

كثيرات الحدود للسنت الثانية شعب علمية

1 الدالة كثير حدود

تسمى دالة كثير حدود كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ
 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ حيث n عدد طبيعي و $a_0, a_1, \dots, a_n$ أعداد حقيقية ثابتة.
✓ يسمى العدد الطبيعي n درجة كثير حدود f ،
وتسمى الأعداد $a_0, a_1, \dots, a_n$ معاملات، ويسمى $a_p x^p$ الحد الذي درجته p .

مثال :

- ❖ كل ثابتة : $x \mapsto a_0$ ($a_0 \neq 0$) هي كثير حدود درجته 0
- ❖ كل دالة تآلفية : $x \mapsto ax + b$ ($a \neq 0$) هي كثير حدود درجته 1
- ❖ كل دالة : $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) هي كثير حدود درجته 2 (تسمى أيضا ثلاثي حدود من الدرجة الثانية).

2 تساوي كثيري حدود

يكون كثيرا حدود ، غير معدومين متساويين إذا وفقط إذا كانا من نفس الدرجة وكانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.
مثال : إذا كان لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 2x^3 - x + 3$ فإن $a = 2$ ، $b = 0$ ، $c = -1$ ، $d = 3$.

3 العمليات على كثيرات الحدود

- ❖ مجموع فرق وجداء كثيرات حدود هي كثيرات حدود
- ❖ مركب كثيري حدود هو كثير حدود
- ❖ جداء كثيري حدود هو كثير حدود درجته مجموع درجتيهما.

4 جذر كثير حدود

f كثير حدود درجته أكبر من أو تساوي 1 و α عدد حقيقي، α جذر لكثير الحدود f يعني $f(\alpha) = 0$

5 تحليل كثير حدود

ليكن f كثير حدود درجته أكبر من أو تساوي 1 و α عدد حقيقي.
إذا كان $f(\alpha) = 0$ فإنه يوجد كثير حدود g بحيث من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f(x) = (x - \alpha)g(x)$
مثال : الهدف هو تحليل $f(x)$ إلى جداء عاملين أو أكثر بطرق مختلفة. حيث $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ &= x^2(x - 1) - 4(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

كثيرات الحدود للسنت الثانية شعب علمية

نبين أن 1 جذر لـ f ثم نستعمل المبرهنة السابقة ، ومنه

$$f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

$$= ax^3 + (c-a)x^2 + (c-b)x - c$$

بالمطابقة نجد : $c = -4$ ، $b = 0$ ، $a = 1$

$$f(x) = (x-1)(x+2)(x-2)$$

ومنه : $f(x) = (x-1)(x^2 - 4)$ أي :

القسم الإقليدي

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 4x + 4 & x-1 \\ -x^3 + x^2 & x^2 - 4 \\ \hline -4x + 4 & \\ 4x - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

طريقة هورنر

	x^3	$-x^2$	$-4x$	$+4$
	1	-1	-4	4
+	1	0	1	0
×	1	0	-4	0

$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$
 $= (x-1)(x^2 - 4)$

معادلة من الدرجة الثانية

6

نسمي معادلة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^2 + bx + c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$.

الشكل النموذجي لثلاثي الحدود

7

$$\begin{aligned} A &= ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

نضع $\Delta = b^2 - 4ac$ ومنه فإن الشكل النموذجي لثلاثي الحدود هو

$$A = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

حل معادلة من الدرجة الثانية

8

حل معادلة من الدرجة الثانية معناه إيجاد جذور كثير حدود من الدرجة الثانية

إذا كان	حلول $ax^2 + bx + c$ هي	تحليل $ax^2 + bx + c$
$\Delta > 0$	$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$	$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	$a(x - x_1)^2$
$\Delta < 0$	لا توجد حلول	لا يمكن التحليل

مراجعة من الدرجة الثانية

9

نسمي مراجعة من الدرجة الثانية ذات المجهول x كل مراجعة يمكن كتابتها على أحد الشكلين التاليين:

$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ حيث a, b, c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$

