathbb{N}$).

بكالوريا 2019 // الموضوع الثانى // الشعبة: آوف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 61

لدينا: $a = 2019$ و $b = 1441$

(1) التحقق أن، $a \equiv 13[17]$

لدينا: $a = 17 \times (118) + 13$ ، ومنه: باقى قسمة a على 17 هو 13؛ إذن: $a \equiv 13[17]$.

(2) تبين أن، a و b متوافقان بترديد 17:

لدينا: $a - b = 2019 - 1441 = 578 = 17 \times (34)$ (الفرق $a - b$ مضاعف لـ 17)، إذن: $a \equiv b[17]$.

« استنتاج باقى القسمة الإقليدية للعدد b على 17:

بمأن: $\begin{cases} a \equiv 13[17] \\ a \equiv b[17] \end{cases}$ ، فإن: $b \equiv 13[17]$ ؛ إذن: باقى قسمة b على 17 هو 13.

(3) تبين أن $a \times b \equiv -1[17]$

لدينا: $a \times b \equiv 13 \times 13[17]$ ، ومنه: $a \times b \equiv 169[17]$

وعليه: $a \times b \equiv 16[17]$

وبالتالى: $a \times b \equiv 16 - 17[17]$ ؛ إذن: $a \times b \equiv -1[17]$.

الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

«استنتاج أن $[17] 0 \equiv 3a^2 \times b^2 + 14$ (لاحظ أن $(a \times b)^2 = a^2 \times b^2$)

حسب نتيجة السؤال السابق، لدينا: $[17] -1 \equiv a \times b$ ومنه: $[17] 14 + 3(-1)^2 \equiv 3(a \times b)^2 + 14$

وعليه: $[17] 14 + 3 \times 1 \equiv 3a^2 \times b^2 + 14$

ويكون: $[17] 3 + 14 \equiv 3a^2 \times b^2 + 14$

وبالتالى: $[17] 17 \equiv 3a^2 \times b^2 + 14$

إذن: $[17] 0 \equiv 3a^2 \times b^2 + 14$.

(4) دراسة تبعاً لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 13^n على 17: لدينا:

$$\text{④ } 13^0 \equiv 1 [17]$$

$$\text{④ } 13^1 \equiv 13 [17]$$

$$\text{④ } 13^2 \equiv 16 [17]$$

$$\text{④ } 13^3 \equiv 4 [17]$$

$$\text{④ } 13^4 \equiv 1 [17]$$

ومنه: بواقي قسمة 13^n على 17 تشكل متتالية دورية، دورها 4؛ وبالتالى:

$n =$	$4k$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$	$k \in \mathbb{N}$
$13^n \equiv$	1	13	16	4	[17]

(5) تبين أن، $[17] 0 \equiv 2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13$

لدينا: $[17] 13 - 13 \equiv a^{1954} + (a \times b)^{2n} + b^{2969} - 13$

ومنه: $[17] 13 - 13 \equiv 2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13 \equiv 13^{1954} + (-1)^{2n} + 13^{2969} - 13$

وعليه: $[17] 13 - 13 \equiv 2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13 \equiv 13^{4 \times (488) + 2} + (-1)^{2n} + 13^{4 \times (742) + 1} - 13$

وبالتالى: $[17] 13 - 13 \equiv 2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13 \equiv 16 + 1 + 13 - 13$

أي: $[17] 17 \equiv 2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13$ ؛ إذن: $[17] 0 \equiv 2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13$.

(6) تعيين قيم العدد الطبيعي n التى تحقق، $[17] 0 \equiv n + 1954^{1962} + 16$

$$[17] 0 \equiv n + 1954^{1962} + 16 \quad \text{معناه: } [17] 0 \equiv n + 16^{1962} + 16$$

$$\text{ومنه: } [17] 0 \equiv n + (-1)^{1962} + 16$$

$$\text{وعليه: } [17] 0 \equiv n + 1 + 16$$

وبالتالى: $[17] 0 \equiv n$ ؛ إذن: $[17] n = 17k$ (حيث $k \in \mathbb{N}$).

