

Bac 2021

مجلة

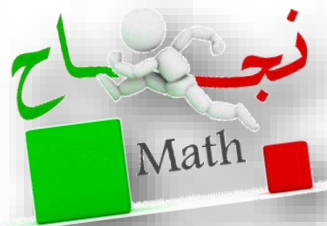
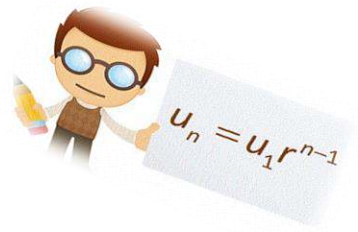
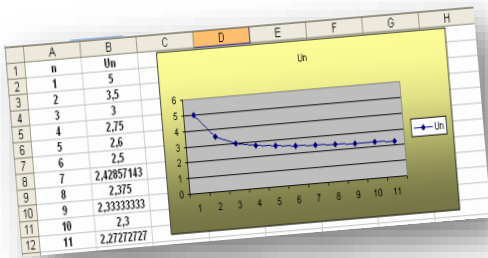
# سند المجتهد في الرياضيات المتتاليات

شعبة :

تسيير واقتصاد

التحضير لشهادة البكالوريا

من إعداد الأستاذة : أزرايب جميلة  
ثانوية : رشيد رضا العاشوري



## الفهرس

- 3..... المتتاليات العددية
- 7..... المتتاليات الحسابية
- 10..... المتتاليات الهندسية
- 13..... المتتاليات المحدودة
- 14..... الاستدلال بالتراجع
- 16..... المتتاليات المتقاربة
- 18..... المتتاليات من الشكل  $u_{n+1} = au_n + b$
- 20..... تمارين المتتاليات في بكالوريا شعبة تسيير واقتصاد

# المتتاليات العددية :

## تعريف :

$n_0$  عدد طبيعي معطى حيث  $(n \geq n_0)$ ، نسمي متتالية عددية كل دالة  $(u: n \rightarrow u(n))$  حيث  $u(n)$  عدد حقيقي. نرسم للعدد  $u(n)$  بـ  $u_n$  ويسمى الحد العام للمتتالية  $u$  ونسمي  $n$  دليل الحد  $u_n$ . نرسم للمتتالية  $u$  بـ  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $u_{n_0}$  حدها الأول.

## مثال 1 :

الدالة  $(u: n \rightarrow n^2 + n + 1)$  بما أنها معرفة على كل مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}$ . نعتبر متتالية عددية سنرسم إليها بالرمز  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  وحدها العام  $u_n$  حيث  $u_n = n^2 + n + 1$  وحدها الأول  $u_0$

| رتبة الحد | 1                       | 2     | 3     | 4     |
|-----------|-------------------------|-------|-------|-------|
| رمز الحد  | $u_0$                   | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
| قيمة الحد | $u_0 = 0^2 + 0 + 1 = 1$ | ..... | ..... | ..... |

في هذه الحالة دليل الحد ليس نفسه رتبة الحد مثلا الحد العاشر ليس  $u_{10}$  بل هو ..... ولحسابه نعوض  $n$  بـ ..... ومنه : .....

- كتابة كل من  $u_{n-1}$  و  $u_{n+1}$  بدلالة  $n$  :

|       |
|-------|
| ..... |
| ..... |
| ..... |
| ..... |
| ..... |
| ..... |
| ..... |
| ..... |

## مثال 2 :

الدالة  $(v: n \rightarrow \frac{-n+1}{n})$  بما أنها معرفة على كل مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة  $\mathbb{N}^*$ . نعتبر متتالية عددية سنرسم إليها بالرمز  $(v_n)_{n \geq 1}$  وحدها العام  $v_n$  حيث  $v_n = \frac{-n+1}{n}$  وحدها الأول  $v_1$

| رتبة الحد | 1                          | 2     | 3     | 4     |
|-----------|----------------------------|-------|-------|-------|
| رمز الحد  | $v_1$                      | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ |
| قيمة الحد | $v_1 = \frac{-1+1}{1} = 0$ | ..... | ..... | ..... |

في هذه الحالة دليل الحد هو نفسه رتبة الحد مثلا الحد العاشر هو ..... ولحسابه نعوض  $n$  بـ ..... ومنه : .....

- كتابة كل من  $v_{n-1}$  و  $v_{n+1}$  بدلالة  $n$  :

|       |
|-------|
| ..... |
| ..... |
| ..... |
| ..... |
| ..... |
| ..... |
| ..... |
| ..... |

### طرق توليد متتالية :

#### بعبارة الحد العام :

يمكن أن نجد قيمة حدود متتالية باستعمال عبارة حدتها العام ولإيجاد قيمة الحد  $u_p$  يكفي أن نعوض  $n$  بـ  $p$  في هذه الحالة يمكن التعبير عن عبارة الحد العام  $u_n$  بالدالة  $f$  ونضع  $u_n = f(n)$ .

■ **مثلا :** المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\square$  حيث  $u_n = -n^2 + 2$  معرفة بحدتها العام .  
ولدينا :  $u_0 = -0^2 + 2 = 2$  ،  $u_1 = -1^2 + 2 = 1$  ،  $u_2 = -2^2 + 2 = -2$  ، .....  
بنفس الطريقة أحسب  $u_3$  و  $u_4$  والحد العشرون .

يمكن التعبير عن الحد العام لهذه المتتالية باستعمال الدالة المرفقة  $f$  ونكتب  $u_n = f(n)$  حيث  $x \in [0; +\infty[$   $f : x \mapsto -x^2 + 2$ .

#### بعلاقة تراجعية :

لتكن دالة عددية  $f$  معرفة على مجال  $D$  وحيث أن من أجل  $x \in D$  فإن  $f(x) \in D$  . المتتالية  $u$  المعرفة بحدتها الأول  $u_{n_0}$  والعلاقة  $u_{n+1} = f(u_n)$  تسمى متتالية تراجعية . تسمح هذه العلاقة بحساب  $u_{n+1}$  إذا علم  $u_n$  من أجل كل  $n \geq n_0$  ، الدالة العددية  $f$  تسمى الدالة المرفقة بالمتتالية  $u$ .

