

العقري في الرياضيات

المحور الأول

الثالثة ثانوي

الشعب: ● تسيير وإقتصاد.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

مجلة العبقرى في الرياضيات (الدوال الأسية واللوغاريتمية)

الملخص // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

ملخص: حول الدوال الأسية واللوغاريتمية // التحضير الجيد يكالوريا // الشعبة: تسيير وإ.

1 الدالة الأسية

1 مبرهنة وتعريف

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث:

$$f'(x) = f(x) \quad (1) \quad f(0) = 1 \quad (2)$$

نرمز إليها بالرمز "exp"، ونسميها الدالة الأسية النيبيرية.

نتائج من التعريف:

$$\exp(0) = 1$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $\exp'(x) = \exp(x)$

2 خواص جبرية

x و y عددان حقيقيان و n عدد صحيح.

$$\exp(x) > 0 \quad (1)$$

$$\exp(x) \times \exp(-x) = 1 \quad (2)$$

$$\left(\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \right)$$

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y) \quad (3)$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad (4)$$

$$(n \in \mathbb{Z}) \exp(nx) = [\exp(x)]^n \quad (5)$$

العدد e والترميز e^x :

العدد e هو صورة 1 بالدالة الأسية أي:

$$\exp(1) = e \simeq 2,72$$

حسب الخاصية (5) ومن أجل $x = 1$ نجد:

$$(n \in \mathbb{Z}) \exp(n) = [\exp(1)]^n = e^n$$

$$\exp(x) = e^x \quad \text{اصطلاحاً:}$$

(من أجل كل $x \in \mathbb{R}$)

قواعد الحساب: (خواص الدالة "exp")

x و y عددان حقيقيان و n عدد صحيح.

$$e^0 = 1 \quad (1)$$

$$(e^x)' = e^x > 0 \quad (2)$$

$$\left(e^{-x} = \frac{1}{e^x} > 0 \right) \quad e^x \times e^{-x} = 1 \quad (3)$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad (5)$$

$$e^{x+y} = e^x \times e^y \quad (4)$$

$$(n \in \mathbb{Z}) e^{nx} = (e^x)^n \quad (6)$$

3 دراسة الدالة "exp"

لدينا: $\exp(x) = e^x$ و $D_{\exp} =]-\infty; +\infty[$

النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (1)$$

إنجاه النفي

$$(e^x)' = e^x > 0, \text{ من أجل كل عدد حقيقي } x,$$

إن: الدالة "exp" متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(e^x)'$			+	
e^x	0^+	1	e	$+\infty$

نعلم أن $e^x > 0$ من جدول التغيرات:

- $x < 0$ يعني: $0 < e^x < 1$
 - $x = 0$ يعني: $e^x = 1$
 - $0 < x < 1$ يعني: $1 < e^x < e$
 - $x > 1$ يعني: $e^x > e$
- يمكن أن يكون x عبارة جبرية.

بما أن الدالة " exp " متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ ، فإن:

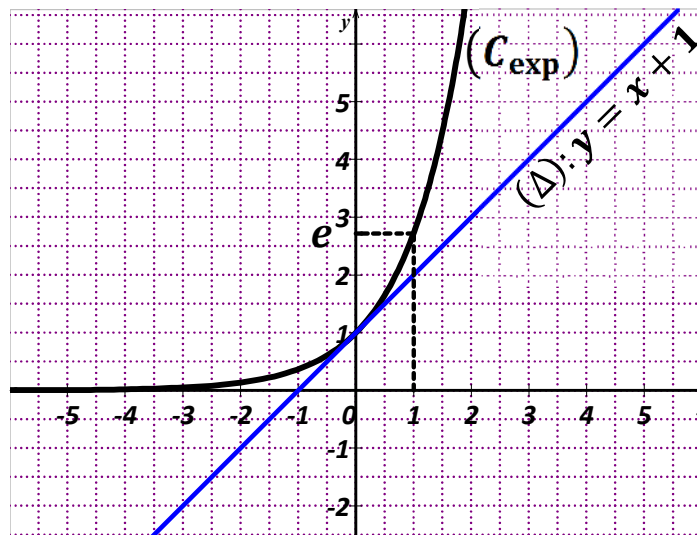
- $a > b$ يعني: $e^a > e^b$
 - $a < b$ يعني: $e^a < e^b$
 - $a = b$ يعني: $e^a = e^b$
- a و b عدنان حقيقيان أو عبارتان جبريتان.

ملاحظة مهمة: نستخدم لحل معادلات ومراجحات ولدراسة إشارة عبارة جبرية تتضمن e .

نتائج:

- بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ فإن (C_{exp}) يقبل محور الفواصل كمقارب عند $-\infty$.
- لدينا: $\exp(0) = e^0 = 1$ و $\exp'(0) = 1$
- إذن: (C_{exp}) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماساً، $(\Delta): y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0)$
- أي: $(\Delta): y = x + 1$.
- باستعمال تعريف العدد المشتق للدالة " exp " عند 0 :
- لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \exp'(0)$ ، إذن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- الدالة $x \mapsto x + 1$ هي أحسن تقريب تألفي للدالة $x \mapsto e^x$ بجوار 0
- أي: $e^x \simeq x + 1$ من أجل x قريب من 0 .

النمثيل البياني



4 دراسة الدالة "exp o u"

لدينا: $(exp \circ u)(x) = e^{u(x)}$

المشقة

$$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$$

إشارة $(e^{u(x)})'$

من إشارة $u'(x)$

لأن: $e^{u(x)} > 0$

إنجاء النغير

للدالتين "u" و "exp o u"

نفس اتجاه التغير على I، حيث:

u معرفة على I.

لأن الدالة "exp" متزايدة تماماً.

النهايات

لدراسة نهاية دالة "exp o u"

نستعمل المبرهنة الخاصة

بنهاية دالة مركبة.

5 التزايد المقارن

التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto x^n$ و $x \mapsto e^x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0^- \quad \textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \textcircled{4}$$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto x$ و $x \mapsto e^x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^- \quad \textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \textcircled{4}$$

نستعمل هذه النهايات لرفع حالات عدم التعيين.

6 معادلات من الشكل "ae^{2x} + be^x + c = 0" حيث (a ≠ 0)

نضع: $X = e^x$

نقوم بعد ذلك بحل المعادلة $aX^2 + bX + c = 0$ نتنتج قيم x في حالة وجودها (لأن $e^x > 0$).
■ نأخذ قيم $X > 0$ لإيجاد x وذلك بالعودة إلى الوضع.

7 المعادلات التفاضلية من الشكل "y' = ay + b" بحيث (a ≠ 0)

- المعادلة التفاضلية $y' = ay$ ، الحلول هي الدوال $x \mapsto ce^{ax}$ حيث $c \in \mathbb{R}$.
- المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ ، الحلول هي الدوال $x \mapsto ce^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث $c \in \mathbb{R}$.
- إذا أُعطي شرط مثلاً $f(x_0) = y_0$ ، نُعوض في الحلول، نقوم بإيجاد c، ويُصبح الحل وحيد للمعادلة التفاضلية.

8 إشارة بعض العبارات زردت في البكالوريا

■ إشارة $e^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	○	+

لدراسة إشارة العبارة $(abc \neq 0) ae^{2x} + be^x + c$

نحلّه باستعمال المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

$$ae^{2x} + be^x + c = a(e^x - X')(e^x - X'') \quad \Delta > 0 \quad \Rightarrow$$

$$ae^{2x} + be^x + c = a(e^x - X')^2 \quad \Delta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$ae^{2x} + be^x + c \quad \Delta < 0 \quad \Rightarrow$$

يُمكن تلخص إشارته في جدول باستعمال القواعد المعروفة

لإشارة كثير حدود من الدرجة الثانية.

إشارة $ae^{ax+\beta} + b$ ☞ إذا كان: a و b موجبين فإن: $ae^{ax+\beta} + b > 0$ ☞ إذا كان: a و b سالبين فإن: $ae^{ax+\beta} + b < 0$ ☞ إذا كان: a و b مختلفين في الإشارة، فإن: $ae^{ax+\beta} + b$ متغيرة الإشارة ولمعرفة إشارته▪ نحل المعادلة والمتراجحات $ae^{ax+\beta} + b > 0$ $ae^{ax+\beta} + b < 0$ $ae^{ax+\beta} + b = 0$

2 الدالة اللوغاريتمية

1 اللوغاريتم النيبيري لعدد

مبرهنة وتعريف:

يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^b = a > 0$ ،
يسمى هذا العدد اللوغاريتم النيبيري للعدد a ،
ونرمز إليه بالرمز " $\ln a$ " أي $b = \ln a$.

1 تعريف الدالة " $\ln$ "

نسمي "الدالة اللوغاريتمية النيبيرية"
الدالة التي نرمز إليها بالرمز " $\ln$ "،
والتي تُرفق بكل عدد حقيقي x من
] $0; +\infty$ [العدد الحقيقي $\ln x$.

نتائج من التعريف:

- من أجل $x \in \mathbb{R}$ و $y \in]0; +\infty[$ ، $e^x = y$ يعني: $x = \ln y$
 - من أجل $x \in]0; +\infty[$ ، $e^{\ln x} = x$
 - من أجل $x \in \mathbb{R}$ ، $\ln(e^x) = x$
 - بمأن: $e^0 = 1$ فإن: $\ln 1 = 0$ ، وبمأن: $e^1 = e$ فإن: $\ln e = 1$
- حسب النتيجة (1) الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " $\ln$ " هي الدالة العكسية للدالة الأسية النيبيرية " $\exp$ ".
- في معلم متعامد ومتجانس، $(C_{\exp})$ و $(C_{\ln})$ متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (المنصف الأول).

2 خواص جبرية

الخاصية الأساسية: x و y عدنان حقيقيان من $]0; +\infty[$ ،

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad ①$$

نتائج: x و y عدنان حقيقيان من $]0; +\infty[$ و n عدد صحيح

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \quad ②$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \quad ③$$

$$(n \in \mathbb{Z}) \quad \ln(x^n) = n \ln x \quad ④$$

$$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x \quad ⑤$$

- يكون للعدد $\ln x$ معنى إذا فقط إذا كان: $x > 0$ (ما بعد $\ln$ موجب تماماً)
- يكون للعدد $\ln[u(x)]$ معنى إذا فقط إذا كان: $u(x) > 0$ (ما بعد $\ln$ موجب تماماً)
- يكون للعدد $\ln|u(x)|$ معنى إذا فقط إذا كان: $u(x) \neq 0$
- يكون للعدد $\ln[u(x)]^n$ معنى إذا فقط إذا كان: $u(x) \neq 0$ ، في حالة $n = 2k$ زوجي. في حالة $n = 2k + 1$ فردي. $u(x) > 0$

③ دراسة الدالة "ln"

لدينا: $D_{\ln} =]0; +\infty[$ و $\ln: x \mapsto \ln(x)$

🌸 اتجاه النفي

من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$
 إذن: الدالة "ln" متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$.

🌸 النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{②} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{①}$$

🌸 جدول التغيرات

x	0	1	e	$+\infty$
$(\ln x)'$		+		
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

نعلم أن $\ln x$ متغيرة الإشارة (لأن $\ln x \in \mathbb{R}$)
 ومن جدول التغيرات:

- $\ln x < 0$ يعني: $0 < x < 1$
- $\ln x = 0$ يعني: $x = 1$
- $0 < \ln x < 1$ يعني: $1 < x < e$
- $\ln x = 1$ يعني: $x = e$
- $\ln x > 1$ يعني: $x > e$

■ إشارة $\ln x$

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	○	+

يمكن أن يكون x عبارة جبرية (استعمل كلمة ما بعد $\ln$)
 بمأن الدالة "ln" متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ ، فإن

- $\ln a > \ln b$ يعني: $a > b$
- $\ln a < \ln b$ يعني: $a < b$
- $\ln a = \ln b$ يعني: $a = b$

a و b عدنان حقيقيان موجبان تماماً أو عبارتان جبريتان موجبتان تماماً.

ملاحظة مهمة: نستخدم لحل معادلات ومتراجحات أول دراسة إشارة عبارة جبرية تتضمن $\ln$.

نتائج:

■ بمأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ فإن $(C_{\ln})$ يقبل محور الترتيب كمقارب له.

■ لدينا: $\ln(1) = 0$ و $(\ln 1)' = \frac{1}{1} = 1$

■ إذن: $(C_{\ln})$ يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماساً، $(\Delta'): y = (\ln 1)'(x - 1) + \ln 1$ أي: $(\Delta'): y = x - 1$.

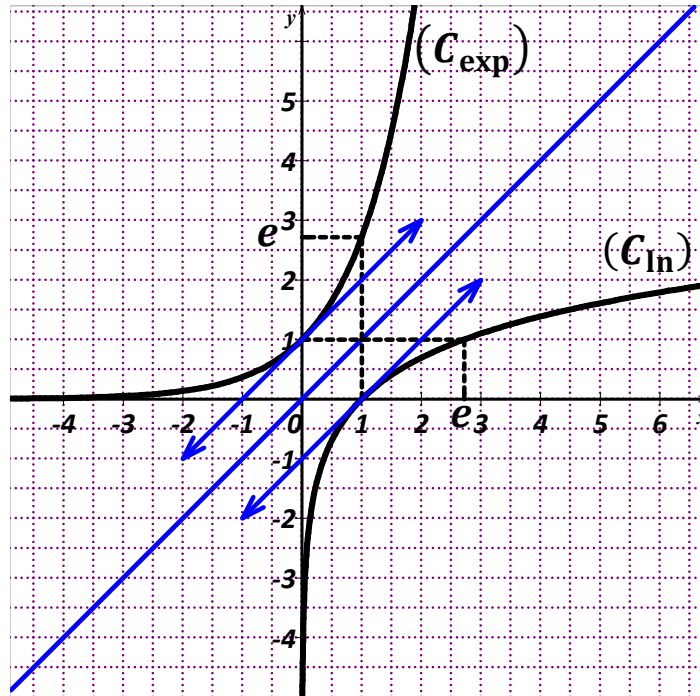
■ باستعمال تعريف العدد المشتق للدالة "ln" عند 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad \text{③} \quad \text{إذن: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} = (\ln 1)'$$

■ الدالة $x \mapsto x - 1$ هي أحسن تقريب تألفي للدالة $x \mapsto \ln x$ بجوار 1

■ أي: $\ln x \simeq x - 1$ من أجل x قريب من 1.