الحالة ①: $\Delta > 0$ لدينا

حيث $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ بفرض $x_1 < x_2$ نحصل على الجدول التالي:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
إشارة $x - x_1$	-	0	+	+
إشارة $x - x_2$	-	-	0	+
إشارة $f(x)$	إشارة a	0	إشارة $-a$	إشارة a

الحالة ②: $\Delta = 0$ لدينا

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ حيث $x_1 = \frac{-b}{2a}$ ومنه إشارة $ax^2 + bx + c$ من إشارة a ويمكن تلخيصها في الجدول التالي:

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
إشارة $f(x)$	إشارة a	0	إشارة a

كثيرات الحدود للسنت الثانية شعب علمية

الحالة ③ : $\Delta < 0$

إشارة $ax^2 + bx + c$ يمكن تلخيصها في الجدول التالي:

x	$-\infty$	$+\infty$
إشارة $f(x)$	إشارة a	

مجموع وجداء حلي معادلة

10

نعتبر المعادلتين من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي x التاليتين: (1) $ax^2 + bx + c$ مع $(a \neq 0)$
نعلم أنه إذا كان $\Delta \geq 0$ فإن المعادلتين (1) تقبل حلين هما x_1 و x_2 حيث

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

إذا وضعنا $S = x_1 + x_2$ و $P = x_1 \times x_2$ حيث S هو مجموع الحلين و P هو جدأؤهما فإن
 $P = \frac{c}{a}$ و $S = -\frac{b}{a}$

حساب أحد الحلين بمعرفة الآخر

1.10

إذا علم أحد الجذرين يمكن حساب الجذر الآخر وذلك باستعمال المجموع S والجداء P

تحسين عددين علم مجموعهما و جدأؤهما

2.10

يكون مجموع عددين هو S وجدأؤهما هو P إذا وفقط إذا كانا حلين للمعادلتين ذات المجهول x والتي تكتب بالشكل التالي $x^2 - Sx + P$

27/10/2021

تحسين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية

3.10

نعتبر المعادلتين من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي x التاليتين: (1) $ax^2 + bx + c$ مع $(a \neq 0)$
❖ إذا كان $\frac{c}{a} < 0$ فإن المعادلتين (1) تقبل حلين إشارتهما مختلفتان.
❖ إذا كان $\frac{c}{a} > 0$ و $\Delta > 0$ فإن المعادلتين (1) تقبل حلين موجبين تماما.
❖ إذا كان $\frac{c}{a} > 0$ و $\Delta < 0$ فإن المعادلتين (1) تقبل حلين سالبين تماما.

كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

مثال تطبيقي :

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية

$$(m-1)x^2 + 2(m+1)x + m = 0$$

الحل

لدينا : $p = \frac{m}{m-1}$ و $S = \frac{-2(m+1)}{m+1}$

❖ إذا كان $m = 1$ فإن المعادلة تصبح من الدرجة الأولى $4x + 1 = 0$ ومنه $x = -\frac{1}{4}$.

❖ إذا كان $m \neq 1$ فإن المعادلة تصبح من الدرجة الثانية حيث: $\Delta_m = 4(3m+1)$

m	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
Δ_m	-	0	+	+

دراسة إشارة P و S

m	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$-2m-2$	+	0	-	-
$m-1$	-	-	0	+
S	-	+	-	-

m	$-\infty$	0	1	$+\infty$
m	-	0	+	+
$m-1$	-	-	0	+
P	+	-	+	+

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{3}$	0	1	$+\infty$
Δ_m	-	-	0	+	+	+
S_m	-	0	+	+	+	-
P_m	+	+	+	0	-	+
النتائج	المعادلة لا تقبل حلول			المعادلة تقبل حلين موجبين تماما	المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة	المعادلة تقبل حلين سالبين تماما

المعادلات مضاعفة التربيع

11

نسمي معادلة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ حيث a, b, c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$.

$$\begin{cases} X = x^2 \\ aX^2 + bX + c \end{cases} \quad \text{حل هذه المعادلة يؤدي إلى حل الجملة:}$$

يسمى X مجهولا مساعدا

بعد حل المعادلة $aX^2 + bX + c = 0$ نستنتج حلول المعادلة $ax^4 + bx^2 + c = 0$

المتراجحات مضاعفة التربيع

12

نسمي متراجحة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل متراجحة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^4 + bx^2 + c \geq 0$ أو $ax^4 + bx^2 + c > 0$ حيث a, b, c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$.