■ **مثلا :** نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بحدتها الأول  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = 1 + 3u_n$ .  
لدينا :  $u_1 = 1 + 3u_0 = 1 + 3 \times 1 = 4$  ،  $u_2 = 1 + 3u_1 = 1 + 3 \times 4 = 13$  ،  $u_3 = 1 + 3u_2 = 1 + 3 \times 13 = 40$  ، .....  
يمكن التعبير عن العلاقة التراجعية لهذه المتتالية باستعمال الدالة المرفقة  $f$  ونكتب  $u_{n+1} = f(u_n)$  حيث  $f : x \mapsto 1 + 3x$ .

### اتجاه تغير متتالية عددية :

- $n_0$  عدد طبيعي معطى ، متتالية عددية  $(u_n)_{n \geq n_0}$
- تكون المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متزايدة تماما ابتداء من الرتبة  $n_0$  إذا وفقط إذا كان  $u_{n+1} - u_n > 0$  (أي  $u_{n+1} > u_n$ ) من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq n_0$ .
- تكون المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متناقصة تماما ابتداء من الرتبة  $n_0$  إذا وفقط إذا كان  $u_{n+1} - u_n < 0$  (أي  $u_{n+1} < u_n$ ) من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq n_0$ .
- تكون المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  ثابتة ابتداء من الرتبة  $n_0$  إذا وفقط إذا كان  $u_{n+1} - u_n = 0$  من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq n_0$ .

### طرق لدراسة اتجاه تغير متتالية عددية :

- لدراسة اتجاه تغير متتالية يمكن أن :  
- ندرس إشارة  $u_{n+1} - u_n$   
- نقارن بين  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  و 1 ( شرط أن تكون الحدود موجبة تماما ) .  
- إذا وجدت دالة  $f$  حيث من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = f(n)$  ندرس تغيرات الدالة  $f$ .

#### ■ مثال 1 :

- أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين على  $\square$  كمايلي :  $u_n = 3n - 5$  و  $v_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ .

### الحل:

1- دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ :

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 5 - (3n - 5) = 3n + 3 - 5 - 3n + 5 = 3 > 0$$

بما أن  $u_{n+1} - u_n > 0$  فإن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{N}$ .

2- دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(v_n)$ :

طريقة 1:

$$v_{n+1} - v_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right) - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[\frac{1}{3} - 1\right] = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[\frac{-2}{3}\right] < 0$$

بما أن  $v_{n+1} - v_n < 0$  فإن المتتالية  $(v_n)$  متناقصة تماماً على  $\mathbb{N}$ .

طريقة 2:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{3}}{2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3} < 1$$

ومنه:  $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$  ومنه المتتالية  $(v_n)$  متناقصة تماماً على  $\mathbb{N}$ .

### مثال 2:

- أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين على  $\mathbb{N}$  كمايلي:  $u_n = \frac{n+1}{3^n}$  و  $v_n = \frac{2n-1}{n+3}$ .

### الحل:

(1) دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ :

طريقة 1:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1+1}{3^{n+1}} - \frac{n+1}{3^n} = \frac{n+2}{3^{n+1}} - \frac{3(n+1)}{3^{n+1}} = \frac{n+2-3(n+1)}{3^{n+1}} = \frac{-2n-1}{3^{n+1}} = \frac{-(2n+1)}{3^{n+1}} < 0$$

ومنه المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماماً على  $\mathbb{N}$ .

طريقة 2:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{\frac{n+1+1}{3^{n+1}}}{\frac{n+1}{3^n}} - 1 = \frac{n+2}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n+1} - 1 = \frac{n+2}{3(n+1)} - 1 = \frac{n+2-3(n+1)}{3(n+1)} = \frac{-2n-1}{3(n+1)} = \frac{-(2n+1)}{3(n+1)} < 0$$

ومنه:  $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 < 0$  أي  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$  ومنه المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماماً على  $\mathbb{N}$ .

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(v_n)$ :

طريقة 1:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+3} - \frac{2n-1}{n+3} = \frac{2n+1}{n+4} - \frac{2n-1}{n+3} = \frac{(2n+1)(n+3) - (2n-1)(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{7}{(n+4)(n+3)} > 0$$

ومنه المتتالية  $(v_n)$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{N}$ .

طريقة 2 :

لتكن  $f$  دالة مرفقة بالمتتالية  $(v_n)$  من الشكل  $v_n = f(n)$  حيث :  $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$  مع  $x \in [0; +\infty[$

دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  : من أجل كل  $x \in [0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2 \times 3 - (-1) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2} > 0$$

ومنه الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[0; +\infty[$  وبالتالي المتتالية  $(v_n)$  متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$ .

تمرين :

أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بحددها العام  $u_n$  في كل حالة من الحالات التالية :

$$\begin{array}{lll} (1) & u_n = 4 - 3n & , \\ (2) & u_n = \frac{n}{3} - 5 & , \\ (3) & u_n = 4 \times 3^n & , \\ (4) & u_n = -5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n & , \\ (5) & u_n = \frac{2^n}{3} & , \\ (6) & u_n = \frac{2^{n+1}}{3^n} \end{array}$$

# المتتاليات الحسابية :

## تعريف :

نقول أن المتتالية  $(u_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $u_0$  وأساسها  $r$  (  $r$  عدد حقيقي ) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$u_{n+1} = u_n + r \quad ( \text{أو} \quad u_{n+1} - u_n = r )$$

## مثال 1 :

لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = 2$  وحدها الأول  $u_0 = -5$ .  
- أحسب الحدود  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$ .

## الحل :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r = -5 + 2 = -3 \\ u_2 &= u_1 + r = -3 + 2 = -1 \\ u_3 &= u_2 + r = -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

## مثال 2 :

لتكن  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{Z}$  بـ :  $u_n = -3n + 1$

- بين أن  $(u_n)$  متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

## طريقة :

لإثبات أن  $(u_n)$  متتالية حسابية يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} - u_n = r$  مع  $r$  عدد حقيقي ثابت .