بكالوريا 2020 // الموضوع الأول // الشعبة: آف، لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 62

لدينا: a, b و c حيث $a = 2020, b = 2970$ و $c = 1441$.

(1) تعيين باقى القسمة الإقليدية لكل من الأعداد a, b و c على 9:

$$\text{④ } \text{لدينا: } a = 9 \times (224) + 4 \text{، أي: } [9] 4 \equiv a \text{؛ إذن: باقى قسمة } a \text{ على 9 هو } [4].$$

$$\text{④ } \text{لدينا: } b = 9 \times (330) \text{، أي: } [9] 0 \equiv b \text{؛ إذن: باقى قسمة } b \text{ على 9 هو } [0].$$

$$\text{④ } \text{لدينا: } c = 9 \times (160) + 1 \text{، أي: } [9] 1 \equiv c \text{؛ إذن: باقى قسمة } c \text{ على 9 هو } [1].$$

الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

(2) التحقق أن العددين b و $(a + 5)$ متوافقان بترديد 9:لدينا: $a + 5 \equiv 4 + 5[9]$ ومنه: $a + 5 \equiv 9[9]$ وعليه: $a + 5 \equiv 0[9]$ ولدينا من جهة أخرى: $b \equiv 0[9]$ ؛ إذن: $a + 5 \equiv b[9]$.(3) التحقق أن $2a \equiv -1[9]$ ثم استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $(2a)^{31}$ على 9:لدينا: $2a \equiv 2 \times 4[9]$ ومنه: $2a \equiv 8[9]$ وعليه: $2a \equiv 8 - 9[9]$ ؛ إذن: $2a \equiv -1[9]$.لدينا: $2a^{31} \equiv (-1)^{31}[9]$ ومنه: $2a^{31} \equiv -1[9]$ (لأن 31 عدد فردي)،وبالتالي: $(2a)^{31} \equiv 8[9]$ ؛ إذن: باقي قسمة $(2a)^{31}$ على 9 هو 8.(4) تبين أن العدد $(3a - 2b - 12c^2)$ يقبل القسمة على 9:لدينا: $3a - 2b - 12c^2 \equiv 3 \times (4) - 2 \times (0) - 12 \times (1)^2[9]$ ومنه: $3a - 2b - 12c^2 \equiv 12 - 0 - 12[9]$ وبالتالي: $3a - 2b - 12c^2 \equiv 0[9]$ ؛ إذن: العدد $(3a - 2b - 12c^2)$ يقبل القسمة على 9.

بكالوريا 2020 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

63

حل التمرين

لدينا: a و b عدنان صحيحان حيث $a \equiv 2[7]$ ، $b = 2020$.(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7:لدينا: $b = 7 \times (288) + 4$ ، أي: $b \equiv 4[7]$ ؛ إذن: باقي قسمة b على 7 هو 4.(2) تبين أن $a^2 + b^2 \equiv -1[7]$ ، ثم استنتاج أن العدد $(a^2 + b^2)^{1962} - 8$ يقبل القسمة على 7:لدينا: $a^2 + b^2 \equiv (2)^2 + (4)^2[7]$ ومنه: $a^2 + b^2 \equiv 4 + 16[7]$ أي: $a^2 + b^2 \equiv 20[7]$ وعليه: $a^2 + b^2 \equiv 6[7]$ وبالتالي: $a^2 + b^2 \equiv 6 - 7[7]$ ؛ إذن: $a^2 + b^2 \equiv -1[7]$.لدينا: $(a^2 + b^2)^{1962} - 8 \equiv (-1)^{1962} - 8[7]$ ومنه: $(a^2 + b^2)^{1962} - 8 \equiv 1 - 8[7]$ (لأن 1962 عدد زوجي)،وعليه: $(a^2 + b^2)^{1962} - 8 \equiv -7[7]$ وبالتالي: $(a^2 + b^2)^{1962} - 8 \equiv 0[7]$ ؛ إذن: العدد $(a^2 + b^2)^{1962} - 8$ يقبل القسمة على 7.(3) أ. تعيين بواقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد 4، 4^2 و 4^3 على 7: لدينا:لدينا: $4^1 \equiv 4[7]$ ؛ إذن: باقي قسمة 4 على 7 هو 4.لدينا: $4^2 \equiv 2[7]$ ؛ إذن: باقي قسمة 4^2 على 7 هو 2.لدينا: $4^3 \equiv 1[7]$ ؛ إذن: باقي قسمة 4^3 على 7 هو 1.ب. تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4^{3n} \equiv 1[7]$ ثم استنتاج أن $4^{3n+1} \equiv 4[7]$:لدينا: $4^3 \equiv 1[7]$ (نتيجة السؤال 3 أ.)، ومنه: $(4^3)^n \equiv (1)^n[7]$ (حيث $n \in \mathbb{N}$)؛ إذن: $4^{3n} \equiv 1[7]$.لدينا: $4^{3n+1} \equiv 4^{3n} \times 4^1[7]$ ومنه: $4^{3n+1} \equiv 1 \times 4[7]$ ؛ إذن: $4^{3n+1} \equiv 4[7]$.

الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

ج. تبين أن $b^{21} \equiv 1[7]$ لدينا: $b^{21} \equiv 4^{3 \times 7}[7]$ ، إذن: $b^{21} \equiv 1[7]$.
(4) تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $4^n + a + b^{21} \equiv 0[7]$

لدينا: $4^n + a + b^{21} \equiv 0[7]$ معناه: $4^n + 2 + 1 \equiv 0[7]$

ومنه: $4^n \equiv -3[7]$ ، وعليه: $4^n \equiv 4[7]$ ؛ إذن: $n = 3k + 1$ (حيث $k \in \mathbb{N}$).

بكالوريا 2021 // الموضوع الأول // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 64

لدينا: a و b عددين طبيعيين حيث $a = 2926$ و $b = 1715$.

(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على العدد 13:

❶ لدينا: $a = 13 \times (225) + 1$ ، أي: $a \equiv 1[13]$ ؛ ومنه: باقي قسمة a على 13 هو 1.

❷ لدينا: $b = 13 \times (131) + 12$ ، أي: $b \equiv 12[13]$ ؛ ومنه: باقي قسمة b على 13 هو 12.

(2) أ. تبين أن $b + 1 \equiv 0[13]$ ، ثم استنتاج أن $b \equiv -1[13]$:

لدينا: $b \equiv 12[13]$ ، ومنه: $b + 1 \equiv 12 + 1[13]$ ، أي: $b + 1 \equiv 13[13]$ ؛ إذن: $b + 1 \equiv 0[13]$ (لأن $13 \equiv 0[13]$).

« استنتاج أن $b \equiv -1[13]$ لدينا: $b + 1 \equiv 0[13]$ ، ومنه: $b \equiv -1[13]$ ».

ب. تبين أن العدد $a^{1442} + b^{2021}$ يقبل القسمة على 13:

لدينا: $a^{1442} + b^{2021} \equiv (1)^{1442} + (-1)^{2021}[13]$

ومنه: $a^{1442} + b^{2021} \equiv 1 + (-1)[13]$ (لأن 2021 عدد فردي)،

وبالتالي: $a^{1442} + b^{2021} \equiv 0[13]$ ؛ إذن: العدد $a^{1442} + b^{2021}$ يقبل القسمة على 13.

(3) بوضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $A_n = 27^n + 1$.

أ. التحقق أن $27 \equiv 1[13]$ ، ثم استنتاج أن $A_n \equiv 2[13]$:

لدينا: $27 = 13 \times (2) + 1$ ، ومنه: باقي قسمة 27 على 13 هو 1؛ إذن: $27 \equiv 1[13]$.

« استنتاج أن $A_n \equiv 2[13]$ ».

لدينا: $27^n + 1 \equiv 1^n + 1[13]$ ، ومنه: $27^n + 1 \equiv 1 + 1[13]$ ؛ إذن: $A_n \equiv 2[13]$ (وهو المطلوب).