يؤول إلى حل متراجحة مضاعفة التربيع إلى دراسة إشارة $ax^4 + bx^2 + c$

مثال:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^4 - 7x^2 + 12 \leq 0$

① نضع: $f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$

التحقق أن 3 و 4 حلان المعادلة $X^2 - 7X + 12 = 0$

بتعويض قيمة X بـ 3 و 4 نجد: $(3)^2 - 7(3) + 12 = 0$ و $(4)^2 - 7(4) + 12 = 0$

② لدينا:

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$	
x^2-3	+	+	0	-	0	+	
x^2-4	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	+

$$f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$$

$$= X^2 - 7X + 12$$

$$= (X - 3)(X - 4)$$

$$= (x^2 - 3)(x^2 - 4)$$

من الجدول نستنتج أن حلول المتراجحة $f(x) < 0$ هي: $S =] -2; -\sqrt{3}[\cup] \sqrt{3}; 2[$.

حلول معادلات و متراجحات من الشكل

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \geq 0$$

13

للحلول معادلات و متراجحات من الشكل $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ، $ax^3 + bx^2 + cx + d \geq 0$ نقوم بتحليل العبارة بإحدى طرائق السابقة

(مع جذر معلوم) ثم نحل المعادلة أو المتراجحة

مثال

لدينا: $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$

كثيرات الحدود للسنت الثانية شعب علمية

1. حساب $P(-2)$:

$$\begin{aligned} P(-2) &= 2(-2)^3 - (-2)^2 - 13(-2) - 6 \\ &= 2 \times (-8) - 4 + 26 - 6 = -16 - 4 - 6 + 26 = 0 \end{aligned}$$

ومنه $P(-2) = 0$

2. (أ) نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $P(x) = (x+2)Q(x)$ بما أن $P(x)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة و -2 جذره

فإنه يكتب على الشكل : $P(x) = (x+2)Q(x)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 13x - 6 & x+2 \\ -2x^3 - 4x^2 & \\ \hline -5x^2 - 13x & \\ 5x^2 + 10x & \\ \hline -3x - 6 & \\ 3x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \text{: تعيين } Q(x)$$

ومنه : $Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$

(ب) استنتاج تحليل $P(x)$ على شكل جداء كثيرات حدود من الدرجة الأولى :

لدينا $P(x) = (x+2)Q(x)$ نحل المعادلة $Q(x) = 0$:

$$Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3)$$

$$= 25 + 24 = 49 > 0$$

$$x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{5+7}{4} = 3$$

$$P(x) = 2(x+2)(x+\frac{1}{2})(x-3) \text{ ومنه } Q(x) = 2(x+\frac{1}{2})(x-3)$$

3. حل المتراجحة $P(x) \geq 0$ في $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+	+
$Q(x)$	+	+	0	-	-
$P(x)$	-	0	+	0	+

وبالتالي حلول المتراجحة $P(x) \geq 0$ في $\mathbb{R}$ هي $x \in [-2; \frac{-1}{2}] \cup [3; +\infty[$

لدينا مما سبق حلول المعادلة : $2x^3 - x^2 - 13x - 6 = 0$ هي : 2 ، 3 و $-\frac{1}{2}$

لحل المعادلة : $2x^6 - x^4 - 13x^2 - 6 = 0 \dots (1)$ نقوم بوضع : $X = x^2$

إذن (1) تكافئ (2) $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0$ ولدينا مما سبق

$$\begin{cases} X = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \\ X = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \text{ أو } x = -\sqrt{3} \\ X = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2} \text{ مرفوض} \end{cases}$$

لحل المعادلة : $2x\sqrt{x} - x - 13\sqrt{x} - 6 = 0 \dots (1)$ نقوم بوضع : $X = \sqrt{x}$ بحيث $x \geq 0$