## الحل :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -3(n+1) + 1 - (-3n + 1) \\ &= -3n - 3 + 1 + 3n - 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

ومنه  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = -3$  .

- تعيين الحد الأول :  $u_0 = -3 \times 0 + 1 = 1$

## تطبيق :

لتكن  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{Z}$  بـ :  $u_n = 4n - 3$

- بين أن  $(u_n)$  متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

## عبارة الحد العام لمتتالية حسابية:

### خاصية :

إذا كانت  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r$  فإنه من أجل كل عددين طبيعيين  $n$  و  $p$  :  $u_n = u_p + (n - p)r$

**حالات خاصة :** إذا كان حدها الأول  $u_0$  :  $u_n = u_0 + nr$  ، إذا كان حدها الأول  $u_1$  :  $u_n = u_1 + (n - 1)r$ .

## مثال 1 :

لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = -5$  وحدها الأول  $u_0 = 2$   
- عين عبارة الحد العام للمتتالية  $(u_n)$ .

## الحل :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = u_0 + nr$  أي  $u_n = 2 + n \times (-5)$  ومنه :  $u_n = -5n + 2$ .

## مثال 2 :

لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = -5$  وحدها الأول  $u_1 = 2$   
- أكتب  $u_n$  بدلالة  $n$ .

### الحل :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم:  $u_n = u_1 + (n-1)r$  أي  $u_n = 2 + (n-1)(-5)$  ومنه:  $u_n = 2 - 5n + 5$  وبالتالي:  $u_n = -5n + 7$

### تطبيق :

لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية معرفة على  $\mathbb{N}$  حيث:  $u_6 = 25$  و  $u_{10} = 37$ .

- 1- عين  $r$  أساس المتتالية  $(u_n)$  وحدها الأول.
- 2- أكتب  $u_n$  بدلالة  $n$ .
- 3- بين أن العدد 2020 حد من حدود المتتالية  $(u_n)$  معينا رتبته.

### حساب مجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية :

**خاصية :** إذا كانت  $(u_n)$  متتالية حسابية فإن :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

بصفة عامة:  $S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} (\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$   
عدد الحدود = دليل الحد الأخير ناقص دليل الحد الأول زائد واحد.

**مثال :**  $(u_n)$  متتالية حسابية معرفة على  $\mathbb{N}$  ب:  $u_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$

- عبر عن  $S_n$  بدلالة  $n$  حيث:  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

### الحل :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n-0+1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} \right) = \frac{n+1}{2} \left( \frac{1}{2}n + 3 \right) = \frac{n+1}{2} \left( \frac{n+6}{2} \right) = \frac{(n+1)(n+6)}{4}$$

### الوسط الحسابي :

**خاصية :** تكون الأعداد  $a$ ،  $b$  و  $c$  بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان  $a + c = 2b$ . يسمى العدد  $b$  الوسط الحسابي للعددين  $a$  و  $c$ .

**مثال :**  $(u_n)$  متتالية حسابية معرفة على  $\mathbb{N}$  حيث:  $u_1 = 2$  و  $u_3 = 8$

- أحسب  $u_2$ .

### الحل :

لدينا  $u_1 + u_3 = 2u_2$  ومنه  $2u_2 = 8 + 2$  أي  $2u_2 = 10$  وبالتالي  $u_2 = 5$ .

### تمرين 1 :

$(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = 5$  وحدها الأول  $u_0 = -3$ .

- 1- أحسب  $u_1$ .
- 2- أكتب  $u_n$  بدلالة  $n$ .
- 3- أحسب الحد ذو الرتبة 2021.
- 4- أحسب المجموع  $S$  حيث:  $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2020}$ .
- 5- أحسب المجموع  $S'$  حيث:  $S' = u_1 + u_2 + \dots + u_{2020}$ .
- 6- أكتب بدلالة  $n$  كل من المجموعين  $S_n$  و  $S'_n$  حيث:  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  و  $S'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$ .

## الحل :

1- حساب الحد  $u_1$  :  $u_1 = u_0 + r = -3 + 5 = 2$

2- كتابة  $u_n$  بدلالة  $n$  :  $u_n = u_0 + nr = -3 + n \times 5 = 5n - 3$

3- الحد ذو الرتبة 2021 هو  $u_{2020}$

ومنه  $u_{2020} = 5 \times 2020 - 3 = 10097$

4- حساب المجموع  $S$  :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2020} = \frac{2020 - 0 + 1}{2} (u_0 + u_{2020}) = \frac{2021}{2} (-3 + 10097) = 10199987$$

5- حساب المجموع  $S'$  :

$$S' = u_1 + u_2 + \dots + u_{2020} = \frac{2020 - 1 + 1}{2} (u_1 + u_{2020}) = \frac{2020}{2} (2 + 10097) = 10199990$$

6- كتابة  $S_n$  بدلالة  $n$  :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n - 0 + 1}{2} (u_0 + u_n) = \frac{n + 1}{2} (-3 + 5n - 3) = \frac{(n + 1)(5n - 6)}{2}$$

- كتابة  $S'_n$  بدلالة  $n$  :

$$S'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = \frac{n - 1 - 1 + 1}{2} (u_1 + u_{n-1}) = \frac{n - 1}{2} (2 + 5(n - 1) - 3) = \frac{n - 1}{2} (2 + 5n - 5 - 3) = \frac{(n - 1)(5n - 6)}{2}$$

## تمرين 2:

$(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = 5$  وحدها الأول  $u_1 = 2$

1- أحسب  $u_2$  و  $u_3$  .

2- أكتب  $u_n$  بدلالة  $n$  .

3- أحسب الحد ذو الرتبة 2020.

4- أحسب المجموع  $S$  حيث :  $S = 7 + 12 + \dots + 10097$

## تمرين 3:

لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $u_0$  وأساسها  $r$  حيث :  $u_2 - u_0 = 4$  و  $u_1 + u_3 = 16$

(1) أحسب الحد  $u_2$  ، ثم الحد  $u_0$  واستنتج الأساس  $r$  للمتتالية  $(u_n)$  .