النموذج البياني



④ دراسة الدالة "ln ∘ u"

لدينا: $(\ln \circ u)(x) = \ln[u(x)]$

النهايات

لدراسة نهاية دالة "ln ∘ u"
نستعمل المبرهنة الخاصة
بنهاية دالة مركبة.

المشتقة

$$(\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

ملاحظة:

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

إنجاء النفي

للدالتين "u" و "ln ∘ u"
نفس اتجاه التغير على I، حيث:
u معرفة وموجبة تماماً على I.
لأن الدالة "ln" متزايدة تماماً.

5 التزايد المقارن

التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x^n$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0^- \quad ⑤ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+ \quad ④$$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^- \quad ⑤ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \quad ④$$

نستعمل هذه النهايات لرفع حالات عدم التعيين.

6 معادلات من الشكل $a[\ln x]^2 + b \ln x + c = 0$ حيث $a \neq 0$

نضع: $X = \ln x$

نقوم بعد ذلك بحل المعادلة $aX^2 + bX + c = 0$ ننتج قيم x في حالة وجودها (لأن $x > 0$).
■ نأخذ قيم X لإيجاد x وذلك بالعودة إلى الوضع.

7 إشارة بعض العبارات زردت في البكالوريا

لدراسة إشارة العبارة $a[\ln(x)]^2 + b \ln(x) + c$ ($abc \neq 0$)

نحلله باستعمال المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

$$a[\ln(x)]^2 + b \ln(x) + c = a(\ln x - X')(\ln x - X''), \Delta > 0$$

$$a[\ln(x)]^2 + b \ln(x) + c = a(\ln x - X')^2, \Delta = 0$$

$$a[\ln(x)]^2 + b \ln(x) + c, \Delta < 0$$

يمكن تلخيص إشارته في جدول باستعمال القواعد المعروفة لإشارة كثير حدود من الدرجة الثانية.

إشارة $a \ln(ax + \beta) + b$

■ نحل المعادلة والمتراجحات $a \ln(ax + \beta) + b > 0$

$$a \ln(ax + \beta) + b < 0$$

$$a \ln(ax + \beta) + b = 0$$

ملاحظة مهمة جداً: لحل معادلات (أو متراجحات) تتضمن $\ln$ نعين أولاً مجموعة التعريف D .

2 اللوغاريتمية

الجدالة

2 النهايات

1 الأسية

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad ②$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad ①$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad ③$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^- \quad ⑤$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \quad ④$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0^- \quad ⑤$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+ \quad ④$$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \quad ②$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad ①$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad ③$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^- \quad ⑤$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad ④$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0^- \quad ⑤$$

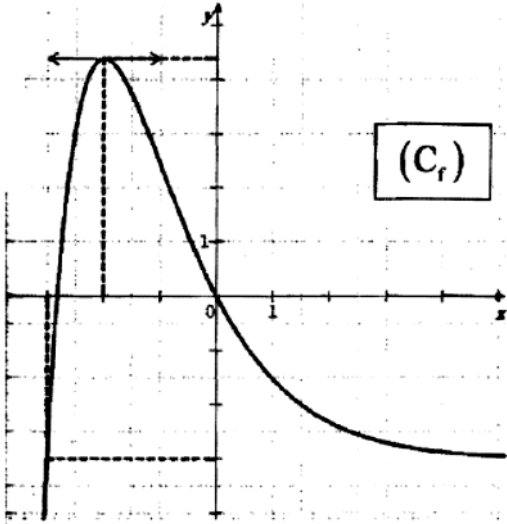
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad ④$$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

مجلة العبقرى في الرياضيات (الدوال الأسية - الكالوريات جزائرية)

التمارين // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

التمرين 01: (05 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.



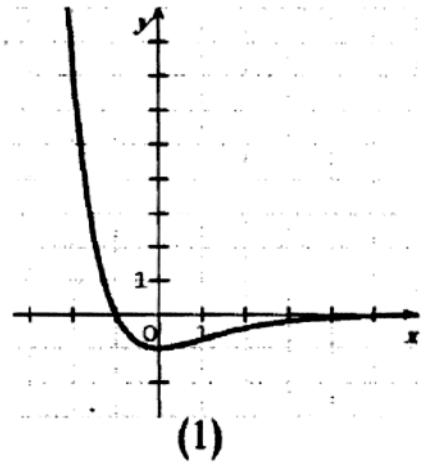
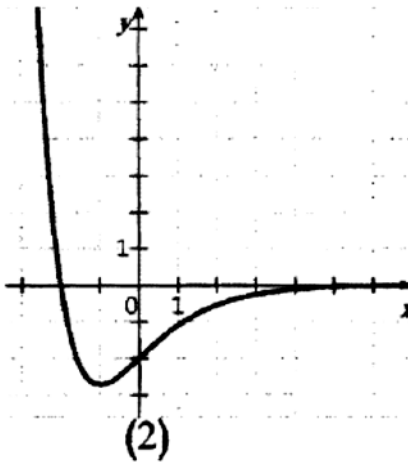
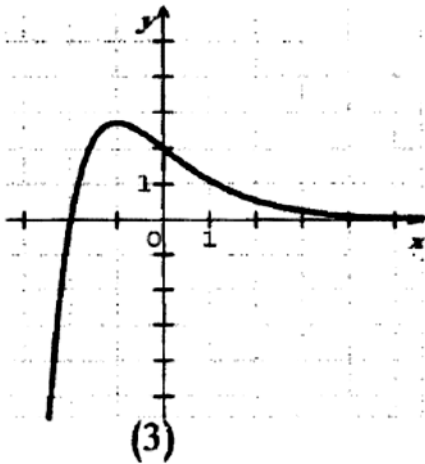
f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = (x+a)e^{-x} + b$ حيث a و b عدنان حقيقيان وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) بقراءة بيانية للمنحنى (C_f) :

(أ) عيّن $f(-3)$, $f(0)$, $f'(-2)$.

(ب) عيّن حسب قيم x إشارة $f'(x)$.

(ج) من بين المنحنيات الثلاثة (1)، (2)، (3) عيّن، مع التبرير، المنحنى الممثل للدالة f' مشتقة الدالة f .



(2) (أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f(x) = (x+3)e^{-x} - 3$.

(ب) شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

(ج) بيّن أنّ (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً يُطلب تعيين معادلة له.

(د) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = -2$ تقبل في المجال $[0; +\infty[$ حلاً وحيداً α محصور بين 1,50 و 1,52.

(3) نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x) = (-x-4)e^{-x}$ وليكن I العدد الحقيقي حيث:

$$I = \int_{-2}^0 f(x) dx$$

(أ) احسب $F'(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

(ب) أعط تفسيراً بيانياً للعدد I مُبرراً الحصر التالي $4,5 < I < 5$ بإعتبارات بيانية مَحْضَة.

(ج) احسب العدد I .

التمرين 02: (08 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

1) لتكن f الدالة المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = e^{2x} - e^x - x - 2$.

أ. احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$. (نقبل أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0$)

ب. بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن دالتها المشتقة f' تحقق: $f'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.

ج. ادرس حسب قيم x إشارة $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2) (C) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ على المجال $]-\infty; 1]$.

أ. بين أن المستقيم (d) الذي معادلته $y = -x - 2$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (d) .

ب. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-2,11 < \alpha < -2,10$ و $0,81 < \beta < 0,82$.

وفسر النتيجة هندسياً.

ج. ارسم المستقيم (d) والمنحنى (C) .

3) عيّن دالة أصلية F للدالة f على المجال $]-\infty; 1]$.

التمرين 03: (06 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

جدول التغيرات المقابل هو للدالة f المعرفة على المجال $[-1; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = (x+1)e^{1-x}$.

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

والمجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) بين أن معادلة (Δ) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1

هي: $y = -x + 3$.

2) g هي الدالة المعرفة على المجال $[-1; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = -xe^{1-x} + 1$.

أ- ادرس اتجاه تغير الدالة g .

ب- احسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[-1; +\infty[$.

3) h هي الدالة المعرفة على المجال $[-1; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = (x+1)e^{1-x} + x - 3$.

أ- لاحظ أنه من أجل كل x من المجال $[-1; +\infty[$ ، $h(x) = f(x) + x - 3$ ، ثم استنتج أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

ب- بين أنه من أجل كل x من المجال $[-1; +\infty[$ ، $h'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج جدول تغيرات الدالة h .

ج- تحقق أن المعادلة: $h(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $[-1; +\infty[$ يُطلب تعيينه.

د- حدّد إشارة $h(x)$ ، ثم استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

هـ- أنشئ كلا من المماس (Δ) والمنحنى (C_f) .

التمرين 04: (07 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^{x-1}}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. فسر النتيجةن هندسياً.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- 2-أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x - 1$ ، مُقارب مائل للمنحنى (C_f) .
 ب) تحقّق أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، فإنّ: $f(x) = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1}$ ، ثم استنتج أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = 2x - 2$ ، مُقارب للمنحنى (C_f) .
 3-بين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، فإنّ: $f'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}$.
 استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.
 4-مثّل بيانيا كلاً من (Δ) ، (Δ') و (C_f) .
 5-احسب العدد: $\int_1^2 f(x) dx$ ، ثم فسره هندسياً.

التمرين 05: (07 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

- الدّالة العددية f معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 6(1 - 2x)e^{-x} + 5$.
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسياً. (يُعطى $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$)
 2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها.
 3) أنشئ (C_f) .
 4) أ) بين أن المعادلة $f(x) = 3,5$ تقبل في $[0; 7]$ حلين مختلفين α ، β حيث:
 $0,7 < \alpha < 0,8$ و $2,9 < \beta < 3$.
 ب) حل بيانياً في المجال $[0; 7]$ المتراجحة: $f(x) \leq 3,5$.
 5) أ) عيّن العددين الحقيقيين a ، b بحيث تكون الدّالة g المعرفة على $[0; 7]$ بـ:
 $g(x) = (ax + b)e^{-x}$ دالة أصلية للدّالة h المعرفة على $[0; 7]$ بـ: $h(x) = 6(1 - 2x)e^{-x}$.
 ب) استنتج دالة أصلية للدّالة f على $[0; 7]$.
 II) الكلفة الهامشية C_M لصناعة كمية x (مقدرة بالطن) من منتج، حيث x ينتمي إلى المجال $[0; 7]$
 تُنمذج بالدّالة f أي: $C_M(x) = f(x)$ (الكلفة مقدرة بملايين الدينائر).
 1) حدّد كمية المنتج بحيث تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن، وما هي قيمة هذه الكلفة؟ (تدور النتيجة إلى 10^{-2})
 2) ما هي كميات المنتج التي من أجلها لا تتجاوز الكلفة الهامشية 3,5 مليون دينار؟
 3) نذكر أن دالة الكلفة الإجمالية دالة أصلية لدالة الكلفة الهامشية.
 أ) بين أن الكلفة الإجمالية C_T معرفة بـ: $C_T(x) = (12x + 6)e^{-x} + 5x + k$ حيث k عدد حقيقي.
 ب) حدّد قيمة k إذا علمت أن المصاريف الثابتة 2 مليون دينار (أي $C_T(0) = 2$).

التمرين 06: (09 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

- الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{4e^{-x}}{e^{-x} + 1} - 3$.
 (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 1) أ) بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x) = \frac{4}{e^x + 1} - 3$.
 ب) احسب نهاية الدّالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ؛ ثم فسّر النتيجة هندسياً.
 2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها.
 3) أ) جد فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل.

- (ب) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $\Omega(0; -1)$.
- (ج) بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(-x) + f(x) = -2$ ثم استنتج أنّ (C_f) يقبل مركز تناظر.
- (د) أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f) في نفس المعلم.
- (4) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمت التي معادلاتها: $x = 0$, $x = -\ln 3$ و $y = 0$.
- (5) الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(|x|)$ ، و (C_h) منحناها البياني في المعلم $(0; \vec{i}; \vec{j})$.
- (أ) بين أنّ h دالة زوجية.
- (ب) اعتماداً على المنحنى (C_f) ، اشرح كيف يتم رسم المنحنى (C_h) ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

التمرين 07: (04 نقاط) بكالوريا 2016 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

f الدّالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = e^x + 2e^{-x} - 3$. اختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة مع التعليل.

(الإجابة أ)	(الإجابة ب)	(الإجابة ج)	
$\ln 2$ و 0	$-\ln 2$ و 0	$\ln 3$ و 0	1 حلّي المعادلة $f(x) = 0$ هما
$-\infty$	$+\infty$	-3	2 نهاية $f(x)$ عندما x يؤول إلى $+\infty$ هي
متزايدة تماماً	متناقصة تماماً	ليست رتيبة	3 على المجال $\left[\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right]$ الدّالة f
1	2	-1	4 m القيمة المتوسطة للدّالة f على المجال $[0; 2]$ ، مُدور m إلى الوحدة هو:

التمرين 08: (08 نقاط) بكالوريا 2017 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

نعتبر الدّالة f المعرفة على D_f حيث $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{e^x - 1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب النهايات: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وفسّر بيانياً النتائج المُحصل عليها.

