

الفرض الأول في مادة الرياضيات للفصل الثاني

التمرين الأول [10ن] :

• (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ تحقق :

$$\frac{v_1}{v_0} + \frac{v_2}{v_1} + \frac{v_3}{v_2} + \dots + \frac{v_{n+1}}{v_n} = U_n + 4$$

← حيث (U_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها اعداد طبيعية تحقق مايلي :

$$\begin{cases} PGCD(U_3, U_7) = U_1 \\ U_3 \times U_7 = 336 \\ U_1 > 1 \end{cases}$$

(1) جد كل من U_1 ، U_3 ، U_7 ، استنتج الأساس r للمتتالية (U_n) ، ثم عبر عنها بدلالة n .(أ) بين انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n \times U_{n-1} + v_{n+1} - v_n \times U_n = 0$.(ب) استنتج عبارة المتتالية (v_n) بدلالة n .(2) برهن بالتراجع انه مهما كان $n \in \mathbb{N}$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.(أ) جد بدلالة n الجداء p_n : $p_n = v_0^{6U_0} \times v_1^{6U_1} \times v_2^{6U_2} \times \dots \times v_n^{6U_n}$.(ب) عين : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_n}$.

(3) حلل العدد 2025 الى جداء عوامل أولية .

(أ) استنتج عدد قواسم العدد 2025 ، ثم عينها كلها .

(4) عين $PGCD(216; 75, 63)$.(أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية ل 5^n على 3 .(5) نعتبر المعادلة (E_n) ذات المجهولين الصحيحين (x, y) مع $n \in \mathbb{N}$:

$$216x - 75y = C_n^0 v_0 + C_n^1 v_1 + \dots + C_n^n v_n + 2n^2 - n + 1 \dots (E_n)$$

(أ) عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها المعادلة (E_n) تقبل حلول في $\mathbb{Z}$.(ب) هل المعادلة (E_{2025^2}) تقبل حلول في $\mathbb{Z}$. علل اجابتك ؟(6) في ما يلي نعتبر المعادلة (E) حيث : $216x - 75y = 6075 \dots (E)$ مع $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.(أ) برر لماذا المعادلة (E) تقبل حلول .(ب) جد الحل الخاص (x_0, y_0) للمعادلة (E) و الذي يحقق : $\begin{cases} x_0 + \sqrt{-y_0} = [PGCD(216, 75)]^2 \\ y_0 x_0 = 1 \end{cases}$ (ت) استنتج جميع حلول المعادلة (E) .(7) نضع $PGCD(x, y) = d$ مع (x, y) حلول معادلة (E) .(أ) عين القيم الممكنة ل d .(ب) استنتج الثنائية (x, y) حلول المعادلة (E) التي يكون من اجلها $\sqrt{d} = 45$.(8) جد جميع الثنائيات (x, y) حلول المعادلة E التي تحقق : $y < 3x < 90 + y$.(9) ليكن العدد A الذي يكتب في نظام ذي الأساس 7 : $56\alpha\alpha$ و في نظام الأساس 6 : $\beta 3\alpha\beta 3$.(أ) عين كل من α و β ، ثم اكتب العدد A في نظام العشري .(ب) اكتب العدد $\sqrt{A}$ في نظام ذو الأساس 7 .