(2) أ- بين أن الحد العام للمتتالية معرف بـ :  $u_n = 4 + 2n$  .

ب - حدد مع التبرير اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

(3) بين أن العدد 2020 حد من حدود المتتالية  $(u_n)$  ، محددا رتبته .

(4) أحسب المجموع  $S$  المعروف بـ :  $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{1008}$

# المتتاليات الهندسية :

## تعريف :

نقول أن المتتالية  $(u_n)$  هندسية حدها الأول  $u_0$  وأساسها  $q$  ( $q$  عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$u_{n+1} = u_n \times q \quad \left( \text{أو} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \right)$$

❖ **مثال 1:** لتكن  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = 2$  وحدها الأول  $u_0 = -4$ .

- أحسب الحدين  $u_1$  ،  $u_2$ .

## الحل :

$$u_1 = u_0 \times q = -4 \times 2 = -8 \quad \text{و} \quad u_2 = u_1 \times q = -8 \times 2 = -16$$

## مثال 2 :

❖ لتكن  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $u_n = 2 \times 3^n$

- بين أن  $(u_n)$  متتالية هندسية بطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

## طريقة :

لإثبات أن  $(u_n)$  متتالية هندسية يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = u_n \times q$  مع  $q$  عدد حقيقي ثابت .

## الحل :

$$u_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 2 \times 3^n \times 3 = u_n \times 3$$

ومنه  $(u_n)$  هندسية أساسها  $q = 3$ .

حساب الحد الأول :  $u_0 = 2 \times 3^0 = 2$  .

## تطبيق :

❖ لتكن  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $u_n = -5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

- بين أن  $(u_n)$  متتالية هندسية بطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

## عبارة الحد العام لمتتالية هندسية :

### خاصية :

إذا كانت  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$  فإنه من أجل كل عددين طبيعيين  $n$  و  $p$  :  $u_n = u_p \times q^{n-p}$

**حالات خاصة :** إذا كان حدها الأول  $u_0$  :  $u_n = u_0 \times q^n$  ، إذا كان حدها الأول  $u_1$  :  $u_n = u_1 \times q^{n-1}$  .

## مثال 1 :

❖ لتكن  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = 7$  وحدها الأول  $u_0 = 2$

- عین عبارة الحد العام للمتتالية  $(u_n)$  .

## الحل :

❖ لدينا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = u_0 \times q^n$  أي  $u_n = 2 \times 7^n$  .

## مثال 2 :

❖ لتكن  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{2}$  وحدها الأول  $u_1 = -3$

- أكتب  $u_n$  بدلالة  $n$  .

❖ **الحل :** لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :

$$\text{لدينا : } u_n = u_1 \times q^{n-1} \text{ أي } u_n = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ ومنه : } u_n = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ وبالتالي : } u_n = -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

### تطبيق :

- لتكن  $(u_n)$  متتالية هندسية معرفة على  $\mathbb{R}$  حيث :  $u_8 = -768$  و  $u_{15} = -98304$ .
- 1/ عين  $q$  أساس المتتالية  $(u_n)$  وحدها الأول .
  - 2/ أكتب  $u_n$  بدلالة  $n$ .
  - 3/ أحسب الحد الحادي العاشر .

### تمرين :

- بلغ عدد سكان إحدى المدن الجزائرية 3000 نسمة سنة 2005 و 3630 نسمة سنة 2007 .  
نفرض أن  $\alpha$  نسبة تزايد السكان سنويا بهذه المدينة ثابتة .
- 1- عين  $\alpha$  نسبة تزايد سكان المدينة.
  - 2- كم سيكون عدد سكان هذه المدينة سنة 2030 ؟ يتم تدوير النتيجة إلى العشرات .

### الحل :

- نرمز بـ  $u_n$  مثلا إلى عدد سكان المدينة سنة  $2005 + n$  وبذلك يكون  $u_0 = 3000$  و  $2007 = 2005 + 2$  أي  $u_2 = 3630$
- 1- بما أن نسبة التزايد  $\alpha$  ثابتة فإن العلاقة بين عدد السكان خلال السنة  $2005 + n$  وعدد السكان خلال السنة الموالية وهي :  
 $u_{n+1} = u_n + \alpha u_n$  أي  $u_{n+1} = (1 + \alpha)u_n$  وبالتالي  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = 1 + \alpha$ .
  - لدينا :  $u_2 = u_0 \times q^2$  ومنه  $q^2 = \frac{u_2}{u_0}$  أي :  $q^2 = 1.21$  وبالتالي  $q = 1.1$  أي  $\alpha + 1 = 1.1$  ومنه  $\alpha = 0.1 = 10\%$
  - 2- لدينا :  $2030 = 2005 + 25$  ولنا  $u_{25} = u_0 \times q^{25}$  ومنه  $u_{25} = 3000 \times (1.1)^{25}$  أي  $u_{25} \approx 32504.12$ .

### حساب مجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسية:

**خاصية :** إذا كانت  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$  يختلف عن 1 فإن :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

بصفة عامة :  $S = \text{الحد الأول} \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$

عدد الحدود = دليل الحد الأخير ناقص دليل الحد الأول زائد واحد.

■ إذا كان  $q = 1$  فإن (الحدود متساوية والمتتالية الهندسية ثابتة)

$$S = (\text{عدد الحدود}) \times \text{الحد الأول}$$

**مثال :**  $(u_n)$  متتالية هندسية حدها الأول  $u_0 = 5$  وأساسها  $q = \frac{1}{2}$ .

- عبر عن  $S_n$  بدلالة  $n$  حيث :  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

### الحل :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2 \times 5 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 10 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

### تطبيق 1:

$(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = 4$  وحدها الأول  $u_0 = -3$ .