(ب) احسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) بين أنّه من أجل كل x من D_f ، $f'(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$.

(ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

(3) ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 1$.

(4) عيّن معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 3$.

(5) نعتبر الدّالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = f(x) - \frac{9}{4}(x - \ln 3) - 1$.

الجدول المُقابل يُمثل جدول تغيّرات الدّالة g .

(أ) احسب $g(\ln 3)$ واستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(ب) ادرس على المجال $]0; +\infty[$ وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) ، ثمّ فسّر ذلك بيانياً.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(6) احسب $f(\ln 2)$ ثم أرسم المماس (T) و (C_f) على المجال $]0; 3[\cup]0; -\infty[$.

التمرين 09: (08 نقاط) بكالوريا 2017_02 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2x - 1 - e^{2x}$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) استنتج إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^2 - x - \frac{1}{2}e^{2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (يُعطى: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2} = +\infty$)

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,25 < \alpha < -0,24$.

ب) أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A إحداثياتها $(0; -\frac{1}{2})$.

ج) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة A .

(4) ارسم (T) و (C_f) .

(5) أ) احسب بالسنتيمتر مربع المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها

$x = 0$ ، $x = \alpha$ و $y = 0$.

ب) تحقّق أنّ $A(\alpha) = \frac{1}{3}(4\alpha^3 - 12\alpha^2 + 6\alpha + 3)cm^2$.

التمرين 10: (08 نقاط) بكالوريا 2018_02 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 + (1 - x)e^{-x+1}$.

ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم بيّن أنّه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $g(x) > 0$. (لا يُطلب حساب النهايات)

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + xe^{-x+1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. ثم بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى (C_f).

ب. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(2) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$: $f'(x) = g(x)$ ثم شكّل جدول تغيرات للدالة f .

(3) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 4$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $3,75 < \alpha < 3,77$.

(4) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة I ثم ارسم (T) و (Δ) و (C_f) .

(5) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - (x + 1)e^{-x+1}$.

أ. بيّن أنّ الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

ب. أوجد القيمة المضبوطة للعدد $\int_1^4 f(x)dx$ ، ثم أعط تفسيراً هندسياً لهذا العدد.

(6) تتمذج الكلفة الهامشية C_m لإنتاج كمية q (مقدرة بآلاف الوحدات) حيث $0 \leq q \leq 7$ بالدالة f المعرفة سابقاً

أي: $C_m(q) = f(q)$ حيث: $q \in [0; 7]$. (الكلفة الهامشية مقدّرة بملايين الدينانير)

أ. ما هي كمية المنتج التي من أجلها لا تتجاوز الكلفة الهامشية 4 ملايين دينار؟

ب. نذكر أنّ دالة الكلفة الإجمالية C_T هي دالة أصلية لدالة الكلفة الهاشمية. احسب القيمة المتوسطة للكلفة الإجمالية عندما تنتج الشركة ما بين 1000 وحدة و4000 وحدة.

التمرين 11: (07 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

I الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; 0]$ كما يلي: $g(x) = 2x + 6 - e^{2x+1}$.

(أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغيير الدالة g على المجال $]-\infty; 0]$ ثمّ شكّل جدول تغييراتها.

(2) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-3 < \alpha < -2,9$.

(ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty; 0]$.

II الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 0]$ كما يلي: $f(x) = -2x^2 - 12x + e^{2x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

حيث الوحدة على محور الفواصل $1cm$ وعلى محور الترتيب $0,5cm$.

(1) أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0]$: $f'(x) = -2g(x)$.

(2) استنتج اتجاه تغيير الدالة f على المجال $]-\infty; 0]$.

(3) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثمّ شكّل جدول تغييرات الدالة f .

(4) بيّن أنّ: $f(\alpha) = -2\alpha(\alpha + 5) + 6$ وأعط حصرا للعدد $f(\alpha)$ ، ثمّ ارسم (C_f) على المجال $[-4; 0]$.

(5) احسب بدلالة α التكامل: $\int_{\alpha}^0 f(x)dx$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

مجلة العبقرى في الرياضيات (الدوال الأسية - كالوريات جزائرية)

الحلول // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

حل التمرين 01: (05 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: $f(x) = (x + a)e^{-x} + b$ و $D_f = \mathbb{R}$ ، حيث a و b عدنان حقيقيان.

(1) بقراءة بيانية للمنحنى (C_f) ،

(أ) تعيين $f(-3)$ ، $f(0)$ ، $f'(-2)$:

من البيان لدينا: $f(0) = 0$ ؛ $f(-3) = -3$ ؛

و $f'(-2) = 0$ (المماس عند النقطة ذات الفاصلة (-2) مُوازي لمحور الفواصل).

(ب) تعيين حسب قيم x إشارة $f'(x)$:

من البيان لدينا: f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; -2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[-2; +\infty[$ إذن:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\bigcirc$	$-$

(ج) المنحنى الممثل للدالة f' مشتقة الدالة f هو المنحنى (2) لأن:

▪ من أجل $x \in]-\infty; -2]$ ، المنحنى (2) يقع فوق محور الفواصل أي: $f'(x) \geq 0$.

▪ ومن أجل $x \in [-2; +\infty[$ ، المنحنى (2) يقع تحت محور الفواصل أي: $f'(x) \leq 0$.

(2) تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = (x + 3)e^{-x} - 3$:

من (1) أ، لدينا: $\begin{cases} f(-3) = -3 \\ f(0) = 0 \\ f'(-2) = 0 \end{cases}$ بحيث: $f'(x) = 1e^{-x} - e^{-x}(x + a) = (1 - x - a)e^{-x}$

$$\begin{cases} (-3 + a)e^3 + b = -3 \dots (1) \\ a + b = 0 \dots \dots \dots (2) \\ (3 - a)e^2 = 0 \dots \dots \dots (3) \end{cases} \begin{cases} (-3 + a)e^{-(-3)} + b = -3 \\ (0 + a)e^{-0} + b = 0 \\ (1 - (-2) - a)e^{-(-2)} = 0 \end{cases} \text{ ومنه:}$$

من (3) نجد: $a = 3$ ، وبالتعويض في (2) نجد: $b = -3$ ، إذن: $f(x) = (x + 3)e^{-x} - 3$.

(ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-2	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\bigcirc$	$-$	
$f(x)$		$e^2 - 3$		

$-\infty \rightarrow \swarrow \quad \searrow \rightarrow -2 \rightarrow \rightarrow -3$

بحيث: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x + 3)e^{-x} - 3] = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x + 3)e^{-x} - 3] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + \frac{3}{e^x} - 3 \right) = -3$$

$$f(-2) = (-2 + 3)e^{-(-2)} - 3 = e^2 - 3$$

(ج) تبيان أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً يُطلب تعيين معادلة له:

بمأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$ ،

فإن: المستقيم ذو المعادلة $y = -3$ (الموازي لمحور الفواصل) مُقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

(د) تبيان أن المعادلة $f(x) = -2$ تقبل في المجال $[0; +\infty[$ حلاً وحيداً α محصور بين 1,50 و 1,52:

▪ لدينا: f مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $[0; +\infty[$ (لأنها متناقصة تماماً على المجال $[-2; +\infty[$)

▪ ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$ ، أي: $-2 \in]-3; 0]$ ، $f(0) = 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = -2$ تقبل في المجال $[0; +\infty[$ حلاً وحيداً α .

وبمأن: $\begin{cases} f(1,50) \simeq -1,996 \\ f(1,52) \simeq -2,011 \end{cases}$ ، أي: (2 - محصور بين $f(1,50)$ و $f(1,52)$)

فإن: $1,50 < \alpha < 1,52$.

(3) لدينا: $F(x) = (-x - 4)e^{-x}$ و $D_F = \mathbb{R}$ ؛ I العدد الحقيقي حيث: $I = \int_{-2}^0 f(x) dx$.

(أ) حساب $F'(x)$: $F'(x) = -1 \times e^{-x} - e^{-x}(-x - 4) = (-1 + x + 4)e^{-x} = (x + 3)e^{-x}$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

بمأن: $F'(x) = (x + 3)e^{-x}$ فإن: F أصلية للدالة $x \mapsto (x + 3)e^{-x}$

وبالتالي: $x \mapsto F(x) - 3x$ هي أصلية للدالة f .

(ب) إعطاء تفسيراً بيانياً للعدد I :

العدد I هو مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما:

$x = 0$ ، $x = -2$.

تبرير الحصر التالي $5 < I < 4$ باعتبارات بيانية مَحْضَة:

(ج) حساب العدد I :

لدينا: $I = \int_{-2}^0 f(x) dx = [(-x - 4)e^{-x} - 3x]_{-2}^0$

ومنه: $I = [(-0 - 4)e^{-0} - 3(0)] - [(-(-2) - 4)e^{-(-2)} - 3(-2)]$

وعليه: $I = -4 - (-2e^2 + 6) = -10 + 2e^2$.

حل التمرين 02: (08 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(1) لدينا: $f(x) = e^{2x} - e^x - x - 2$ و $D_f = \mathbb{R}$

أ. حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$: (علماً أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0$)

▪ لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - e^x - x - 2) = +\infty$ ، لأن: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - 2) = +\infty \end{cases}$

▪ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - e^x - x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{2x} \left(1 - \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^{2x}} - \frac{2}{e^{2x}} \right) \right) = +\infty$

لأن: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{2x}} = 0 \end{cases}$

ب. تبيان أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن f' تحقق: $f'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنّها مجموع دّوال قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وهي:

$$x \mapsto e^{2x} \quad x \mapsto -e^x \quad x \mapsto -x - 2$$

ولدينا: $f'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$ (1)

ولدينا من جهة أخرى: $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^{2x} + e^x - 2e^x - 1 = 2e^{2x} - e^x - 1$ (2)

إذن: $f'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$

ج. دراسة حسب قيم x إشارة $f'(x)$ ثم استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f وتشكيل جدول تغيّراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(e^x - 1)$ لأن: $2e^x + 1 > 0$

$e^x - 1 > 0$ يعني $e^x > 1$ وعليه $x > \ln 1$ أي: $x > 0$

$e^x - 1 = 0$ يعني $e^x = 1$ وعليه $x = \ln 1$ أي: $x = 0$

$e^x - 1 < 0$ يعني $e^x < 1$ وعليه $x < \ln 1$ أي: $x < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+

إذن: f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$ ، ومتزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$f'(x)$		-	○	+	
$f(x)$	$+\infty$		-2		$+\infty$

(2) (C) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ على المجال $]-\infty; 1]$

أ. تبين أن المستقيم (d) الذي معادلته $y = -x - 2$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - e^x) = 0$$

إذن: المستقيم (d) الذي معادلته $y = -x - 2$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (d) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (-x - 2)$ ، لدينا: $f(x) - (-x - 2) = e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1)$

إشارة الفرق $f(x) - (-x - 2)$ من إشارة $(e^x - 1)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	○	+
$f(x) - (-x - 2)$	-	○	+
الوضع النسبي	(C) يقع تحت (d)	(C) يقطع (d)	(C) يقع فوق (d)

ب. تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-2,11 < \alpha < -2,10$ و $0,81 < \beta < 0,82$

وتفسير النتيجة هندسياً:

بالنسبة لـ α :

▪ f مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $]-2,11; -2,10[$ (لأنّها متناقصة تماماً على $]-\infty; 0]$)

ولدينا: $f(-2,11) \simeq 0,00346$ و $f(-2,10) \simeq -0,00746$ أي: $f(-2,11) \times f(-2,10) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-2,11; -2,10[$.

