

الجداء السلمي

1. الجداء السلمي لشعاعين

$\vec{v}(x'; y')$ ، $\vec{u}(x; y)$ بحيث $\vec{v} \neq \vec{0}$ و $\vec{u} \neq \vec{0}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

حالات خاصة:

* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا وفي اتجاه واحد فإن: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$

* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا ومتعاكسين في الاتجاه فإن: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$

* $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ و $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ و $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

* إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2. تعامد شعاعين

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

3. قواعد الحساب

(أ) خواص الجداء السلمي:

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad \text{①} ; \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \text{②} ; \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \text{③}$$

(ب) المتطابقات الشهيرة:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} & (\vec{u} + \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \\ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} & (\vec{u} - \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \\ (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 & (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \end{aligned}$$

4. الجداء السلمي والاسقاط العمودي

* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين و كان $\vec{v}'$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$ فإن: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$

* إذا كان $\vec{AB} \neq \vec{0}$ و $\vec{CD} \neq \vec{0}$ و C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و D على (AB) فإن:

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{C'D'}$$

حالات خاصة:

* إذا كان $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ مرتبطان خطيا وفي اتجاه واحد فإن: $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = AB \cdot CD$

* إذا كان $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ مرتبطان خطيا ومتعاكسين في الاتجاه فإن: $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -AB \cdot CD$

5. تطبيقات الجداء السلمي

(أ) في المستقيم:

ليكن (D) مستقيم معادلته $ax + by + c = 0$

$$\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} ; \vec{v}(-b; a) \quad \text{شعاع التوجيه:}$$

$$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} ; \vec{n}(a; b) \quad \text{الشعاع الناطمي:}$$

* ملاحظة: يكون الشعاع الناطمي دائما عمودى على شعاع التوجيه أي $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$

Prof Mustapha
KHALED

(ب) في الدائرة:

$$\textcircled{1} \text{ معادلة الدائرة التي مركزها } \Omega(x_0; y_0) \text{ و نصف قطرها } r \text{ هي } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$\textcircled{2} \text{ الدائرة التي قطرها } [AB] \text{ هي مجموعة النقطة } M \text{ حيث } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

* ملاحظة: لكل دائرة معادلة من الشكل $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ و العكس غير صحيح.

6. حساب أطوال، مساحات وأقياس زوايا (العلاقات المترية في مثلث)

$$ABC \text{ مثلث مساحته } S \text{ و نصف محيطه } p \text{ أي } p = \frac{1}{2}(a + b + c) \text{ حيث } BC = a \text{ و } AC = b \text{ ، } AB = c$$

(أ) مبرهنة المتوسط

$$A \text{ و } B \text{ نقطتان و } I \text{ منتصف } [AB] \text{ لدينا: } MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

(ب) مبرهنة الكاشي

$$\textcircled{1} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$\textcircled{2} b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$\textcircled{3} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

(ج) مبرهنة المساحة

$$S = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C}$$

(د) قاعدة هيرون

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(ه) مبرهنة الجيوب

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

7. المسافة بين نقطة ومستقيم

المسافة بين نقطة $A(x_0; y_0)$ وبين مستقيم معادلته $ax + by + c = 0$ هي:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

8. دساتير الجمع

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad ; \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\cos \hat{A} = 1 - \frac{2(p-b)(p-c)}{bc} \quad ; \quad \cos \hat{A} = 1 + \frac{2p(p-a)}{bc} \quad \text{إضافة:}$$

Prof Mustapha
KHA-LD