ب. تعيين الأعداد الطبيعية n حتى يكون $A_n + n + 11 \equiv 0[13]$:

لدينا: $A_n + n + 11 \equiv 0[13]$ معناه: $2 + n + 11 \equiv 0[13]$

ومنه: $n \equiv -13[13]$

وبالتالي: $n \equiv 0[13]$ ؛ إذن: $n = 13k$ (حيث $k \in \mathbb{N}$).

بكالوريا 2021 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 65

لدينا: الأعداد الطبيعية a ، b و c حيث $a = 2021$ ، $b = 1442$ و $c = 1954$.

(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعددين a و c على 3:

❶ لدينا: $a = 3 \times (673) + 2$ ، أي: $a \equiv 2[3]$ ؛ ومنه: باقي قسمة a على 3 هو 2.

❷ لدينا: $c = 3 \times (651) + 1$ ، أي: $c \equiv 1[3]$ ؛ ومنه: باقي قسمة c على 3 هو 1.

(2) تبين أن العددين a و b متوافقان بترديد 3:

❸ الطريقة ❶:

لدينا: $a - b = 2021 - 1442 = 579 = 3 \times (193)$ ؛ إذن: $a \equiv b[3]$.

الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

❶ الطريقة ②: لدينا: $b = 3 \times (480) + 2$ ، أي: $b \equiv 2[3]$ ؛ ومنه: باقى قسمة b على 3 هو $[2]$.
نلاحظ أن: للعددين a و b نفس الباقي فى القسمة الإقليدية على 3، فهما متوافقان بترديد 3.
3) أ. تبين أن العدد $a + b - c$ يقبل القسمة على 3:

$$\text{لدينا: } a + b - c \equiv 2 + 2 - 1[3] \text{، ومنه: } a + b - c \equiv 3[3]$$

$$\text{وبالتالى: } a + b - c \equiv 0[3]$$

إذن: العدد $a + b - c$ يقبل القسمة على 3.

ب. استنتاج الأعداد الطبيعية n حتى يكون $n + a + b - c \equiv 0[3]$:

لدينا: $n + a + b - c \equiv 0[3]$ ، معناه: $n + 0 \equiv 0[3]$ ، وبالتالى: $n \equiv 0[3]$ ، إذن: $n = 3k$ (حيث $k \in \mathbb{N}$).

4) تعيين باقى قسمة العدد $(a \times c)^{1442} + (b \times c)^{2021}$ على 3:

$$\text{لدينا: } (a \times c)^{1442} + (b \times c)^{2021} \equiv (2 \times 1)^{1442} + (2 \times 1)^{2021} [3]$$

$$\text{ومنه: } (a \times c)^{1442} + (b \times c)^{2021} \equiv 2^{1442} + 2^{2021} [3]$$

$$\text{وعليه: } (a \times c)^{1442} + (b \times c)^{2021} \equiv (-1)^{1442} + (-1)^{2021} [3]$$

$$\text{ويكون: } (a \times c)^{1442} + (b \times c)^{2021} \equiv 1 + (-1)[3] \text{ (لأن 1442 عدد زوجي و 2021 عدد فردي)،}$$

$$\text{وبالتالى: } (a \times c)^{1442} + (b \times c)^{2021} \equiv 0[3]$$

$$\text{إذن: باقى قسمة العدد } (a \times c)^{1442} + (b \times c)^{2021} \text{ على 3 هو } [0].$$

بكالوريا 2022 // الموضوع الأول // الشعبة: آوف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 66

لدينا: a و b عدنان طبيعان حيث $a = 2022$ و $b = 1443$.