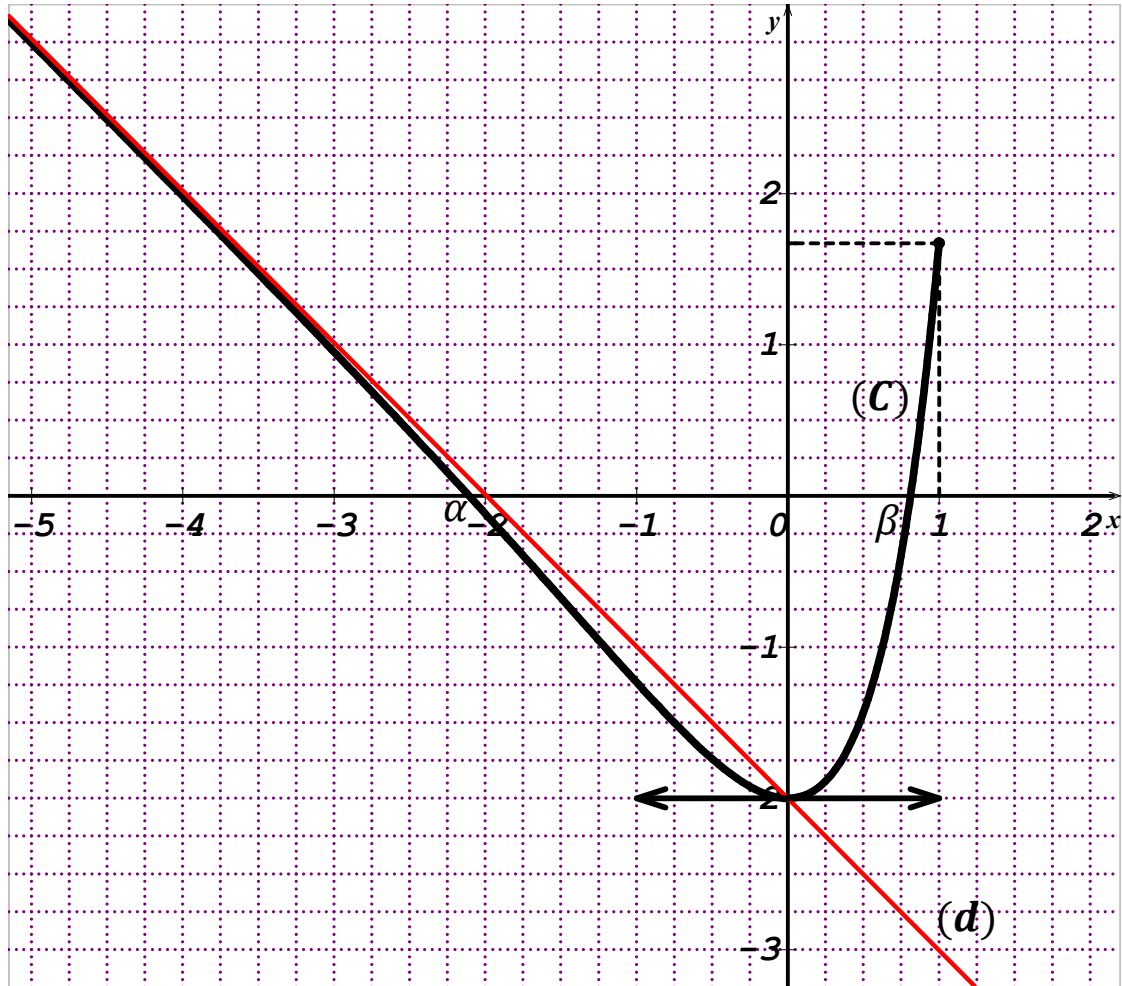
بالنسبة لـ β :

▪ f مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $]0,81; 0,82[$ (لأنّها متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$)

▪ ولدنيا: $\begin{cases} f(0,81) \simeq -0,0048 \\ f(0,82) \simeq 0,0646 \end{cases}$ أي: $f(0,81) \times f(0,82) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً β في المجال $]0,81; 0,82[$.
تفسير النتيجة هندسياً: المنحنى يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما، α و β .

ج. رسم المستقيم (d) والمنحنى (C):



(3) تعيين دالة أصلية F للدالة f على المجال $]-\infty; 1]$:

بمأنّ f مستمرة على المجال $]-\infty; 1]$ ، فإنّها تقبل دوال أصلية من الشكل

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c \quad (c \in \mathbb{R} \text{ حيث})$$

حل التمرين 03: (06 نقاط) بكالكوريا 2012 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدنيا: $f(x) = (x+1)e^{1-x}$ و $D_f = [-1; +\infty[$

(1) تبين أنّ معادلة (Δ) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 هي، $y = -x + 3$:

معادلة (Δ) من الشكل: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

ولدنيا: $\begin{cases} f'(1) = -1e^{1-1} = -1 \\ f(1) = (1+1)e^{1-1} = 2 \end{cases}$ بحيث $f'(x) = 1e^{1-x} - e^{1-x}(x+1) = -xe^{1-x}$

بالتعويض نجد: $y = -(x-1) + 2$ إذن: $(\Delta): y = -x + 3$

(2) لدنيا: $g(x) = -xe^{1-x} + 1$ و $D_g = [-1; +\infty[$

أدراسة اتجاه تغير الدالة g :

g قابلة للاشتقاق على المجال $[-1; +\infty[$ ، ولدينا:

$$g'(x) = -1 \times e^{1-x} - e^{1-x} \times (-x) = (x-1)e^{1-x}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x-1)$

x	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	○	+

إذن: g متناقصة تماما على المجال $[-1; 1]$ ، ومتزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$.

ب- حساب $g(1)$ ، ثم استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $[-1; +\infty[$:

$$g(1) = -(1) \times e^{1-1} + 1 = -1 + 1 = 0$$

وبالتالي: من أجل كل x من المجال $[-1; +\infty[$ ، $g(x) \geq g(1)$ أي: $g(x) \geq 0$.

3) لدينا: $h(x) = (x+1)e^{1-x} + x - 3$ في $D_h = [-1; +\infty[$

ألاحظ أنه من أجل كل x من المجال $[-1; +\infty[$ ، $h(x) = f(x) + x - 3 = f(x) - y_{(\Delta)}$

استنتاج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

من جدول تغيرات الدالة f لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3) = +\infty$ فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

ب- تبين أنه من أجل كل x من المجال $[-1; +\infty[$ ، $h'(x) = g(x)$ ، ثم استنتاج جدول تغيرات الدالة h :

لدينا: $h(x) = f(x) + x - 3$ ومنه: $h'(x) = f'(x) + 1 = -xe^{1-x} + 1 = g(x) \geq 0$

وبالتالي: h متزايدة تماما على المجال $[-1; +\infty[$ ، ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	-1	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	○	+
$h(x)$	-4	○	$+\infty$

بحيث: $h(-1) = f(-1) + (-1) - 3 = 0 - 4 = -4$

ج- التحقق أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-1; +\infty[$ يُطلب تعيينه:

▪ h مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-1; +\infty[$.

▪ ولدينا: $\begin{cases} h(-1) = -4 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty \end{cases}$ أي: $0 \in [-4; +\infty[$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-1; +\infty[$

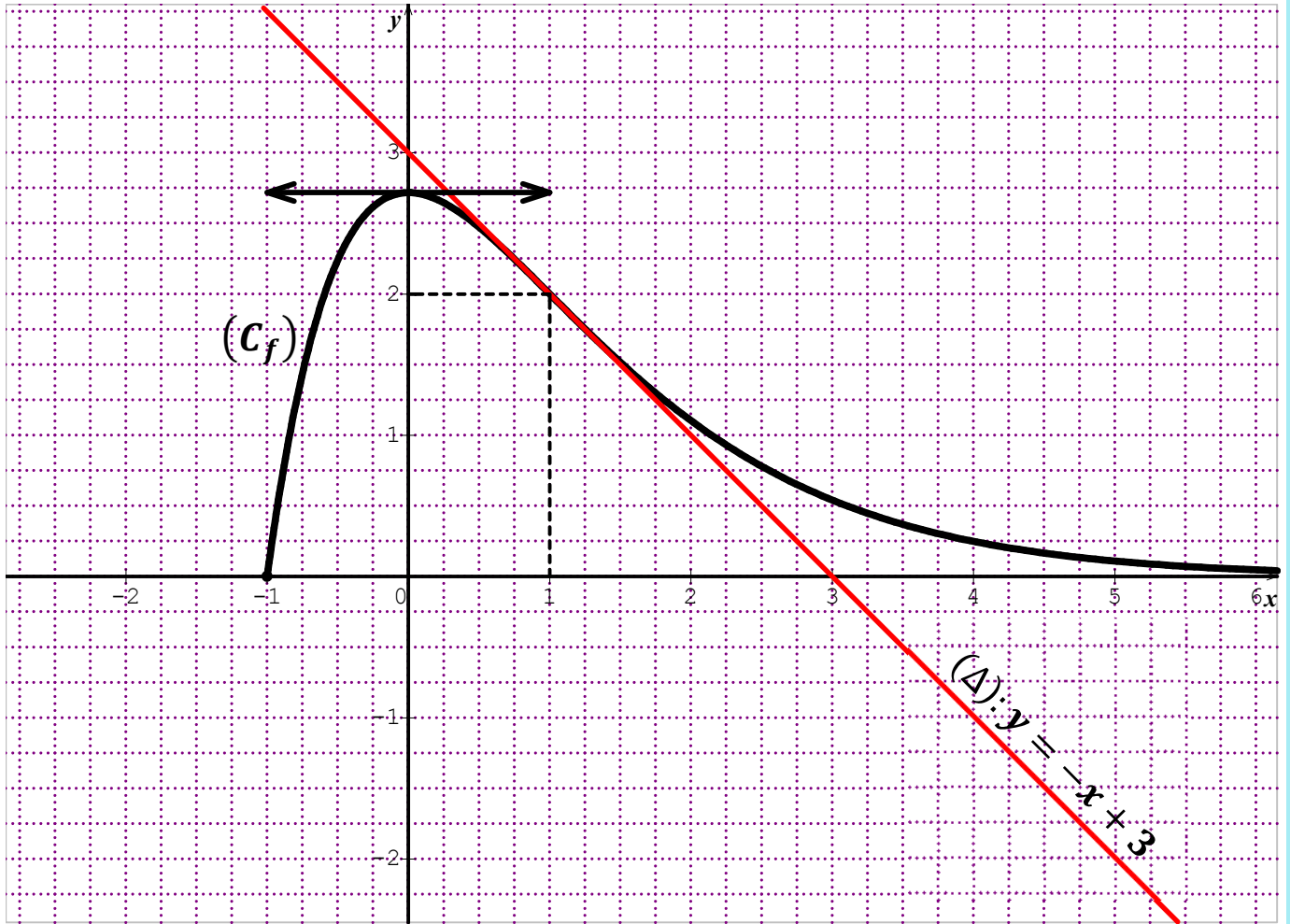
تعيين الحل:

بما أن $h(x) = f(x) - y_{(\Delta)}$ فإن فاصلة نقطة التماس هي الحل، وبالتالي: حل المعادلة $h(x) = 0$ هو $x = 1$.

د- تحديد إشارة $h(x)$ ، ثم استنتاج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

x	-1	1	$+\infty$
$h(x)$	-	○	+
$f(x) - (-x + 3)$	-	○	+
الوضع النسبي	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)

هـ إنشاء كلا من المماس (Δ) والمنحنى (C_f) :



حل التمرين 04: (07 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$ و $D = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

1- أ) حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسياً:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1} \right) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1} \right) = -\infty$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (2x - 1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0^+ \end{cases} \text{ لأن: } \cdot$$

التفسير الهندسي للنتيجة: حامل محور الترتيب مُقارب لـ (C_f) .

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty \end{cases} \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1} \right) = +\infty \quad \blacksquare$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1 \end{cases} \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1} \right) = -\infty \quad \blacksquare$$

2-أ) تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x - 1$ ، مُقارب مائل للمنحنى (C_f) :

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} \right) = 0$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} \right) = -1$$

إذن: المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x - 1$ ، مُقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) التحقق أنه، من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، فإن، $f(x) = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1}$ ، ثم استنتاج أن

المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = 2x - 2$ ، مُقارب مائل للمنحنى (C_f) :

$$\text{لدينا: } f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1} - 1 + 1 = 2x - 2 + \frac{1}{e^x - 1} + 1$$

$$\text{ومنه: } f(x) = 2x - 2 + \frac{1}{e^x - 1} + \frac{e^x - 1}{e^x - 1} = 2x - 2 + \frac{1 + e^x - 1}{e^x - 1} = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$\text{وعليه: } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} \right) = 1$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right) = 0$$

إذن: المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = 2x - 2$ ، مُقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

3-تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، فإن $f'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}$

f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = 2 - \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2(e^x - 1)^2 - e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2(e^{2x} + 1 - 2e^x) - e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2e^{2x} + 2 - 4e^x - e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(2e^{2x} - 5e^x + 2)$

بوضع: $X = e^x$ نجد: $2X^2 - 5X + 2$ (مميزه $\Delta = (-5)^2 - 4(2)(2) = 9 > 0$)

له جذران متمايزان هما، $X' = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5+3}{4} = 2$ و $X'' = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

■ من أجل $X = 2$ معناه: $e^x = 2$ نجد: $x = \ln 2$.

■ من أجل $X = \frac{1}{2}$ معناه: $e^x = \frac{1}{2}$ نجد: $x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$.