إذن (1) تكافئ (2) $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0$ ولدينا مما سبق

$$\begin{cases} X = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \\ X = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \\ X = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = -\frac{1}{2} \text{ مرفوض} \end{cases}$$

لحل المعادلة : $\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{13}{x} - 6 = 0 \dots (1)$ نقوم بوضع : $X = \frac{1}{x}$ بحيث $x \neq 0$

إذن (1) تكافئ (2) $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0$ ولدينا مما سبق

$$\begin{cases} X = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \\ X = 3 \Rightarrow \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \\ X = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

بعبارة أخرى لحلول معادلة من الشكل : $3f(x)^3 - f(x)^2 - 13f(x) - 6 = 0 \dots (1)$ حيث $X = f(x)$ حيث $x \in D_f$

إذن (1) تكافئ (2) $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0$ ولدينا مما سبق

$$\begin{cases} X = 1 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow \dots \\ X = 3 \Rightarrow f(x) = 3 \Rightarrow \dots \\ X = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \dots \end{cases}$$

التمرين رقم (1) : ليكن P كثير حدود حيث $P(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x - 3$.

1. تحقق أن $\alpha = 1$ جذر لكثير الحدود $P(x)$.
2. عين كثير الحدود $q(x)$ حيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} : P(x) = (x - 1)q(x)$.
3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$.
4. شكل جدول إشارة $P(x)$ ثم استنتج حلول المتراجحة $-4x^2 + 3x + 4 \leq \frac{3}{x}$.

الحل موجود في الصفحة 14

التمرين رقم (2) : نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي m

$$(m^2 - 4)x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 1 = 0$$

1. عين قيم العدد الحقيقي m حتى تكون المعادلة (E) من الدرجة الثانية.
2. عين قيمة m حتى يكون 0 حلا للمعادلة (E) ثم استنتج الحل الآخر لها.

الحل موجود في الصفحة 14

التمرين رقم (3) : نعتبر كثير الحدود $P(x)$ حيث : $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

1. أثبت أن (-1) هو جذر $P(x)$.
2. أوجد كثير الحدود $Q(x)$ حيث : $f(x) = (x + 1)Q(x)$.
3. أدرس حسب قيم x إشارة $P(x)$ ، ثم استنتج حلول المتراجحة $P(x) > 0$.

الحل موجود في الصفحة 15

التمرين رقم (4) : f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3 - 2x^2 + \alpha x + \beta$ ، حيث α و β عددين حقيقيين.

1. عين العددين α و β حتى يكون (-1) جذرا لكثير الحدود $f(x)$ و $f(0) = 2$.
2. نعتبر فيما يلي : $\alpha = -1$ و $\beta = 2$:

- أوجد كثير حدود $g(x)$ حيث : $f(x) = (x + 1)g(x)$
- ب) حل في $\mathbb{R}$ ما يلي : $f(x) = 0$ و $f(x) > 0$

الحل موجود في الصفحة 16

كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

التمرين رقم (5) : نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_m(x) = x^2 - mx + 1$ حيث m وسيط حقيقي ، وليكن (C_m) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_2) مع حامل محور الفواصل.
2. عيّن قيم m بحيث المنحنى (C_m) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين متميزتين.
3. عيّن قيم m بحيث المنحنى (C_m) لا يقطع حامل محور الفواصل.
4. عيّن قيم m بحيث المنحنى (C_m) يشمل النقطة $A(2, -3)$.

الحل موجود في الصفحة 17

التمرين رقم (6) : نعتبر المعادلة: $x^4 + 2x^3 - x - 6 = 0 \dots (1)$

(1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

④ $x^2 + 3x - 4 = 0$

② $x^2 + x + 2 = 0$

① $x^2 + x - 3 = 0$

(2) أثبت أن المعادلة (1) تكافئ المعادلة (2) $(x^2 + x - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4 = 0 \dots (2)$

(3) إستنتج حلول المعادلة (2)

(4) حل المتراجحة $\frac{x^4 + 2x^3 - x - 6}{x} \leq 0$

الحل موجود في الصفحة 18

تمرين 1 :

لتكن المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x : $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + 2\sqrt{3} - 2 = 0$

1. أثبت أن المميز، $\Delta = (3 - \sqrt{3})^2$ ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلين متميزين: α و β (حسابهما غير مطلوب).