1) تعيين باقى القسمة الإقليدية لكل من a و b على 5، ثم استنتاج أن $a + b \equiv 0[5]$:

$$\text{❶ لدينا: } a = 5 \times (404) + 2 \text{، أي: } a \equiv 2[5] \text{؛ ومنه: باقى قسمة } a \text{ على 5 هو } [2].$$

$$\text{❷ لدينا: } b = 5 \times (288) + 3 \text{، أي: } b \equiv 3[5] \text{؛ ومنه: باقى قسمة } b \text{ على 5 هو } [3].$$

$$\text{« استنتاج أن } a + b \equiv 0[5] \text{:}$$

$$\text{لدينا: } a + b \equiv 2 + 3[5] \text{، أي: } a + b \equiv 5[5] \text{؛ ومنه: } a + b \equiv 0[5] \text{ (لأن: } 5 \equiv 0[5] \text{).}$$

2) أ) التحقق أن باقى القسمة الإقليدية للعدد $(a + a^2 + a^3)$ على 5 هو 4:

$$\text{لدينا: } a + a^2 + a^3 \equiv 2 + (2)^2 + (2)^3 [5] \text{، ومنه: } a + a^2 + a^3 \equiv 2 + 4 + 8[5]$$

$$\text{وعليه: } a + a^2 + a^3 \equiv 10 + 4[5]$$

$$\text{وبالتالى: } a + a^2 + a^3 \equiv 4[5] \text{ (لأن: } 10 \equiv 0[5] \text{)؛}$$

$$\text{إذن: باقى القسمة الإقليدية للعدد } (a + a^2 + a^3) \text{ على 5 هو } [4].$$

الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $(a + a^2 + a^3 + n)$ القسمة على 5:

يقبل العدد $(a + a^2 + a^3 + n)$ القسمة على 5، معناه: $a + a^2 + a^3 + n \equiv 0[5]$

ومنه: $4 + n \equiv 0[5]$

وعليه: $n \equiv -4[5]$

وبالتالي: $n \equiv (-4 + 5)[5]$

أي: $n \equiv 1[5]$ ؛ إذن: $n = 5k + 1$ (حيث $k \in \mathbb{N}$).

3) التحقق أن $a + b + 4 \equiv -1[5]$ ، ثم تبين أن العدد $(a + b + ab)^a + (a + b + 4)^b$ يقبل القسمة على 5: «التحقق أن $a + b + 4 \equiv -1[5]$ »

لدينا: $a + b + 4 \equiv 0 + 4[5]$ ومنه: $a + b + 4 \equiv 4[5]$

وعليه: $a + b + 4 \equiv 4 - 5[5]$

أي: $a + b + 4 \equiv -1[5]$ (وهو المطلوب).

«تبين أن العدد $(a + b + ab)^a + (a + b + 4)^b$ يقبل القسمة على 5:

(نُبين أن $(a + b + ab)^a + (a + b + 4)^b \equiv 0[5]$)

لدينا: $(a + b + ab)^a + (a + b + 4)^b \equiv (0 + 2 \times 3)^{2022} + (-1)^{1443}[5]$

أي: $(a + b + ab)^a + (a + b + 4)^b \equiv 6^{2022} + (-1)^{1443}[5]$

ومنه: $(a + b + ab)^a + (a + b + 4)^b \equiv 1^{2022} - 1[5]$ (لأن: $6 \equiv 1[5]$ و 1443 عدد فردي)،

وعليه: $(a + b + ab)^a + (a + b + 4)^b \equiv 1 - 1[5]$ وبالتالي: $(a + b + ab)^a + (a + b + 4)^b \equiv 0[5]$ ؛

إذن: العدد $(a + b + ab)^a + (a + b + 4)^b$ يقبل القسمة على 5.

بكالوريا 2022 // الموضوع الثاني // الشعبة: آف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 67

لدينا: a و b عدنان طبيعيان حيث باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 9 هو 8 و $a + b \equiv 3[9]$.

1) تبين أن باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 9 هو 4:

لدينا: $\begin{cases} a \equiv 8[9] \\ a + b \equiv 3[9] \end{cases}$ معناه: $8 + b \equiv 3[9]$

ومنه: $b \equiv 3 - 8[9]$

أي: $b \equiv -5[9]$

وعليه: $b \equiv -5 + 9[9]$ ، أي: $b \equiv 4[9]$ ؛ إذن: باقي قسمة b على 9 هو 4.