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	○	+

إذن: f متزايدة تماماً على كل من المجالين $[-\ln 2; +\infty[$ و $]0; \ln 2]$ ،

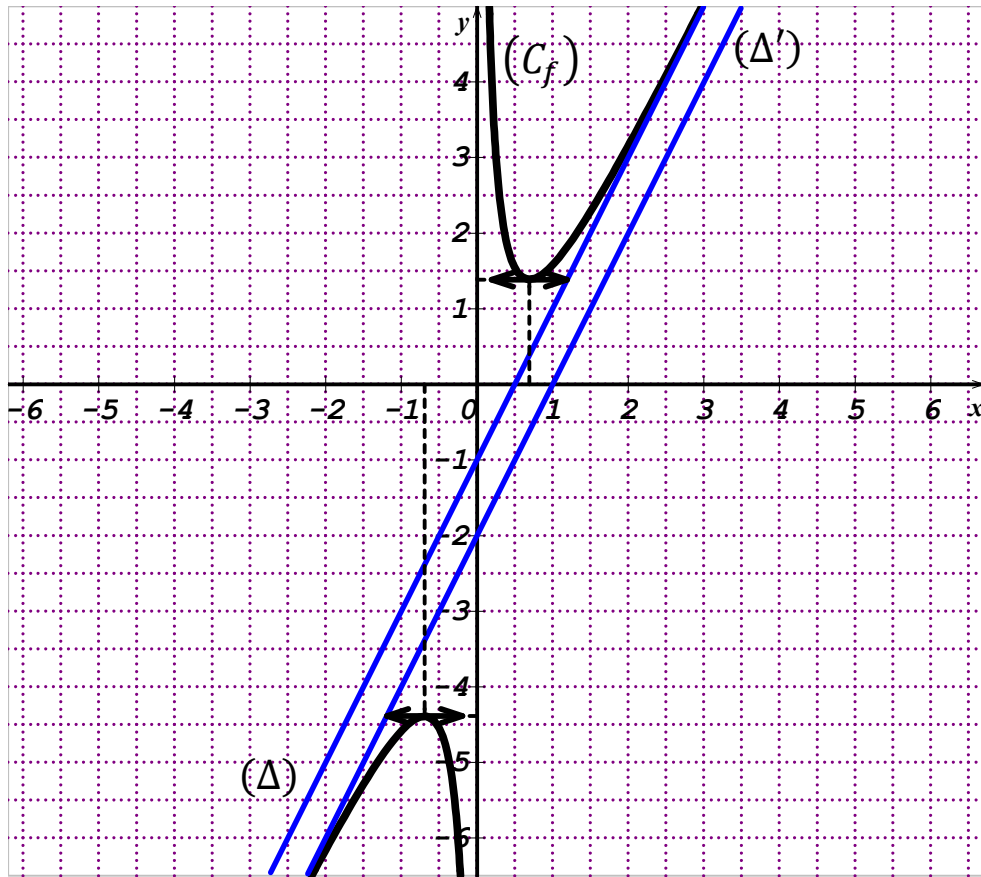
و متناقصة تماماً على المجال $]0; -\ln 2]$ ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$	$-\infty$	$-2 \ln 2 - 3$	$+\infty$	$2 \ln 2$	$+\infty$

حيث: $f(\ln 2) = 2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{e^{\ln 2} - 1} = 2 \ln 2$

$$f(-\ln 2) = 2(-\ln 2) - 1 + \frac{1}{e^{-\ln 2} - 1} = -2\ln 2 - 1 + \frac{1}{\frac{1}{e^{\ln 2}} - 1} = -2\ln 2 - 1 + \frac{1}{\frac{1}{2} - 1} = -2\ln 2 - 3$$

4- تمثيل بيانياً كلاً من (Δ) ، (Δ') و (C_f) :



5- حساب العدد: $\int_1^2 f(x)dx$ ، ثم تفسيره هندسياً:

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}\right) dx = [x^2 - x + \ln(e^x - 1)]_1^2$$

$$\text{ومنه: } \int_1^2 f(x)dx = [2^2 - 2 + \ln(e^2 - 1)] - [1^2 - 1 + \ln(e^1 - 1)]$$

$$\text{وعليه: } \int_1^2 f(x)dx = 2 + \ln(e^2 - 1) - \ln(e - 1) = 2 + \ln(e - 1)(e + 1) - \ln(e - 1)$$

$$\int_1^2 f(x)dx = 2 + \ln(e - 1) + \ln(e + 1) - \ln(e - 1) = [2 + \ln(e + 1)]u.a$$

تفسيره هندسياً: هو مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = 1$ ، $x = 2$ و $y = 0$.

حل التمرين 05: (07 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

$$\text{لدينا: } f(x) = 6(1 - 2x)e^{-x} + 5 \text{ و } D_f = [0; +\infty[$$

$$(1) \text{ حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ ثم تفسير النتيجة هندسياً: (علماً أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \text{)}$$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (6e^{-x} - 12xe^{-x} + 5) = 5$$

التفسير الهندسي للنتيجة: المستقيم ذو المعادلة $y = 5$ (الموازي لمحور الفواصل) مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

f معرفة وقابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = 6[-2e^{-x} + (-e^{-x})(1 - 2x)] = 6e^{-x}(-2 - 1 + 2x) = 6e^{-x}(2x - 3)$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(2x - 3)$ على $[0; +\infty[$.

x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\bigcirc$	+

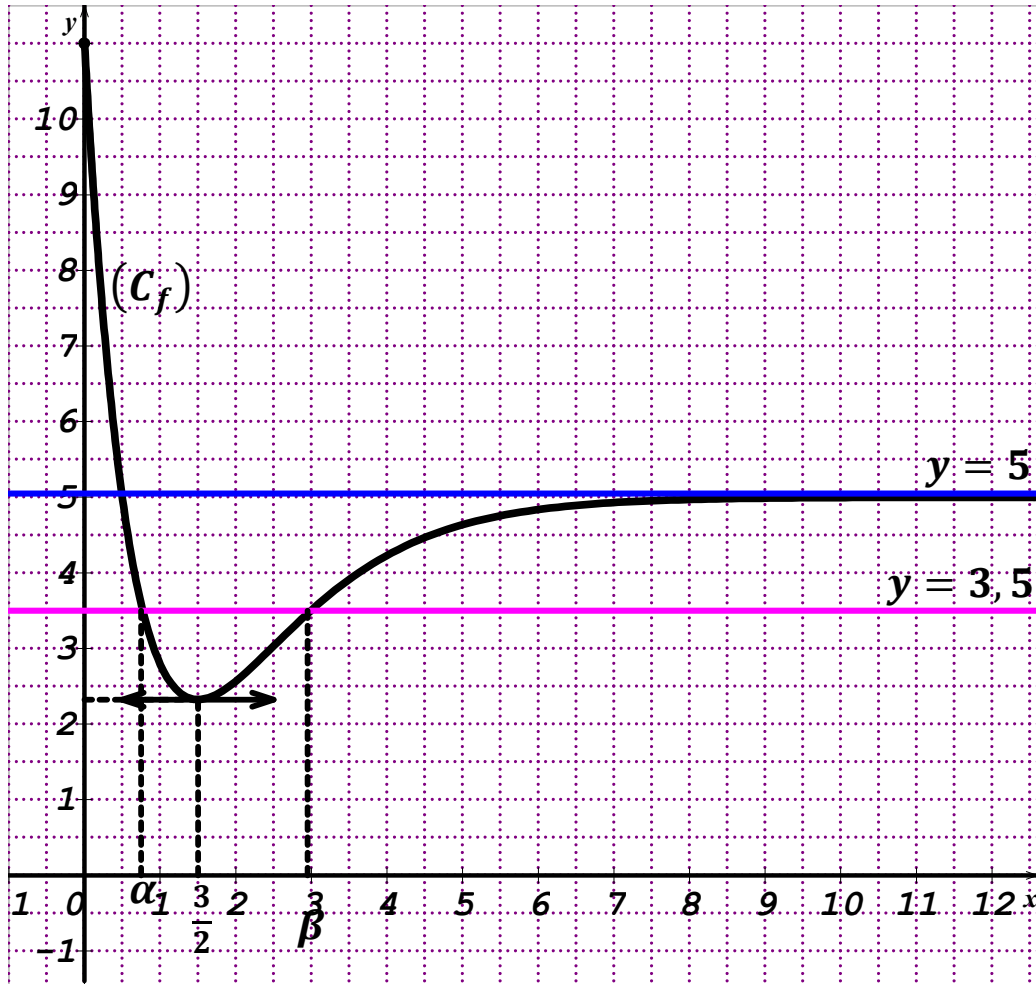
إذن: f متناقصة تماما على $[0; \frac{3}{2}]$ ، ومتزايدة تماما على $[\frac{3}{2}; +\infty[$ ؛

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$	11	$f(\frac{3}{2})$	5

حيث $f(\frac{3}{2}) = -12e^{-\frac{3}{2}} + 5$

(3) إنشاء (C_f) :



(4) إظهار أن المعادلة $f(x) = 3,5$ تقبل في $[0; 7]$ حلين مختلفين α, β حيث: $0,7 < \alpha < 0,8$

و $2,9 < \beta < 3$:

• على المجال $[0; \frac{3}{2}]$.

■ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0; \frac{3}{2}]$ ،

▪ ولدنيا: $\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 11 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2,32 \end{array} \right.$ أي: 3,5 محصور بين $f(0)$ و $f\left(\frac{3}{2}\right)$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 3,5$ تقبل في المجال $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ حلاً وحيداً α .

ولدينا من جهة أخرى: $\left\{ \begin{array}{l} f(0,7) \simeq 3,8 \\ f(0,8) \simeq 3,39 \end{array} \right.$ أي: $f(0,8) < 3,5 < f(0,7)$ إذن: $0,7 < \alpha < 0,8$.

• على المجال $\left[\frac{3}{2}; 7\right]$.

▪ الدالة f مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $\left[\frac{3}{2}; 7\right]$ (لأنها متزايدة تماماً على المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$).

▪ ولدنيا: $\left\{ \begin{array}{l} f\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2,32 \\ f(7) \simeq 4,93 \end{array} \right.$ أي: 3,5 محصور بين $f\left(\frac{3}{2}\right)$ و $f(7)$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 3,5$ تقبل في المجال $\left[\frac{3}{2}; 7\right]$ حلاً وحيداً β .

ولدينا من جهة أخرى: $\left\{ \begin{array}{l} f(2,9) \simeq 3,42 \\ f(3) \simeq 3,5 \end{array} \right.$ أي: $f(2,9) < 3,5 < f(3)$ إذن: $2,9 < \beta < 3$.

(ب) حل بيانياً في المجال $[0; 7]$ المتراجحة، $f(x) \leq 3,5$:

حلول المتراجحة، $f(x) \leq 3,5$ بيانياً في المجال $[0; 7]$ هي فواصل نقط (C_f) الواقعة تحت المستقيم

ذو المعادلة $y = 3,5$ مع فواصل نقط التقاطع؛ من البيان: $S = [\alpha; \beta]$.

(5أ) تعيين العددين الحقيقيين a ، b بحيث تكون الدالة g المعرفة على $[0; 7]$ بـ: $g(x) = (ax + b)e^{-x}$

دالة أصلية للدالة h المعرفة على $[0; 7]$ بـ: $h(x) = 6(1 - 2x)e^{-x}$.

g دالة أصلية للدالة h على المجال $[0; 7]$ معناه: $g'(x) = h(x) \dots (*)$

لدينا: $g'(x) = ae^{-x} + (-e^{-x})(ax + b) = (a - b - ax)e^{-x}$

(*) تُصبح $(a - b - ax)e^{-x} = (6 - 12x)e^{-x}$ ومنه: $\begin{cases} a - b = 6 \\ -a = -12 \end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases} b = 6 \\ a = 12 \end{cases}$

إذن: $g(x) = (12x + 6)e^{-x}$.

(ب) استنتاج دالة أصلية للدالة f على $[0; 7]$:

بمأن: $f(x) = h(x) + 5$ فإن: $F(x) = g(x) + 5x$ ، حيث F دالة أصلية لـ f على المجال $[0; 7]$.

(II) الكلفة الهامشية C_M لصناعة كمية x (مقدرة بالطن) من منتج، حيث x ينتمي إلى المجال $[0; 7]$ تُنمذج بالدالة f أي: $C_M(x) = f(x)$ (الكلفة مقدرة بملايين الدينار).

(1) تحديد كمية المنتج بحيث تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن، وقيمة هذه الكلفة: (تدور النتيجة إلى 10^{-2})

لدينا: الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى من أجل $x = \frac{3}{2}$ ، قيمتها $f\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2,32$.

ومنه: كمية المنتج بحيث تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن هي 1,5 طن، وقيمة هذه الكلفة هي 2,32 مليون دينار.

(2) كميات المنتج التي من أجلها لا تتجاوز الكلفة الهامشية 3,5 مليون دينار:

لدينا: حلول المتراجحة $f(x) \leq 3,5$ ، في المجال $[0; 7]$ هي x حيث: $x \in [\alpha; \beta]$.

ومنه: كميات المنتج التي من أجلها لا تتجاوز الكلفة الهامشية 3,5 مليون دينار، هي x حيث: $x \in [\alpha; \beta]$.

(3) نُذكر أن دالة الكلفة الإجمالية دالة أصلية لدالة الكلفة الهامشية

(أ) تبين أن الكلفة الإجمالية C_T معرفة بـ: $C_T(x) = (12x + 6)e^{-x} + 5x + k$ حيث k عدد حقيقي:

لدينا: $C_T'(x) = 12e^{-x} + (12x + 6)(-e^{-x}) + 5 = (12 - 12x - 6)e^{-x} + 5$

ومنه: $C_T'(x) = 6(1 - 2x)e^{-x} + 5 = f(x) = C_M(x)$
 إذن: الكلفة الإجمالية C_T معرفة بـ، $C_T(x) = (12x + 6)e^{-x} + 5x + k$ حيث k عدد حقيقي.
 ب) تحديد قيمة k إذا علماً أن المصاريف الثابتة 2 مليون دينار (أي $C_T(0) = 2$):
 نضع: $C_T(0) = 2$ نجد: $6 + k = 2$ ومنه: $k = -4$
 إذن: قيمة k إذا علماً أن المصاريف الثابتة 2 مليون دينار هي -4.