2. أحسب $\alpha^2 + \beta^2$ دون حساب α و β .

3. (أ) تحقق من أن $\alpha = 2$ هو حل للمعادلة (E) ثم استنتج قيمة β الحل الآخر للمعادلة (E).

(ب) حل ثلاثي الحدود $P(x)$ حيث : $P(x) = x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + 2\sqrt{3} - 2$ ، ثم ادرس اشارته.

(ج) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + 2\sqrt{3} - 2 < 0$

(د) حل في $\mathbb{R}$ الجملة ذات المجهولين a و b :

$$\begin{cases} a + b = \sqrt{3} + 1 \\ ab = 2\sqrt{3} - 2 \end{cases}$$

تمرين 2 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

1. احسب $f(3)$ ثم استنتج تحليلاً لـ $f(x)$ إلى جداء عاملين.

2. حل في $\mathbb{R}$ ما يلي : $f(x) = 0$; $f(x) < 0$

3. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $\frac{2x^4 - 10x^2 + 8}{x^2 + x - 2} \geq 0$

تمرين 3 :

ليكن $f_m(x)$ كثير حدود لمتغير x حيث : $f_m(x) = (m-2)x^2 - (m+1)x + m - 2$

1. احسب $f_0(0)$ و $f_2(-1)$.

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية : $f_1(x) = 0$ و $f_2(x) = 0$.

3. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية : $f_1(x) \geq 0$ و $f_2(x) \leq 0$.

4. عين قيم m حتى يكون $x_1 = 1$ حل للمعادلة $f_m(x) = 0$ ثم استنتج الحل الثاني x_2 .

5. عين قيم m في كل حالة من الحالات التالية :

(أ) $f_m(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

(ب) المعادلة $f_m(x) = 0$ لا تقبل حلول.

(ج) المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حل مضاعف.

(د) المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلين متميزين.

(هـ) المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حل وحيد.

(و) المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

(ج) المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلين متناظرين.

تمرين 4 :

نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x : $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0 \dots (1)$

1. بين أن 0 ليس حلا للمعادلة (1).

2. بين أنه يمكن كتابة المعادلة (1) على الشكل:

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0 \dots (2)$$

3. بوضع: $u = x + \frac{1}{x}$ ، أحسب u^2 بدلالة x .

4. بين أن المعادلة (2) تكتب على الشكل $6u^2 - 5u - 50 = 0 \dots (3)$

5. حل المعادلة (3) ثم استنتج حلول المعادلة (1).

تمرين 5 :

نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}$ كثير الحدود $P(x)$ المعروف بـ: $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

1. أحسب $P(1)$ ، ماذا نستنتج

2. أوجد كثير الحدود $Q(x)$ حيث من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = (x-1)Q(x)$

3. حل كثير الحدود $P(x)$ إلى جداء عوامل. ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$

4. استنتج حلول المعادلة: $|x-1| - 4(x-1)^2 + 5x - 1 - 2 = 0$.

5. نضع: $g(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 + x - 2}$.

(أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x^2 + x - 2 = 0$

(ب) عين قيم العدد الحقيقي x بحيث يكون للعبارة $g(x)$ معنى.

(ج) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $g(x) \leq 0$.

تمرين 6 :

1. $P(x)$ كثير حدود و α عدد حقيقي حيث: $P(x) = x^3 - (6 + \alpha)x^2 + (13 - \alpha)x - (\alpha - 14)$

(I) عين العدد α حتى يكون 3 جذر لكثير الحدود $P(x)$

(II) نضع $\alpha = 2$ أي: $P(x) = x^3 - 8x^2 + 11x + 12$

1. عين الأعداد الحقيقية a, b و c بحيث: $P(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$

3. استنتج حلول المعادلة: $x\sqrt{x} - 8x + 11\sqrt{x} + 12 = 0$

4. استنتج حلول المعادلة: $P(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^3 - 8\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 11\left(\frac{x-1}{2}\right) + 12 = 0$

5. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P(x) \leq 0$ ثم استنتج إشارة $P\left(\frac{2021}{2022}\right)$

كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

تمرين 7 :

نعتبر كثير الحدود $P_m(x)$ حيث: $P_m(x) = (m^2 - 4)x^4 + (m + 1)x^3 - (2 + m)x^2 - \frac{5}{2}mx + 2 = 0$

1. عين قيم m حتى يكون $P_m(x)$ من الدرجة الثالثة .