2) التحقق أن العددين b و 103 متوافقان بترديد 9:

لدينا: $103 = 9 \times (11) + 4$ ، أي: $103 \equiv 4[9]$ ، ومنه: باقي قسمة 103 على 9 هو 4.

نلاحظ أن العددين b و 103 لهما نفي الباقي في القسمة الإقليدية على 9، فهما متوافقان بترديد 9؛ أي: $b \equiv 103[9]$.

3) أ) تبين أن $a \equiv -1[9]$ و $103^3 \equiv 1[9]$:

«تبين أن $a \equiv -1[9]$ » لدينا: $a \equiv 8[9]$ ، ومنه: $a \equiv 8 - 9[9]$ ، أي: $a \equiv -1[9]$ (وهو المطلوب).

« تبيان أن $103^3 \equiv 1[9]$ »لدينا: $103 \equiv 4[9]$ ، ومنه: $103^3 \equiv 4^3[9]$ ، وعليه: $103^3 \equiv 1[9]$ (لأن: $4^3 = 64$ و $64 \equiv 1[9]$).ب) التحقق أن $a^{2022} + (16 \times b)^{1443} \equiv 2[9]$ لدينا: $a^{2022} + (16 \times b)^{1443} \equiv (-1)^{2022} + (4^2 \times 4)^{1443}[9]$ ومنه: $a^{2022} + (16 \times b)^{1443} \equiv 1 + (4^3)^{1443}[9]$ (لأن: 2022 عدد زوجي)،وعليه: $a^{2022} + (16 \times b)^{1443} \equiv 1 + (1)^{1443}[9]$ (لأن: $4^3 \equiv 1[9]$)،وبالتالي: $a^{2022} + (16 \times b)^{1443} \equiv 1 + 1[9]$ ، إذن: $a^{2022} + (16 \times b)^{1443} \equiv 2[9]$.4) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $a^{2022} + 103^3 + n \equiv 0[9]$ لدينا: $a^{2022} + 103^3 + n \equiv 0[9]$ معناه: $1 + 1 + n \equiv 0[9]$ ومنه: $2 + n \equiv 0[9]$ وعليه: $n \equiv -2[9]$ وبالتالي: $n \equiv -2 + 9[9]$ أي: $n \equiv 7[9]$ ، إذن: $n = 9k + 7$ (حيث $k \in \mathbb{N}$).

بكالوريا 2023 // الموضوع الأول // الشعبة: آوف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 68

نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث: $a = 2023$ و $b = 1444$.1) تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 5:❶ لدينا: $a = 5 \times (404) + 3$ ، أي: $a \equiv 3[5]$ ؛ ومنه: باقي قسمة a على 5 هو 3.❷ لدينا: $b = 5 \times (288) + 4$ ، أي: $b \equiv 4[5]$ ؛ ومنه: باقي قسمة b على 5 هو 4.ب) استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^3 + b^2 + 2$ على 5:لدينا: $a^3 + b^2 + 2 \equiv (3)^3 + (4)^2 + 2[5]$ ، أي: $a^3 + b^2 + 2 \equiv 27 + 16 + 2[5]$ ومنه: $a^3 + b^2 + 2 \equiv 2 + 1 + 2[5]$ وعليه: $a^3 + b^2 + 2 \equiv 5[5]$ وبالتالي: $a^3 + b^2 + 2 \equiv 0[5]$ (لأن: $5 \equiv 0[5]$)؛إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^3 + b^2 + 2$ على 5 هو 0.2) تبيان أن $b \equiv -1[5]$ لدينا: $b \equiv 4[5]$ ، ومنه: $b \equiv 4 - 5[5]$ ، إذن: $b \equiv -1[5]$ (وهو المطلوب).ب) التحقق أن العدد $b^{2024} - 1$ يقبل القسمة على 5:لدينا: $b^{2024} - 1 \equiv (-1)^{2024} - 1[5]$ ، ومنه: $b^{2024} - 1 \equiv 1 - 1[5]$ (لأن: 2024 عدد زوجي)،أي: $b^{2024} - 1 \equiv 0[5]$ ؛إذن: العدد $b^{2024} - 1$ يقبل القسمة على 5.3) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $b^{2n} \equiv 1[5]$ من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا: $b^{2n} \equiv (-1)^{2n}[5]$ ، ومنه: $b^{2n} \equiv 1[5]$ (لأن: $2n$ عدد زوجي).

(ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $a + b^{2n} - bn \equiv 0[5]$:

$$3 + 1 - (-1)n \equiv 0[5] \text{ تُكافئ: } a + b^{2n} - bn \equiv 0[5]$$

$$\text{ومنه: } 4 + n \equiv 0[5]$$

$$\text{وعليه: } n \equiv -4[5]$$

$$\text{ويكون: } n \equiv -4 + 5[5]$$

$$\text{وبالتالي: } n \equiv 1[5] \text{؛ إذن: } n = 5k + 1 \text{ (حيث } k \in \mathbb{N} \text{)}$$

بكالوريا 2023 // الموضوع الثاني // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

(06 نقاط)

حل التمرين 69

نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث $a = 1945$ و $b = 2024$.

(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 7:

$$\textcircled{1} \text{ لدينا: } a = 7 \times (277) + 6, \text{ أي: } a \equiv 6[7] \text{؛ ومنه: باقي قسمة } a \text{ على } 7 \text{ هو } 6.$$

$$\textcircled{2} \text{ لدينا: } b = 7 \times (289) + 1, \text{ أي: } b \equiv 1[7] \text{؛ ومنه: باقي قسمة } b \text{ على } 7 \text{ هو } 1.$$

(ب) تبيان أن $a \equiv -1[7]$:

الطريقة ①:

$$\text{لدينا: } a - (-1) = a + 1 = 1946 = 7 \times (278) \text{، إذن: } a \equiv -1[7].$$

$$\textcircled{2} \text{ الطريقة ②: لدينا: } a \equiv 6[7] \text{، ومنه: } a \equiv 6 - 7[7] \text{، إذن: } a \equiv -1[7].$$

(2) استنتاج أن العددين a^2 و b^2 متوافقان بترديد 7:

$$\text{لدينا: } \begin{cases} a \equiv -1[7] \\ b \equiv 1[7] \end{cases} \text{، ومنه: } \begin{cases} a^2 \equiv (-1)^2[7] \\ b^2 \equiv (1)^2[7] \end{cases} \text{، وبالتالي: } \begin{cases} a^2 \equiv 1[7] \\ b^2 \equiv 1[7] \end{cases} \text{؛ نلاحظ أن: العددين } a^2 \text{ و } b^2$$

لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على 7، فهما متوافقان بترديد 7؛ أي: $a^2 \equiv b^2[7]$.

(3) تبيان أن العدد $a^2 + b^2 - 2$ يقبل القسمة على 7:

$$\text{لدينا: } a^2 + b^2 - 2 \equiv 1 + 1 - 2[7] \text{، ومنه: } a^2 + b^2 - 2 \equiv 0[7] \text{؛ إذن: العدد } a^2 + b^2 - 2 \text{ يقبل القسمة على } 7.$$

(4) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $a^{2n} \equiv 1[7]$:

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n \text{، لدينا: } a^{2n} \equiv (-1)^{2n}[7] \text{، ومنه: } a^{2n} \equiv 1[7] \text{ (لأن: عدد زوجي)}.$$

(ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $a^{2n} + bn + 1 \equiv 0[7]$:

$$1 + (1)n + 1 \equiv 0[7] \text{ تُكافئ: } a^{2n} + bn + 1 \equiv 0[7]$$

$$\text{ومنه: } n \equiv -2[7]$$

$$\text{وعليه: } n \equiv -2 + 7[7] \text{؛ أي: } n \equiv 5[7] \text{؛ إذن: } n = 7k + 5 \text{ (حيث } k \in \mathbb{N} \text{)}$$

يتبع حلّ الدّوال كثرات الحدود في البكالوريا.