حل التمرين 06: (09 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: $f(x) = \frac{4e^{-x}}{e^{-x}+1} - 3$ و $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
 (1) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا، $f(x) = \frac{4}{e^{x+1}} - 3$
 من أجل كل عدد حقيقي x لدينا، $f(x) = \frac{4e^{-x}}{e^{-x}+1} - 3 = \frac{4e^{-x}}{e^{-x}(1+\frac{1}{e^x})} - 3 = \frac{4}{e^{x+1}} - 3$
 ب) حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ؛ ثم تفسير النتيجة هندسياً:
 لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{e^{x+1}} - 3 \right) = 4 - 3 = 1$
 و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 1) = +\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{e^{x+1}} - 3 \right) = -3$
 التفسير الهندسي للنتيكتين:

المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ (الموازي لمحور الفواصل) مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$.
 والمستقيم ذو المعادلة $y = -3$ (الموازي لمحور الفواصل) مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:
 $f'(x) = 4 \left(\frac{-e^x}{(e^{x+1})^2} \right) = \frac{-4e^x}{(e^{x+1})^2} < 0$ ولدينا: $\mathbb{R}$
 وبالتالي: f متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$ ، ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	1	-3

(3) إيجاد فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل: (نحل المعادلة $f(x) = 0$)

$$f(x) = 0 \text{ تكافئ: } \frac{4}{e^{x+1}} - 3 = 0$$

$$\text{ومنه: } \frac{4-3(e^{x+1})}{e^{x+1}} = 0$$

$$\text{وعليه: } \frac{-3e^{x+1}+4}{e^{x+1}} = 0$$

$$\text{ومنه: } -3e^{x+1} + 4 = 0 \text{ و } e^x + 1 \neq 0 \text{ إذن: } x = \ln \frac{1}{3} = -\ln 3$$

ب) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $\Omega(0; -1)$:

معادلة (T) من الشكل $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$\text{ولدينا: } \begin{cases} f'(0) = \frac{-4e^0}{(e^0+1)^2} = \frac{-4}{4} = -1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \text{ ترتيب } \Omega$$

$$\text{إذن: } (T): y = -x - 1$$

ج) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا، $f(-x) + f(x) = -2$ ثم استنتاج أن (C_f) يقبل مركز تناظر:

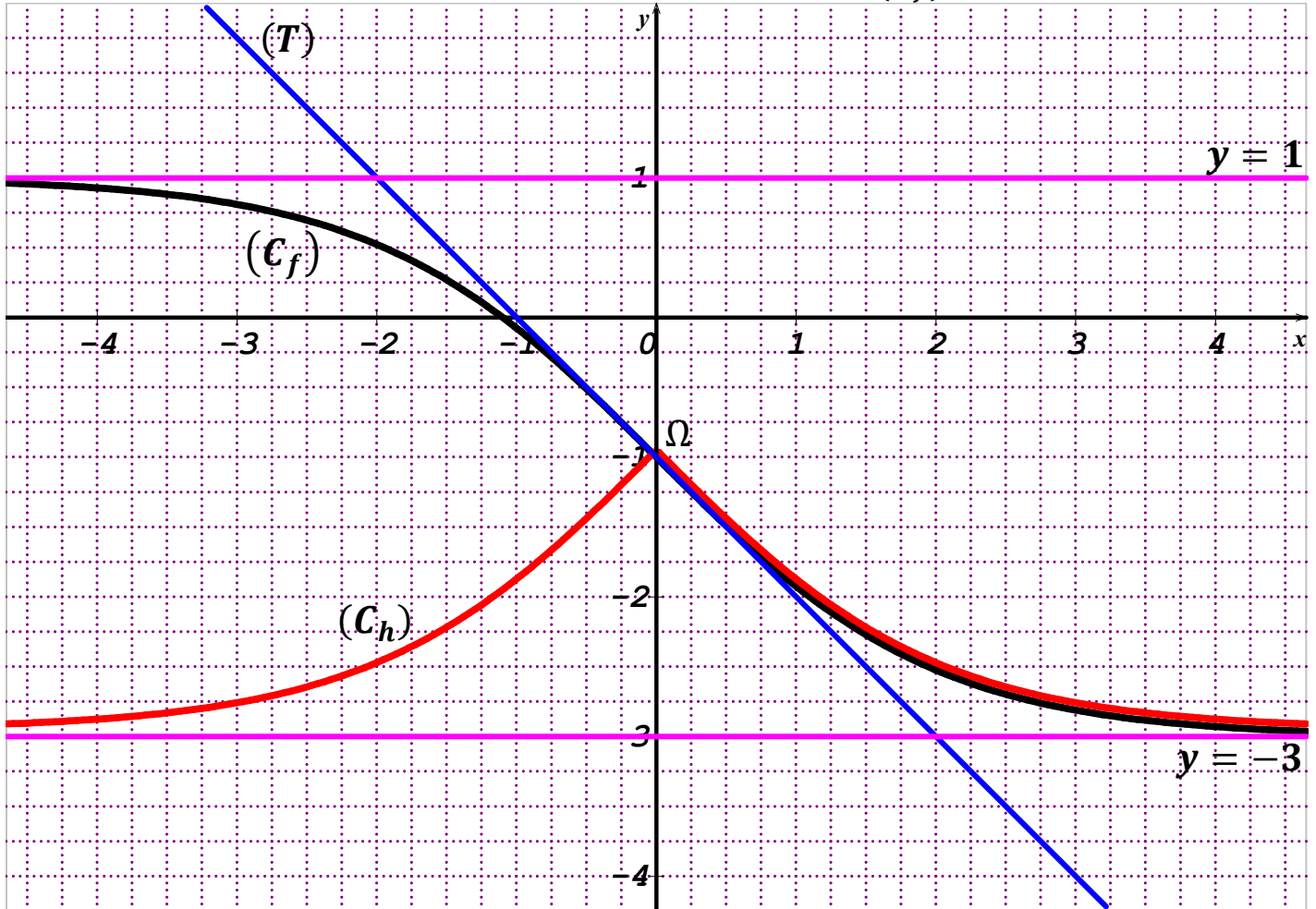
$$f(-x) = \frac{4e^{-(-x)}}{e^{-(-x)+1}} - 3 = \frac{4e^x}{e^{x+1}} - 3 \text{ و } f(x) = \frac{4}{e^{x+1}} - 3$$

$$f(-x) + f(x) = \left(\frac{4e^x}{e^{x+1}} - 3\right) + \left(\frac{4}{e^{x+1}} - 3\right) = \frac{4(e^x+1)}{e^{x+1}} - 6 = 4 - 6 = -2$$

استنتاج أن (C_f) يقبل مركز تناظر:

لدينا: $f(-x) + f(x) = -2$ من الشكل $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$ حيث $\alpha = 0$ و $\beta = -1$.
إذن: النقطة $\Omega(0; -1)$ هي مركز تناظر لـ (C_f) .

(د) رسم المماس (T) والمنحنى (C_f) في نفس المعلم:



4) حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين التي معادلاتها: $x = -\ln 3$, $x = 0$ و $y = 0$:

$$A = \int_{-\ln 3}^0 -f(x) dx = \int_{-\ln 3}^0 \left(\frac{4(-e^{-x})}{e^{-x+1}} + 3\right) dx$$

$$A = [4 \ln(e^{-x} + 1) + 3x]_{-\ln 3}^0 = (4 \ln 2) - (4 \ln 4 - 3 \ln 3)$$

$$A = (-4 \ln 2 + 3 \ln 3) u. a$$

(5) لدينا: $h(x) = f(|x|)$ و $D_h = \mathbb{R}$ و (C_h) منحناها البياني في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(أ) تبين أن h دالة زوجية:

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ ولدينا: $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$.
إذن: h دالة زوجية.

(ب) اعتماداً على المنحنى (C_f) ، شرح كيف يتم رسم المنحنى (C_h) ثم رسمه في نفس المعلم السابق:

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x); & x \geq 0 \\ f(-x); & x \leq 0 \end{cases}$$

(C_h) يكون منطبق على (C_f) على المجال $[0; +\infty[$ ، ونرسم الجزء المتبقي من (C_h) على المجال $]-\infty; 0]$ بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب، لأن: h دالة زوجية.

حل التمرين 07: (04 نقاط) بكالوريا 2016 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: $D_f = \mathbb{R}$ و $f(x) = e^x + 2e^{-x} - 3$.

اختيار الجواب الصحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة مع التعليل:

1/ الإجابة الصحيحة هي الإجابة أ)،

لأن: لدينا: $f(x) = 0$ تكافئ: $e^x + 2e^{-x} - 3 = 0$

أي: $e^x + \frac{2}{e^x} - 3$

ومنه: $\frac{e^{2x} + 2 - 3e^x}{e^x} = 0$

وعليه: $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

وبوضع: $X = e^x$ نجد: $X^2 - 3X + 2 = 0$ (*) نحسب المميز Δ : $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$

ومنه: $X' = \frac{3+1}{2} = 2$ و $X'' = \frac{3-1}{2} = 1$ وبالعودة إلى الوضع نجد: $e^x = 2$ و $e^x = 1$

إذن: $S = \{0; \ln 2\}$.

2/ الإجابة الصحيحة هي الإجابة ب)،

التعليل: بمأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3/ الإجابة الصحيحة هي الإجابة أ)،

التعليل: f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x) = e^x - 2e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - 2)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(e^{2x} - 2)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\bigcirc$	+

إذن: على المجال $\left[\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right]$ الدالة f متزايدة تماماً.

4/ الإجابة الصحيحة هي الإجابة أ)، التعليل:

لدينا: $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (e^x + 2e^{-x} - 3) dx = \frac{1}{2} [e^x - 2e^{-x} - 3x]_0^2$ إذن: $m \simeq 1$.

حل التمرين 08: (08 نقاط) بكالوريا 2017 د 01 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ و $f(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{e^x - 1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) حساب النهايات، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وتفسير بيانيا النتائج المحصل عليها:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{e^x - 1} \right) = 1$ لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{e^x - 1} \right) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{e^x - 1} \right) = -\infty$

لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0^-$ و $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0^+$ و $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$

التفسير البياني للنتائج المُحصل عليها:

المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ (الموازي لمحور الفواصل) مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$ ، ومحور الترتيب مقارب لـ (C_f) .

(ب) حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$(2) \text{ أ) تبيان أنه من أجل كل } x \text{ من } D_f: f'(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{e^x}{(e^x-1)^2}$$

f معرفة وقابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^x - \left(\frac{-e^x}{(e^x-1)^2} \right) = \frac{1}{2}e^x + \frac{e^x}{(e^x-1)^2}$$

(ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

$$\text{لدينا: } f'(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{e^x}{(e^x-1)^2} > 0$$

إذن: f متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$ ، ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1		

Diagram showing arrows indicating increasing behavior: from 1 to $+\infty$ on the left, and from $-\infty$ to $+\infty$ on the right.

(3) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 1$:

ندرس إشارة الفرق $f(x) - 1$ على D_f .

$$\text{لدينا: } f(x) - 1 = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{e^x-1} - 1 = \frac{e^x(e^x-1)-2-2(e^x-1)}{2(e^x-1)} = \frac{e^x(e^x-1)-2e^x}{2(e^x-1)} = \frac{e^x(e^x-3)}{2(e^x-1)}$$

إشارة الفرق $f(x) - 1$ من إشارة الجداء $(e^x - 3)(e^x - 1)$

x	$-\infty$	0	$\ln 3$	$+\infty$
$e^x - 1$	-		+	
$e^x - 3$	-		-	+
$f(x) - 1$	+		-	+
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)

(4) تعيين معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 3$:

معادلة (T) من الشكل $y = f'(\ln 3)(x - \ln 3) + f(\ln 3)$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} f'(\ln 3) = \frac{1}{2}e^{\ln 3} + \frac{e^{\ln 3}}{(e^{\ln 3}-1)^2} = \frac{9}{4} \\ f(\ln 3) = \frac{1}{2}e^{\ln 3} - \frac{1}{e^{\ln 3}-1} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{إذن: } (T): y = \frac{9}{4}x - \frac{9}{4}\ln 3 + 1$$

(5) لدينا: $g(x) = f(x) - \frac{9}{4}(x - \ln 3) - 1$ و $D_g =]0; +\infty[$.

نلاحظ أنّ: $g(x) = f(x) - \left(\frac{9}{4}x - \frac{9}{4}\ln 3 + 1\right) = f(x) - y_{(T)}$.

(أ) حساب $g(\ln 3)$ واستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

لدينا: $g(\ln 3) = f(\ln 3) - \frac{9}{4}(\ln 3 - \ln 3) - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$

بمّا g متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$ و $g(\ln 3) = 0$ فإنّ إشارة $g(x)$ هي كالتالي:

x	0	$\ln 3$	$+\infty$
$g(x)$		-	+

(ب) دراسة على المجال $]0; +\infty[$ وضعيّة (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) ، ثمّ تفسير ذلك بيانياً:

لدينا: من أجل $x \in]0; \ln 3[$ ، $g(x) < 0$ أي: $f(x) - y_{(T)} < 0$ إذن: (C_f) يقع تحت (T) .