- 1) أحسب  $u_1$ .
- 2) أحسب المجموع  $S$  حيث :  $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{19}$ .
- 3) أحسب المجموع  $S'$  حيث :  $S' = u_1 + u_2 + \dots + u_{19}$ .
- 4) أكتب بدلالة  $n$  كل من المجموعين  $S'_n$  و  $S_n$  حيث :  $S'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$  و  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

### الحل :

(1) حساب الحد  $u_1$  :  $u_1 = u_0 \times q = -3 \times 4 = -12$

(2) حساب المجموع  $S$  :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{19} = u_0 \times \frac{1 - q^{19-0+1}}{1 - q} = -3 \times \frac{1 - 4^{20}}{1 - 4} = -3 \times \frac{1 - 4^{20}}{-3} = 1 - 4^{20}$$

حساب المجموع  $S'$  :

$$S' = u_1 + u_2 + \dots + u_{19} = u_1 \times \frac{1 - q^{19-1+1}}{1 - q} = -12 \times \frac{1 - 4^{19}}{1 - 4} = -12 \times \frac{1 - 4^{19}}{-3} = 4(1 - 4^{19})$$

كتابة  $S_n$  بدلالة  $n$  :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n-0+1}}{1 - q} = -3 \times \frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} = -3 \times \frac{1 - 4^{n+1}}{-3} = 1 - 4^{n+1}$$

- كتابة  $S'_n$  بدلالة  $n$  :

$$S'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{19} = u_1 \times \frac{1 - q^{n-1+1}}{1 - q} = -12 \times \frac{1 - 4^n}{1 - 4} = -12 \times \frac{1 - 4^n}{-3} = 4(1 - 4^n)$$

### الوسط الهندسي:

**خاصية :** تكون الأعداد  $a$  ،  $b$  و  $c$  بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان  $a \times c = b^2$  . يسمى العدد  $b$  الوسط الهندسي للعددين  $a$  و  $c$  .

### مثال :

لتكن  $(u_n)$  متتالية هندسية ، حدودها موجبة تماما حيث :  $u_3 \times u_5 = 2916$

- أحسب الحد  $u_4$  .

### الحل :

لدينا :  $u_4^2 = u_3 \times u_5$  ومنه  $u_4^2 = 2916$  ومنه  $u_4 = 54$  أو  $u_4 = -54$  ولأن الحدود موجبة فإن  $u_4 = 54$  .

### تمرين : بكالوريا علوم تجريبية 2009 .

$(u_n)$  متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول  $u_1$  وأساسها  $q$  حيث :

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

(1) أ- أحسب  $u_2$  والأساس  $q$  لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول  $u_1$  .

ب- أكتب عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$  .

ج- أحسب بدلالة  $n$  المجموع :  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  ثم عين العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون  $S_n = 728$

(2)  $(v_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي :  $v_1 = 2$  و  $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ- أحسب  $v_2$  و  $v_3$  .

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم :  $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

- بين أن  $(w_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  .

ج- أكتب  $w_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $v_n$  بدلالة  $n$  .

# المتتاليات المحدودة :

## تعريف :

- ( $u_n$ ) متتالية معرفة على  $\mathbb{Q}$ .
1. القول أن المتتالية ( $u_n$ ) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي  $A$  حيث من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n \leq A$ .
  2. القول أن المتتالية ( $u_n$ ) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي  $B$  حيث من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n \geq B$ .
  3. القول أن المتتالية ( $u_n$ ) محدودة يعني وجود عددين حقيقيين  $A$  و  $B$  حيث من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $B \leq u_n \leq A$ .

## مثال 1 :

- لتكن ( $u_n$ ) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم بـ :  $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ .
- لدينا من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{Q}^*$  :  $\frac{3}{n} \leq 3$  ومنه  $2 + \frac{3}{n} \leq 2 + 3$  أي  $u_n \leq 5$  وبالتالي ( $u_n$ ) محدودة من الأعلى بالعدد 5.
- لدينا من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{Q}^*$  :  $\frac{3}{n} > 0$  ومنه  $2 + \frac{3}{n} > 2 + 0$  أي  $u_n > 2$  وبالتالي ( $u_n$ ) محدودة من الأسفل بالعدد 2.
- لدينا من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{Q}^*$  :  $2 < u_n \leq 5$  وبالتالي ( $u_n$ ) محدودة.

## مثال 2 :

- لتكن ( $u_n$ ) المتتالية المعرفة على  $\mathbb{Q}$  بحدها العام :  $u_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 4}$ .
- أثبت أن المتتالية ( $u_n$ ) محدودة من الأعلى بـ 2.

## الحل :

لدينا :

$$u_n - 2 = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 4} - 2 = \frac{2n^2 + 1 - 2(n^2 + 4)}{n^2 + 4} = \frac{2n^2 + 1 - 2n^2 - 8}{n^2 + 4} = \frac{-7}{n^2 + 4} < 0$$

أي :  $u_n - 2 < 0$  ومنه  $u_n < 2$  وبالتالي المتتالية ( $u_n$ ) محدودة من الأعلى بالعدد 2.

## تطبيق 1 :

- لتكن ( $u_n$ ) المتتالية المعرفة على  $\mathbb{Q}$  بـ :  $u_n = \frac{8n}{n^2 + 4}$ .
- برهن أن المتتالية ( $u_n$ ) محدودة بالعدد 0 و 2.

# الاستدلال بالتراجع :

## مبدأ الاستدلال بالتراجع :

- $p(n)$  خاصية متعلقة بعدد طبيعي  $n$  و  $n_0$  عدد طبيعي .  
 للبرهان على صحة الخاصية  $p(n)$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أكبر أو يساوي  $n_0$  يكفي أن :  
 1- التأكد من صحة الخاصية من أجل  $n_0$  أي  $p(n_0)$  .  
 2- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي  $n$  أكبر أو يساوي  $n_0$  أي  $p(n)$  (فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصية من أجل  $n+1$  أي  $p(n+1)$  .

### مثال 1:

لنثبت صحة الخاصية التالية: من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم ،  $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$  .