2. تحقق أن 2 جذر لكثير الحدود $P_2(x)$

3. عين الأعداد الحقيقية a, b و c بحيث : $P_2(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$

4. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $3x^2 + 2x - 1 = 0$

استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة $P_2(x) = 0$

5. أدرس إشارة $P_2(x)$ ثم استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المتراجحة : $3x^3 + 2 \leq 4x^2 + 5x$



حل التمرين رقم (1) الموجود في الصفحة 9:

1. التحقق أن $\alpha = 1$ جذر لكثير الحدود $P(x)$

$$P(1) = 0 \quad \text{ومنه} \quad P(1) = -4(1)^3 + 3(1)^2 + 4(1) - 3 = -4 + 3 + 4 - 3 = 0$$

2. تعيين كثير الحدود $q(x)$

$$P(x) = (x-1)q(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

$$\begin{cases} a = -4 \\ b - a = 3 \\ c - b = 4 \\ -c = -3 \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد :}$$

$$\text{إذن : } a = -4 \quad \text{و} \quad b = -1 \quad \text{و} \quad c = 3$$

$$\text{وبالتالي } P(x) = (x-1)(-4x^2 - x + 3)$$

3. حل المعادلة $P(x) = 0$ في $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 & (1) \\ \text{أو} \\ -4x^2 - x + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$P(x) = 0 \text{ معناه } (x-1)(-4x^2 - x + 3) = 0 \text{ يكافئ}$$

يكافئ

$$\begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ -4x^2 - x + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

4. حل المعادلة (2)

$$\text{لدينا : } \Delta = 49 > 0 \text{ ومنه للمعادلة (2) حلين هما : } x_2 = -1 \text{ و } x_3 = \frac{3}{4}$$

$$\text{ومنه حلول المعادلة } P(x) = 0 \text{ هي } x_2 = -1 \text{ و } x_3 = \frac{3}{4}$$

حل التمرين رقم (2) الموجود في الصفحة 9:

$$(m^2 - 4)x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 1 = 0 \quad \text{نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي } x \text{ والوسيط } m$$

حتى تكون المعادلة (E) من الدرجة الثانية، يجب أن يكون $m^2 - 4 \neq 0$

$$\text{معناه } m^2 \neq 4 \text{ يكافئ } m \neq 2 \text{ أو } m \neq -2 \text{ إذن } m \in]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$$

كثيرات الحدود للسنت الثانية شعب علمية

② تعيين قيمة m حتى يكون 0 حلا للمعادلة (E):

$$\text{لدينا } m^2 - 2m + 1 = 0 \text{ يكافئ } (m^2 - 4)(0)^2 - 2m \times (0) + m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$\text{يكافئ } (m - 1)^2 = 0 \text{ إذن للمعادلة } m^2 - 2m + 1 = 0 \text{ حل مضاعف هو } m = 1$$

تعيين الحل الآخر للمعادلة (E) من أجل $m = 1$

$$\text{من أجل } m = 1 \text{ في المعادلة (E) لدينا : } -3x^2 - 2x = 0 \text{ معناه : } x(-3x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ -3x - 2 = 0 \end{cases}$$

يكافئ : أي : أو

حل التمرين رقم (3) الموجود في الصفحة 9:

نعتبر كثير الحدود $P(x)$ حيث: $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

1. إثبات أن (-1) جذر لـ $P(x)$:

$$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - (-1) + 3$$

$$= -1 - 3 + 1 + 3 = 0$$

2. تعيين كثير الحدود $Q(x)$ حيث : $P(x) = (x+1)Q(x)$:

باستعمال القسمة الإقليدية نجد :