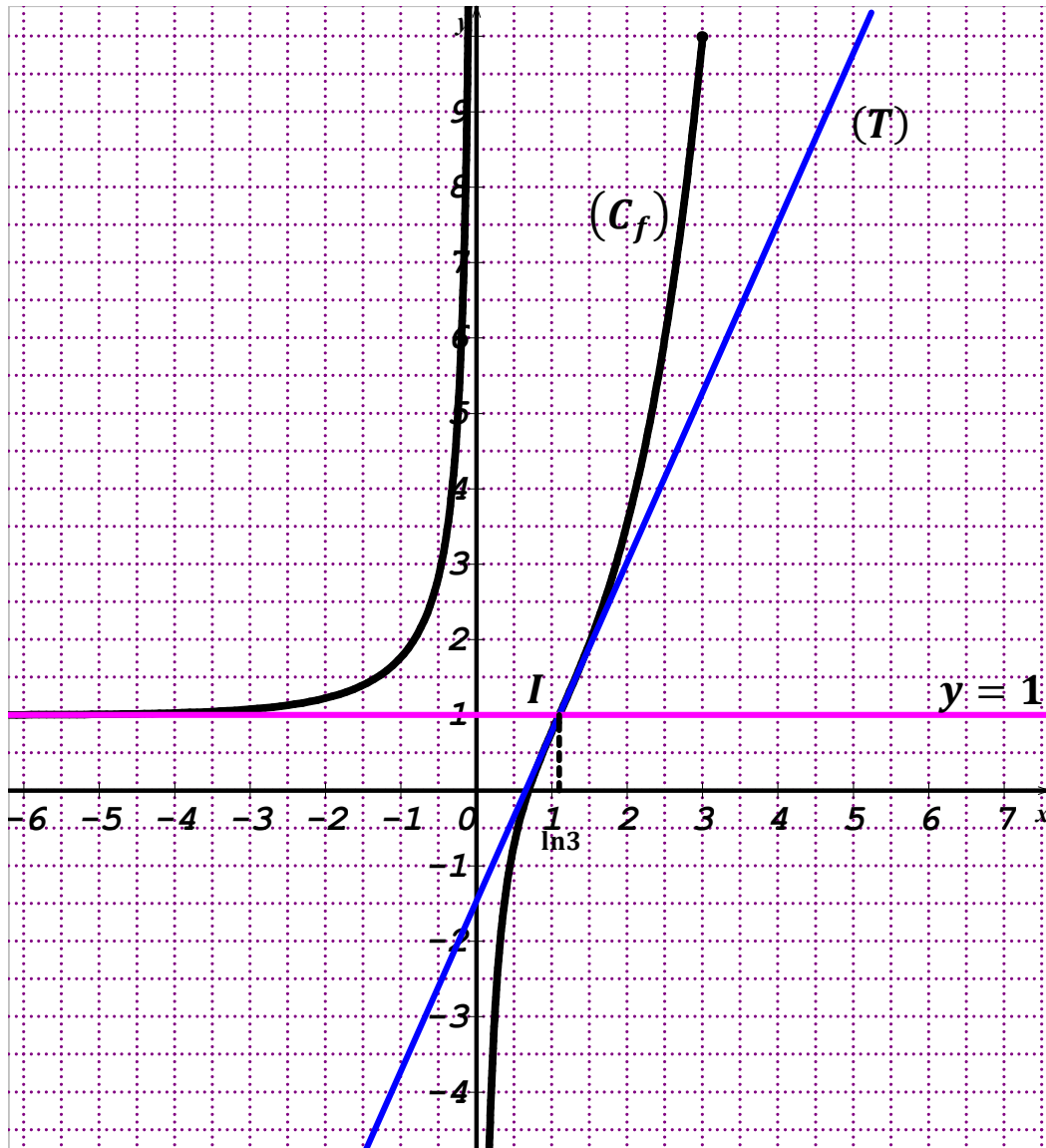
و من أجل $x = \ln 3$ ، $g(x) = 0$ أي: $f(x) - y_{(T)} = 0$ إذن: (C_f) يقطع (T) .

و من أجل $x \in]\ln 3; +\infty[$ ، $g(x) > 0$ أي: $f(x) - y_{(T)} > 0$ إذن: (C_f) يقع فوق (T) .

التفسير البياني: (C_f) يقبل نقطة انعطاف $I(\ln 3; 1)$.

(6) حساب $f(\ln 2)$ ثمّ رسم المماس (T) و (C_f) على المجال $] -\infty; 0[\cup]0; 3]$:

لدينا: $f(\ln 2) = \frac{1}{2}e^{\ln 2} - \frac{1}{e^{\ln 2}-1} = \frac{2}{2} - \frac{1}{1} = 0$



حل التمرين 09: (08 نقاط) بكالوريا 2017_02 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإ.

(I) لدينا: $g(x) = 2x - 1 - e^{2x}$ و $D_g = \mathbb{R}$

(1) دراسة اتجاه تغيّر الدالة g :

g معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $g'(x) = 2 - 2e^{2x} = 2(1 - e^{2x})$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(1 - e^{2x})$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	○	-

إذن: g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ ومتناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

(2) استنتاج إشارة $g(x)$:

لدينا: $g(0) = 2(0) - 1 - e^{2(0)} = -2$ ، بالتالي: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g(x) \leq g(0)$

أي: $g(x) \leq -2$ إذن: $g(x) < 0$

(II) لدينا: $f(x) = x^2 - x - \frac{1}{2}e^{2x}$ و $D_f = \mathbb{R}$

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، $\|\vec{i}\| = 2cm$.

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: (علماً أنّ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2} = +\infty$)

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ لأنّ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x}) = 0$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ لأنّ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \times \frac{e^{2x}}{x^2} \right) \right] = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} \times \frac{e^{2x}}{x^2} \right) = -\infty$

(2) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f ثم تشكيل جدول تغيّراتها:

f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $f'(x) = 2x - 1 - e^{2x} = g(x) < 0$

إذن: f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ، ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

(3) أ) تبيان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,25 < \alpha < -0,24$:

f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-0,25; -0,24[$ (لأنّها متناقصة تماما على $\mathbb{R}$)

ولدينا: $\begin{cases} f(-0,25) \simeq 0,01 \\ f(-0,24) \simeq -0,01 \end{cases}$ أي: $f(-0,25) \times f(-0,24) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,25 < \alpha < -0,24$.

ب) إثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A إحداثياتها $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$:

لدينا: $f''(x) = g'(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	○	-

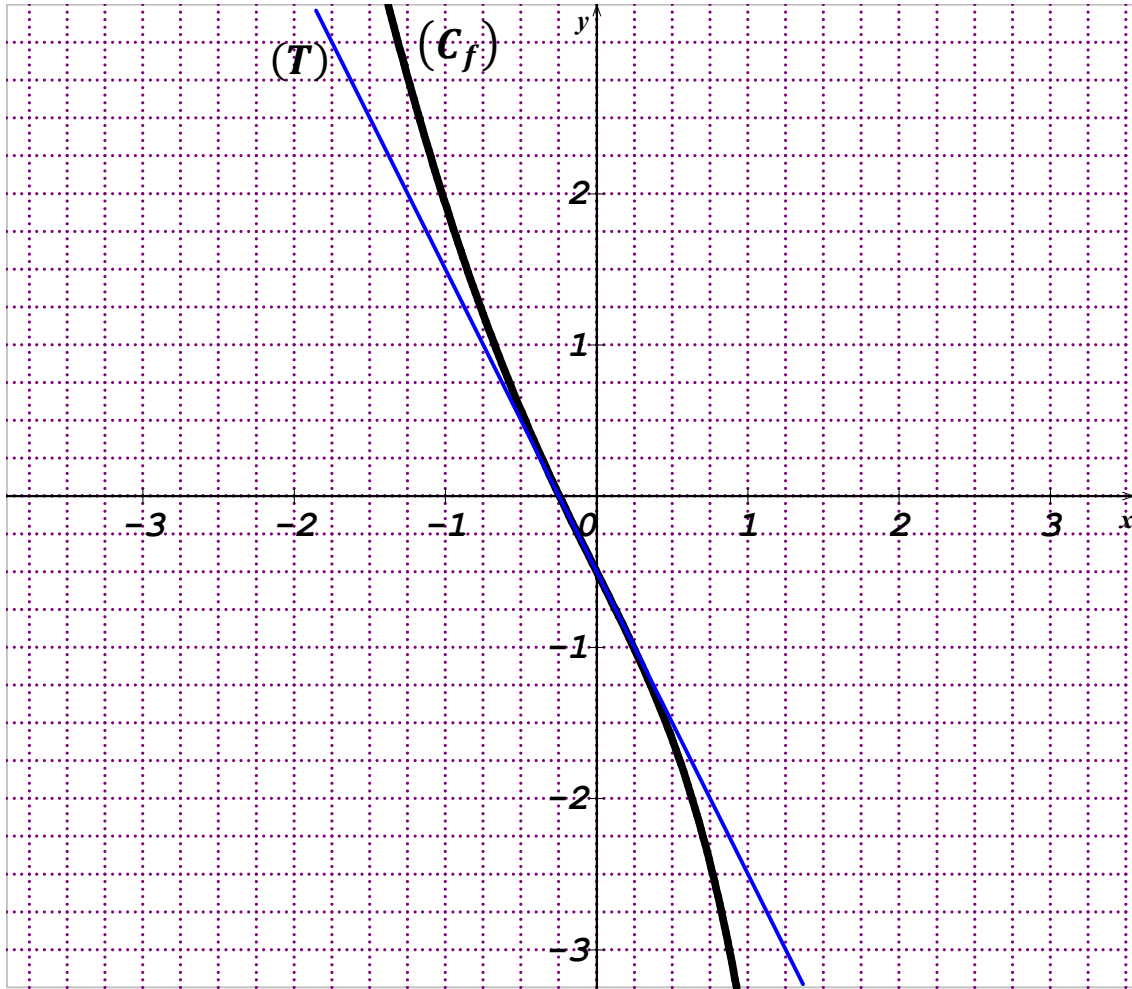
نلاحظ أنّ: $f''(x)$ انعدمت عند 0 مغيرة إشارتها، إذن: (C_f) يقبل نقطة انعطاف $A(0; f(0))$ أي: $A(0; \frac{-1}{2})$.

ج) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة A :

معادلة (T) من الشكل $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$\text{ولدينا: ترتيب } A \begin{cases} f'(0) = g(0) = -2 \\ f(0) = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ إذن: } (T): y = -2x - \frac{1}{2}$$

4) رسم (T) و (C_f) :



5) أ) حساب بالسنتيمتر مربع المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها

$$x = 0, x = \alpha, \text{ و } y = 0$$

بمأنّ: الدّالة f مستمرة وسالبة على المجال $[\alpha; 0]$ فإنّ:

$$A(\alpha) = \left(\int_{\alpha}^0 -f(x) dx \right) \times 4cm^2 = \left(\int_{\alpha}^0 \left(-x^2 + x + \frac{1}{2}e^{2x} \right) dx \right) \times 4cm^2$$

$$A(\alpha) = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}e^{2x} \right]_{\alpha}^0 \times 4cm^2 = \left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{4}e^{2\alpha} \right) \right) \times 4cm^2 \text{ ومنه:}$$

$$A(\alpha) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{4}e^{2\alpha} \right) \times 4cm^2 = \left(1 + \frac{4}{3}\alpha^3 - 2\alpha^2 - e^{2\alpha} \right) cm^2 \text{ وعليه:}$$

$$\text{ب) التحقق أنّ } A(\alpha) = \frac{1}{3}(4\alpha^3 - 12\alpha^2 + 6\alpha + 3)cm^2$$

$$\text{لدينا: } f(\alpha) = 0 \text{ يعني: } \alpha^2 - \alpha - \frac{1}{2}e^{2\alpha} = 0 \text{ ومنه: } \alpha^2 - \alpha = \frac{1}{2}e^{2\alpha} \text{ أي: } 2\alpha^2 - 2\alpha = e^{2\alpha}$$

$$\text{وبالتالي: } A(\alpha) = \left(1 + \frac{4}{3}\alpha^3 - 2\alpha^2 - e^{2\alpha} \right) cm^2 = \left(1 + \frac{4}{3}\alpha^3 - 2\alpha^2 - (2\alpha^2 - 2\alpha) \right) cm^2$$

ومنه: $A(\alpha) = \left(1 + \frac{4}{3}\alpha^3 - 2\alpha^2 - 2\alpha^2 + 2\alpha\right) \text{cm}^2 = \left(1 + \frac{4}{3}\alpha^3 - 4\alpha^2 + 2\alpha\right) \text{cm}^2$
 إذن: $A(\alpha) = \frac{1}{3}(4\alpha^3 - 12\alpha^2 + 6\alpha + 3) \text{cm}^2$ (وهو المطلوب).

حل التمرين 10: (08 نقاط) بكالوريا 2018 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(I) لدينا: $g(x) = 2x + 6 - e^{2x+1}$ و $D_g =]-\infty; 0]$

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$:

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 6) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x+1} = 0$ فإن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-\infty; 0]$ ثم تشكيل جدول تغيراتها:

g معرفة وقابلة للاشتقاق على $]-\infty; 0]$ ، ولدينا: $g'(x) = 2 - 2e^{2x+1} = 2(1 - e^{2x+1})$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(1 - e^{2x+1})$ لأن: $2 > 0$

$1 - e^{2x+1} > 0$ يعني $-e^{2x+1} > -1$ وعليه $e^{2x+1} < 1$ ويكون $2x + 1 < 0$ أي: $x < -\frac{1}{2}$

$1 - e^{2x+1} = 0$ يعني $-e^{2x+1} = -1$ وعليه $e^{2x+1} = 1$ ويكون $2x + 1 = 0$ أي: $x = -\frac{1}{2}$

$1 - e^{2x+1} < 0$ يعني $-e^{2x+1} < -1$ وعليه $e^{2x+1} > 1$ ويكون $2x + 1 > 0$ أي: $0 \geq x > -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0
$g'(x)$	+	$\bigcirc$	-

إذن: g متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; -\frac{1}{2}]$ ، ومتناقصة تماماً على المجال $[-\frac{1}{2}; 0]$.

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$	α	$-\frac{1}{2}$	0
$g'(x)$	+	+	$\bigcirc$	-
$g(x)$	$-\infty$	4	4	$6 - e$

(2) أ) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-3 < \alpha < -2,9$:

■ g مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]-3; -2,9[$ (لأنها متزايدة تماماً على $]-\infty; -\frac{1}{2}]$)

■ ولدينا: $\begin{cases} g(-3) \simeq -0,007 \\ g(-2,9) \simeq 0,192 \end{cases}$ أي: $g(-3) \times g(-2,9) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-3 < \alpha < -2,9$.

(ب) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty; 0]$:

x	$-\infty$	α	0
$g(x)$	-	$\bigcirc$	+

(II) لدينا: $f(x) = -2x^2 - 12x + e^{2x+1}$ و $D_f =]-\infty; 0]$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

حيث الوحدة على محور الفواصل 1cm وعلى محور الترتيب $0,5 \text{cm}$.