المرحلة الأولى : من أجل  $n=1$  لدينا :  $1 = \frac{1 \times 2}{2}$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل  $n=1$  .

المرحلة الثانية : نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  حيث  $n \geq 1$  أي :  $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

ونبرهن على صحة الخاصية من أجل  $n+1$  أي :  $1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$   
 لدينا :

$$\begin{aligned} 1+2+3+...+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

ومنه  $p(n+1)$  صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم ،  $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

### مثال 2:

برهن بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، العدد  $n^3 - n$  مضاعف للعدد 3 .

المرحلة الأولى : من أجل  $n=0$  :  $0^3 - 0 = 0 = 3 \times 0$  صحيحة .

المرحلة الثانية : نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أي :  $n^3 - n$  مضاعف للعدد 3 وبالتالي :  $n^3 - n = 3k$  مع  $k$  عدد طبيعي.

ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  أي :  $(n+1)^3 - (n+1)$  مضاعف للعدد 3 .  
 لدينا :

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= n^3 - n + 3n^2 + 3n \\ &= 3k + 3n^2 + 3n \\ &= 3(k + n^2 + n) \end{aligned}$$

ومنه  $(n+1)^3 - (n+1)$  مضاعف للعدد 3 أي الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  .

إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $n^3 - n$  مضاعف للعدد 3 .

❖ تمرين :

( $u_n$ ) متتالية حدها الأول  $u_0 = 4$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$ .

1- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n \geq -2$ .

2- بين أن المتتالية ( $u_n$ ) متناقصة تماما .

❖ الحل :

1- من أجل  $n=0 : u_0 = 4 \geq -2$  صحيحة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  أي  $u_n \geq -2$  ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  أي  $u_{n+1} \geq -2$

لدينا  $u_n \geq -2$  ومنه  $\frac{1}{2}u_n \geq -1$  ومنه  $\frac{1}{2}u_n - 1 \geq -1-1$  وبالتالي  $u_{n+1} \geq -2$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  .

إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n \geq -2$  .

2- إثبات أن المتتالية ( $u_n$ ) متناقصة تماما :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n - 1 - u_n = -\frac{1}{2}u_n - 1$$

لدينا :  $u_n \geq -2$  ومنه  $\frac{-1}{2}u_n \leq 1$  أي  $\frac{-1}{2}u_n - 1 \leq 0$  ومنه  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  وبالتالي المتتالية ( $u_n$ ) متناقصة تماما على  $\mathbb{N}$ .

❖ تمرين :

المتتالية ( $u_n$ ) معرفة بـ  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n : u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$  .

1- برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي  $n : 0 \leq u_n \leq 2$  .

2- أثبت أن المتتالية ( $u_n$ ) متزايدة تماما .

# المتتاليات المتقاربة :

## نهاية متتالية :

نقول أن العدد الحقيقي  $l$  نهاية للمتتالية  $(u_n)$  يعني أن كل مجال مفتوح مركزه  $l$  يشمل كل حدود هذه المتتالية من رتبة معينة ونكتب :  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l$  أو  $\lim (u_n) = l$  وفي هذه الحالة نقول أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة .

## ملاحظة :

- 1- إذا كانت  $(u_n)$  متقاربة فإن نهايتها وحيدة .
- 2- إذا كانت  $(u_n)$  متتالية غير متقاربة فهي متباعدة ( نهايتها غير منتهية أو غير موجودة ) .

## المتتاليات من الشكل $u_n = f(n)$

يمثل  $\alpha$  عددا حقيقيا ،  $+\infty$  أو  $-\infty$  .  $(u_n)$  متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بحددها العام  $u_n = f(n)$  حيث  $f$  دالة معرفة على المجال  $[0; +\infty[$  . إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$  .

## مثال 1 :

لتكن  $(u_n)$  المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم بـ :  $u_n = \frac{1}{n}$

- هل المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ؟

$$\text{لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

ومنه المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو العدد 0 .

## مثال 2 :

لتكن  $(u_n)$  المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$

- هل المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ؟

$$\text{لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

ومنه المتتالية  $(u_n)$  متباعدة .

## نهاية متتالية هندسية :

### مبرهنة :

(1) إذا كان  $-1 < q < 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$  .

(2) إذا كان  $q = 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$  .

(3) إذا كان  $q > 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$  .

(4) إذا كان  $q \leq -1$  فإن النهاية غير موجودة .

## أمثلة :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n = 0 , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

## الرتابة والتقارب :

### مبرهنة :

- 1/ إذا كانت متتالية متزايدة ومحدود من الأعلى فإن هذه المتتالية متقاربة .
- 2/ إذا كانت متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فإن هذه المتتالية متقاربة .

**تطبيق 1 : جزء من دورة 2011 الموضوع (2)**

لتكن المتتالية العددية  $(u_n)$  حيث :  $u_0 = \frac{1}{2}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}$ .

(1) أحسب  $u_1$  و  $u_2$  .

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > \frac{1}{3}$ .

(3) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

**الحل :**

(1) حساب الحدود :

$$u_1 = \frac{2}{5}u_0 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \quad , \quad u_2 = \frac{2}{5}u_1 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{9}{25}$$

(2) البرهان بالتراجع :

$$u_0 = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} : n=0$$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  أي  $u_n > \frac{1}{3}$  ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  أي  $u_{n+1} > \frac{1}{3}$

لدينا :  $u_n > \frac{1}{3}$  ومنه  $\frac{2}{5}u_n > \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$  ومنه  $\frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} > \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$  وبالتالي  $u_{n+1} > \frac{1}{3}$  أي الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$ .

إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n > \frac{1}{3}$ .