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 - x + 3 & x+1 \\ -x^3 - x^2 & x^2 - 4x + 3 \\ \hline -4x^2 - x & \\ 4x^2 + 4x & \\ \hline 3x + 3 & \\ -3x - 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{ومنه } Q(x) = x^2 - 4x + 3$$

3. دراسة إشارة $P(x)$ حسب قيم x :

$$P(x) = 0 \text{ معناه } (x+1)Q(x) = 0 \text{ أي } x+1 = 0 \text{ (نعلم أن } (-1) \text{ جذر لـ } P(x) \text{) ، و } Q(x) = 0 : Q(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$$

باستعمال المميز Δ :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3$$

$$= 16 - 12 = 4 > 0$$

$$x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$$

كثيرات الحدود للسنت الثانية شعب علمية

ومنه :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$		
$(x+1)$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$+$	$+$		
$Q(x)$	$+$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$P(x)$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$

• استنتاج مجموعة التعريف D_k للدالة k المعرفة بـ: $k(x) = \sqrt{P(x)}$:
يكافئ $P(x) \geq 0$ ومن جدول الإشارة السابق نجد : $x \in [-1; 1] \cup [3; +\infty[$.

حل التمرين رقم (4) الموجود في الصفحة 9:

1. تعيين العددين α و β حتى يكون (-1) جذرا لكثير الحدود $f(x)$ و $f(0) = 2$:
 (-1) جذر لكثير الحدود $f(x)$ معناه:

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 2(-1)^2 + \alpha(-1) + \beta \\ &= -1 - 2 - \alpha + \beta \\ &= -3 - \alpha + \beta = 0 \end{aligned}$$

$$\text{إذن : } (1) \quad \beta - \alpha = 3$$

$$\text{لدينا } f(0) = 2 \text{ معناه : } 0^3 - 2 \times 0^2 + \alpha \times 0 + \beta = 2 \text{ ومنه } (2) \quad \beta = 2$$

$$\text{بتعويض (2) في (1) نجد } \alpha = \beta - 3 \text{ أي } \alpha = 2 - 3$$

$$\text{ومنه } \alpha = -1 \text{ وبالتالي : } f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$2. \text{ نعتبر فيما يلي : } \alpha = -1 \text{ و } \beta = 2 :$$

(أ) إيجاد كثير حدود $g(x)$ حيث : $f(x) = (x+1)g(x)$

$f(x)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة و (-1) جذر له ، إذن يقبل تفكيكا من الشكل : $f(x) = (x+1)g(x)$.
بإجراء القسمة الإقليدية نجد :

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - x + 2 & x+1 \\ -x^3 - x^2 & \hline -3x^2 - x & \\ 3x^2 + 3x & \hline 2x + 2 & \\ -2x - 2 & \hline 0 & \end{array}$$

كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

ومنه : $f(x) = (x+1)(x^2 - 3x + 2)$

ب) نحل في $\mathbb{R}$ ما يلي : $f(x) = 0$ و $f(x) > 0$

$f(x) = 0$ معناه $(x+1)g(x) = 0$ أي $x+1 = 0$ (نعلم أن (-1) جذر لـ $(f(x))$ ، و $g(x) = 0$:

$g(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$ باستعمال المميز Δ :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2$$

$$= 9 - 8 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

إذن : $S_{f(x)} = \{-1; 1; 2\}$

حل المتراجحة $f(x) > 0$ في $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$		
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$g(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

وبالتالي حلول المتراجحة $f(x) > 0$ في $\mathbb{R}$ هي $x \in]-1; 1[\cup]2; +\infty[$

حل التمرين رقم (5) الموجود في الصفحة 10 :

1. تعيين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_2) مع حامل محور الفواصل.

لدينا : $f_2(x) = x^2 - 2x + 1$ فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_2) مع حامل محور الفواصل هي حلول المعادلة $f_2(x) = 0$ ومنه :

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ يكافئ } (x-1)^2 = 0 \text{ أي } x = 1 \text{ وبالتالي : } (C_2) \cap (xx') = \{(1, 0)\}$$

2. تعيين قيم m بحيث المنحنى (C_m) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين متميزتين.