(1) اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0]$ ، $f'(x) = -2g(x)$:
 f معرفة وقابلة للاشتقاق على $]-\infty; 0]$ ، ولدينا:

$$f'(x) = -4x - 12 + 2e^{2x+1} = -2(2x + 6 - e^{2x+1}) = -2g(x)$$

(2) استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty; 0]$:

لدينا: $f'(x) = -2g(x)$ ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

x	$-\infty$	α	0
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-

إذن: f متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha]$ ، ومتناقصة تماماً على المجال $[\alpha; 0]$.

(3) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

بمأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ فإن: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 - 12x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x+1} = 0 \end{cases}$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	0
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	e

(4) تبين أن $f(\alpha) = -2\alpha(\alpha + 5) + 6$:

لدينا: $f(\alpha) = -2\alpha^2 - 12\alpha + e^{2\alpha+1}$ ■

ولدينا من جهة أخرى $g(\alpha) = 0$ أي: $2\alpha + 6 - e^{2\alpha+1} = 0$ وعليه: $e^{2\alpha+1} = 2\alpha + 6$ ■

وبالتالي: $f(\alpha) = -2\alpha^2 - 12\alpha + 2\alpha + 6 = -2\alpha^2 - 10\alpha + 6 = -2\alpha(\alpha + 5) + 6$

اعطاء حصراً للعدد $f(\alpha)$:

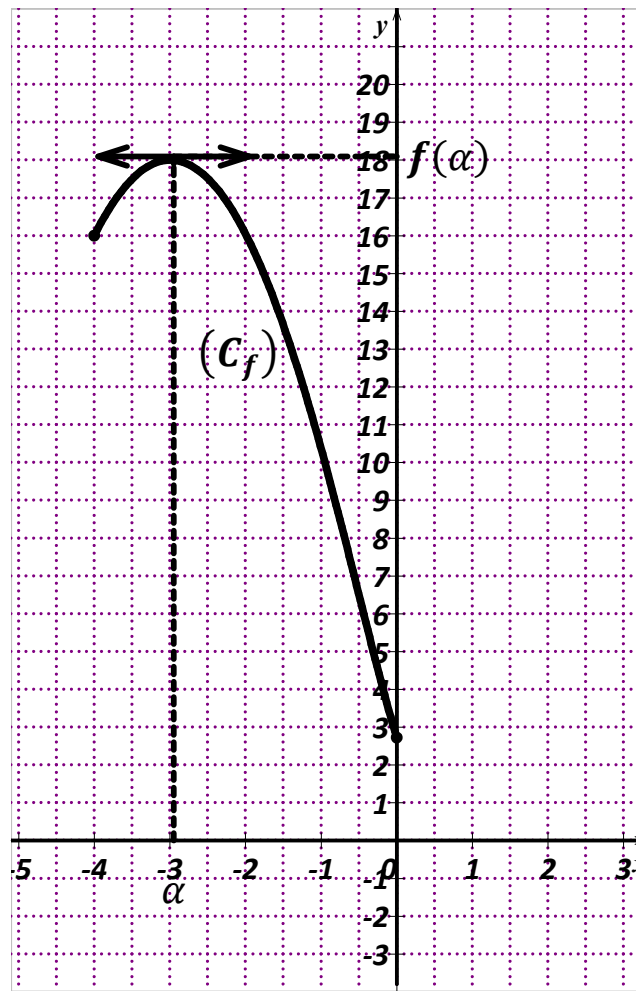
$$\begin{cases} 5,8 < -2\alpha < 6 \\ -3 < \alpha < -2,9 \end{cases} \text{ ولدينا: ومنه: } \begin{cases} 2 < \alpha + 5 < 2,1 \\ 11,6 < -2\alpha(\alpha + 5) < 12,6 \end{cases}$$

وعليه: $11,6 < -2\alpha(\alpha + 5) < 12,6$

ويكون: $17,6 < -2\alpha(\alpha + 5) + 6 < 18,6$

أي: $17,6 < f(\alpha) < 18,6$

رسم (C_f) على المجال $[-4; 0]$:



(5) حساب بدلالة α التكامل، $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^0 f(x) dx$ ثم تفسير النتيجة بيانياً:

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^0 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^0 (-2x^2 - 12x + e^{2x+1}) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{3}x^3 - 6x^2 + \frac{1}{2}e^{2x+1} \right]_{\alpha}^0$$

$$\text{ولدينا: } \frac{1}{2} \int_{\alpha}^0 f(x) dx = \frac{1}{4}e + \frac{1}{3}\alpha^3 + 3\alpha^2 - \frac{1}{4}e^{2\alpha+1}$$

تفسير النتيجة بيانياً: هي نصف مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = \alpha$ ؛ $x = 0$ و $y = 0$.

حل التمرين 11: (07 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(I) لدينا: $g(x) = 1 + (1 - x)e^{-x+1}$ و $D_g = [0; +\infty[$

دراسة اتجاه تغير الدالة g ثم تبين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ؛ $g(x) > 0$:

g معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$g'(x) = -e^{-x+1} + (-e^{-x+1})(1 - x) = e^{-x+1}(-1 - (1 - x)) = e^{-x+1}(-2 + x)$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x - 2)$ على $[0; +\infty[$.

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	○	+

إذن: g متناقصة تماماً على المجال $[0; 2]$ و متزايدة تماماً على المجال $[2; +\infty[$.

نلاحظ أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $g(x) \geq g(2)$ ، (لأن $g(2) = 1 - \frac{1}{e}$ قيمة حدية صغرى لـ g)

أي: $g(x) \geq 1 - \frac{1}{e} > 0$ إذن: $g(x) > 0$.

(II) لدينا: $f(x) = x + xe^{-x+1}$ و $D_f = [0; +\infty[$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أ. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى (C_f) :

■ لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x(1 + e^{-x+1})) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x(1 + e^{-x+1})) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} = 0$.

■ ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e \frac{x}{e^x}\right) = 0$.

إذن: المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب. دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) : (ندرس إشارة الفرق $(f(x) - x)$)

لدينا: من أجل $x \in [0; +\infty[$ ، $f(x) - x = xe^{-x+1} \geq 0$ ، إذن: (C_f) يقع فوق (Δ) على $[0; +\infty[$.

(2) تبين أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$ ، $f'(x) = g(x)$ ، ثم تشكيل جدول تغيّرات للدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = 1 + e^{-x+1} + (-e^{-x+1})(x) = 1 + (1 - x)e^{-x+1} = g(x) > 0$$

إذن: f متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$ ، ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

(3) تبين أن المعادلة $f(x) = 4$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $3,75 < \alpha < 3,77$:

■ f مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $[3,75; 3,77[$ (لأنها متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$)

■ ولدينا: $\begin{cases} f(3,75) \simeq 3,99 \\ f(3,77) \simeq 4,01 \end{cases}$ أي: $f(3,75) < 4 < f(3,77)$.

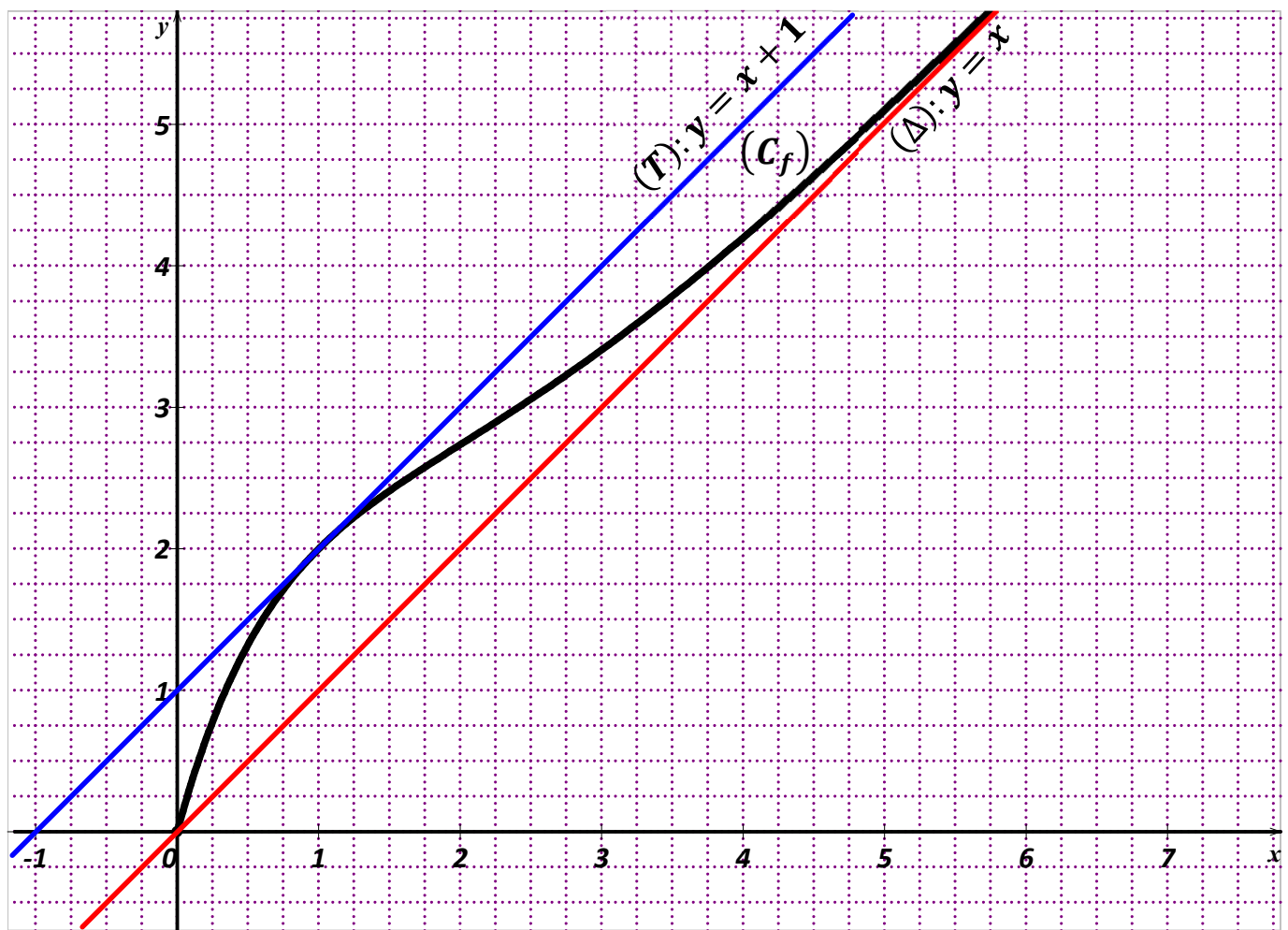
إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 4$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $3,75 < \alpha < 3,77$.

(4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

معادلة (T) من الشكل $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(1) = g(1) = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$ إذن: $(T): y = x + 1$

رسم (T) ؛ (Δ) و (C_f) :



(5) لدينا: F دالة عددية معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - (x+1)e^{-x+1}$.

أ. تبين أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال $[0; +\infty[$:

F دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$F(x) = x - [(1)e^{-x+1} + (-e^{-x+1})(x+1)] = x - [(1-x-1)e^{-x+1}] = x + xe^{-x+1} = f(x)$$

إذن: F هي دالة أصلية للدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

ب. ايجاد القيمة المضبوطة للعدد $\int_1^4 f(x)dx$ ، ثم إعطاء تفسيراً هندسياً لهذا العدد:

$$\text{لدينا: } \int_1^4 f(x)dx = [F(x)]_1^4 = F(4) - F(1)$$

$$\text{ومنه: } \int_1^4 f(x)dx = \left(\frac{1}{2}(4)^2 - (4+1)e^{-4+1}\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2 - (1+1)e^{-1+1}\right)$$

$$\text{وعليه: } \int_1^4 f(x)dx = 8 - 5e^{-3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{19}{2} - 5e^{-3}$$

تفسيره الهندسي هو مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمت التي معادلاتها: $x=4$ ، $x=1$ و $y=0$.

(6) نتمذج الكلفة الهامشية C_m لإنتاج كمية q (مقدرة بآلاف الوحدات) حيث $0 \leq q \leq 7$ بالدالة f المعرفة سابقاً أي: $C_m(q) = f(q)$ حيث: $q \in [0; 7]$. (الكلفة الهامشية مقدرة بملايين الدنانير)

أ. ايجاد كمية المنتج التي من أجلها لا تتجاوز الكلفة الهامشية 4 ملايين دينار:

لدينا: f متزايدة تماماً على المجال $[0; 7]$ و $f(\alpha) = 4$ ، ومنه: $f(x) \leq 4$ إذا وفقط إذا كان $x \in [0; \alpha]$ أي: $C_m(q) \leq 4$ إذا وفقط إذا كان $q \in [0; \alpha]$

ب. دالة الكلفة الإجمالية C_T هي دالة أصلية لدالة الكلفة الهامشية.

حساب القيمة المتوسطة للكلفة الإجمالية عندما تنتج الشركة ما بين 1000 وحدة و4000 وحدة:

لدينا: الكلفة الإجمالية C_T هي دالة أصلية لدالة الكلفة الهاشمية C_m والدالة F هي دالة أصلية لدالة f وبما أن: $C_m(q) = f(q)$ فإن: $C_T(q) = F(q)$ ، وبالتالي القيمة المتوسطة للكلفة الإجمالية عندما تنتج الشركة ما بين 1000 وحدة و4000 وحدة هي العدد الحقيقي μ حيث

$$\mu = \frac{1}{4-1} \int_1^4 C_m(q) dq = \frac{1}{3} \left[\frac{19}{2} - 5e^{-3} \right] = \frac{19}{6} - \frac{5e^{-3}}{3}$$