(3) تبين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما :

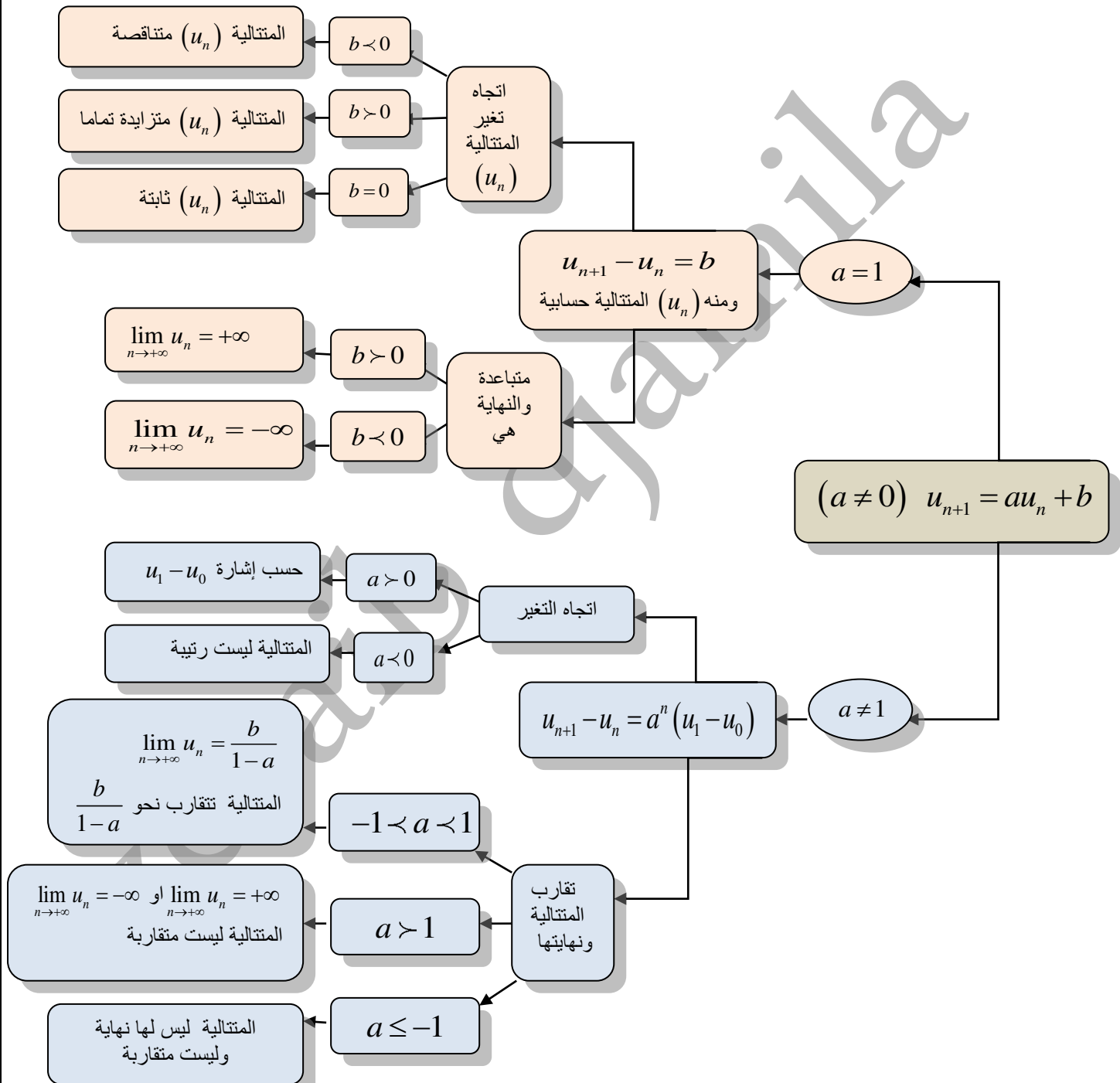
$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} - u_n = \left(\frac{2}{5} - 1\right)u_n + \frac{1}{5} = -\frac{3}{5}u_n + \frac{1}{5}$$

ولدينا  $u_n > \frac{1}{3}$  أي  $-\frac{3}{5}u_n < -\frac{3}{5} \times \frac{1}{3}$  ومنه  $-\frac{3}{5}u_n + \frac{1}{5} < -\frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$  ومنه  $u_{n+1} - u_n < 0$

وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $\square$ .

$(a \neq 0) \quad u_{n+1} = au_n + b$  دراسة المتتاليات من الشكل

$(u_n)$  متتالية حدها الأول  $u_0$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = au_n + b$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان و  $a \neq 0$ .  
نلاحظ أن  $u_{n+1} = f(u_n)$  حيث  $f$  هي الدالة التآلفية  $f: x \mapsto ax + b$ .



### تمارين :

لتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بحددها الأول  $u_0 = \alpha$  وبالعلاقة  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

(أ) نفرض أن  $\alpha = 3$

1- أحسب  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$  . ضع تخميناً حول طبيعة المتتالية  $(u_n)$  ثم أثبت صحة تخمينك

2- هل المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ؟

(ب) نفرض  $\alpha = 2$  ونعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بالعلاقة  $v_n = u_n - 3$

(1) أثبت أن المتتالية  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحددها الأول .

(2) أحسب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

(3) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة محددا نهايتها .

(4) أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

(ج) نفرض  $\alpha = 6$  ، أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

### الحل :

(أ) لدينا  $\alpha = 3$  ومنه  $u_0 = 3$

1- لدينا :  $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$  ،  $u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 2 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$  و  $u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$

إثبات صحة التخمين :

المرحلة الأولى : من أجل  $n = 0$  :  $u_0 = 3$  صحيحة

المرحلة الثانية : نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  أي  $u_n = 3$  ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  أي  $u_{n+1} = 3$

لدينا  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$  ومنه  $u_{n+1} = 3$  . إذن الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

وبالتالي : الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  المتتالية  $(u_n)$  ثابتة .

2- نعم المتتالية  $(u_n)$  متقاربة وتتقارب نحو العدد 3 .

(ب) لدينا  $\alpha = 2$  ومنه  $u_0 = 2$

1- إثبات أن المتتالية  $(v_n)$  متتالية هندسية و تعيين أساسها

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$$

ومنه  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{3}$  .