معناه أن المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلين متميزين في $\mathbb{R}$.

نحل المعادلة : $f_m(x) = x^2 - mx + 1 = 0$

$$\Delta_m = m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$$

كثيرات الحدود للسنت الثانية شعب علمية

m	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
$m-2$		$-$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$m+2$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$+$	
Δ_m		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$

المعادلة: $f_m(x) = x^2 - mx + 1 = 0$ تقبل حلين متميزين لما $\Delta_m > 0$ أي: $m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

3. تعيين قيم m بحيث المنحنى (C_m) لا يقطع حامل محور الفواصل.

معناه أن المعادلة: $f_m(x) = x^2 - mx + 1 = 0$ لا تقبل حلولاً في $\mathbb{R}$ يكافئ $\Delta_m < 0$ أي $m \in]-2, 2[$.

4. تعيين قيم m بحيث المنحنى (C_m) يشمل النقطة $A(2, -3)$.

$A(2, -3) \in (C_m)$ يكافئ $f_m(2) = -3$ ومنه $4 - 2m + 1 = -3$ أي $m = 4$.

حل التمرين رقم (6) الموجود في الصفحة 10:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 6 = 0 \dots (1)$$

1. حل المعادلات:

إذا $\Delta > 0$ للمعادلة حلان مختلفان هما

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-3 - \sqrt{25}}{2}$$

$$x_1 = -4$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{25}}{2}$$

$$x_2 = 1$$

$$x^2 + x + 2 = 0$$

حساب Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (1)^2 - 4(1)(2)$$

$$\Delta = -7$$

إذا $\Delta < 0$ للمعادلة ليس لها حل

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

حساب Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (3)^2 - 4(1)(-4)$$

$$\Delta = 25$$

$$x^2 + x - 3 = 0$$

حساب Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (1)^2 - 4(1)(-3)$$

$$\Delta = 13$$

إذا $\Delta > 0$ للمعادلة حلان مختلفان هما

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

2. إثبات أن المعادلة (2) تكافئ المعادلة (1):

$$(x^2 + x - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4 = 0 \dots (2)$$

$$(x^2 + x - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4 = 0$$

$$((x^2 + x) - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4 = 0$$

$$((x^2 + x)^2 + (2)^2 - 2(x^2 + x)(2) + 3x^2 + 3x - 6 - 4 = 0$$

$$x^4 + x^2 + 2x^3 + 4 - 4x^2 - 4x + 3x^2 + 3x - 6 - 4 = 0$$

$$x^4 + x^2 + 2x^3 + 4 - 4x^2 - 4x + 3x^2 + 3x - 6 - 4 = 0$$

$$x^4 + 2x^3 - x - 6 = 0$$

3. إستنتاج حلول المعادلة (2):

بوضع $X = x^2 + x - 2$ المعادلة (2) تكافئ المعادلة: $x^2 + 3x - 4 = 0$ وعليه :

لما $X = -4$ نجد $x^2 + x - 2 = -4$ أي $x^2 + x + 2 = 0$ ومن السؤال 1 نجد أن المعادلة لا تقبل حل.

لما $X = 1$ نجد $x^2 + x - 2 = 1$ أي $x^2 + x - 3 = 0$ ومن السؤال 1 نجد حلول المعادلة هما :

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \text{ و } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \right\} \text{ ومنه :}$$

4. حل المتراجحة :

بما أن $x^4 + 2x^3 - x - 6 = (x^2 + x - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4$ نجد أن

$$x^4 + 2x^3 - x - 6 = (x^2 + x - 2 + 4)(x^2 + x - 2 - 1)$$

$$= (x^2 + x + 2)(x^2 + x - 3)$$

x	$-\infty$	$\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$	0	$\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$	$+\infty$
$x^2 + x + 2$		+	0	+	+
$x^2 + x - 3$		+	+	0	+
$x^4 + 2x^3 - x - 6$		+	0	-	0
x		-	0	-	+
$\frac{x^4 + 2x^3 - x - 6}{x}$		-	0	+	+

وبالتالي حلول المتراجحة هي : $x \in \left] -\infty; \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \right[\cup \left] 0; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \right[$