• تعيين الحد الأول :  $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$

2- كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  :  $v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$

• كتابة  $u_n$  بدلالة  $n$  : لدينا  $v_n = u_n - 3$  ومنه  $u_n = v_n + 3$  وبالتالي  $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$

3- بما أن  $1 < \frac{1}{3} < 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$  ومنه  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right] = 3$  ونستنتج أن  $(u_n)$  متقاربة وتتقارب نحو العدد 3.

4- نلاحظ أن  $u_{n+1} = f(u_n)$  حيث  $f : x \mapsto \frac{1}{3}x + 2$  ، بما أن  $\frac{1}{3} > 0$  و  $u_1 - u_0 = \frac{2}{3}$  ( فان المتتالية  $(u_n)$  متزايدة

(ج) لدينا  $\alpha = 6$  ومنه  $u_0 = 6$

بما أن  $\frac{1}{3} > 0$  و  $u_1 - u_0 = -2$  ( فان المتتالية  $(u_n)$  متناقصة.

# تمارين المتتاليات في كالكوريا تسيير واقتصاد (من 2011 إلى 2020)

## دورة 2011 الموضوع (2) :

لتكن المتتالية العددية  $(u_n)$  حيث :  $u_0 = \frac{1}{2}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}$  .  
(1) أحسب  $u_1$  و  $u_2$  .

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > \frac{1}{3}$  .

(3) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

(4) لتكن المتتالية العددية  $(v_n)$  حيث من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = u_n - \frac{1}{3}$  .

أ- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب كلا من  $u_n$  و  $v_n$  بدلالة  $n$  .

ج- أحسب نهاية المتتالية  $(u_n)$  .

## دورة 2012 الموضوع (1):

لتكن  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ :  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9}$  .

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > \frac{2}{3}$  .  
ب- بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة .

(2) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $v_n = u_n - \frac{2}{3}$  .  
أ- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية ، يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^n + 2 \right]$  .

ج- ماهي نهاية المتتالية  $(u_n)$  ؟

(3) أحسب ، بدلالة  $n$  ، المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  .

## دورة 2012 الموضوع (2) :

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره 50000DA في صندوق التوفير والاحتياط . يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا . يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره 5000DA ( بعد حساب الفوائد ) . يرمز  $u_n$  إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة  $2008 + n$  .

(1) أ- أحسب كلا من  $u_0$  ،  $u_1$  و  $u_2$  .

ب - هل المتتالية  $(u_n)$  هندسية ؟ هل هي حسابية ؟ برر إجابتك .

ج - بين لماذا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا ،  $u_{n+1} = 1.05u_n - 5000$  .

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = u_n - 100000$  .

أ- بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية ، حدد أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = -50000 \times (1.05)^n + 100000$  .

(3) أ- ماهو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015 ؟

ب - ابتداء من أية سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة ؟

**دورة 2013 الموضوع (1):**

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بـ :  $u_0 = 3$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$u_{n+1} = \left( \frac{2a+1}{3} \right) u_n - \frac{2a+4}{3} .$$

1- عين قيمة  $a$  التي من أجلها تكون المتتالية ( $u_n$ ) ثابتة .

2- نفرض  $a \neq \frac{5}{2}$  . عين قيمة  $a$  حتى تكون المتتالية ( $u_n$ ) حسابية ، ثم احسب عندئذ  $u_n$  ومجموع  $n$  حدا الأولى من المتتالية .

3- عين قيمة  $a$  حتى تكون المتتالية ( $u_n$ ) هندسية ، ثم عين في هذه الحالة كلا من  $u_{50}$  ومجموع 50 حدا الأولى منها .

4- نفرض أن  $a = 4$  . برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، فان :  $u_n = 3^n + 2$  ، ثم بين أن :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2} (3^{n+1} + 4n + 3)$$

**دورة 2013 الموضوع (2) :**

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بـ :  $u_0 = 6$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = -\frac{1}{2} u_n + 6$  .

(1) أ- أحسب الحدود :  $u_1$  ،  $u_2$  ،  $u_3$  و  $u_4$  .

ب - هل المتتالية ( $u_n$ ) رتيبة على  $\mathbb{R}$  ؟ برر إجابتك .

(2) أ- بين أنه ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2} (u_n - 4)$  ،  $\square$  .

ب - استنتج أن المتتالية ( $v_n$ ) المعرفة على  $\square$  بـ :  $v_n = u_n - 4$  هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ج - أكتب  $v_n$  ، ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  .

د - بين أن ( $u_n$ ) متقاربة .

(3) باستعمال عبارة  $u_n$  ، تأكد ثانية من نتيجة السؤال (1) ب .

**دورة 2014 الموضوع (1):**

أجب بصحيح أو خطأ ، مع التبرير ، في كل حالة من الحالات الآتية :

1/ ( $u_n$ ) متتالية عددية معرفة على  $\square$  حدودها موجبة تماما و ( $v_n$ ) المتتالية المعرفة على  $\square$  بـ :  $v_n = \ln u_n$  :

(أ) إذا كانت ( $u_n$ ) متقاربة فان ( $v_n$ ) متقاربة .

(ب) إذا كانت ( $u_n$ ) متناقصة فان ( $v_n$ ) متناقصة .

(ج) إذا كانت ( $u_n$ ) هندسية فان ( $v_n$ ) حسابية .

**دورة 2014 الموضوع (2):**

( $u_n$ ) المتتالية العددية معرفة كما يلي :  $u_0 = 3$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n - 1$  ،

1- (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فان  $u_n > -3$  .

(ب) بين أن المتتالية ( $u_n$ ) متناقصة تماما .

(ج) استنتج أن المتتالية ( $u_n$ ) متقاربة .

2- لتكن ( $v_n$ ) متتالية هندسية متقاربة أساسها  $q$  حيث :  $v_0 = 6$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = 18$  .

(أ) بين أن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$  .

(ب) أحسب الأساس  $q$  ثم عين عبارة الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$  .

(ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = v_n - 3$  واستنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  .

### دورة 2015 الموضوع (1):

اختر الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية :

- (1) نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بحددها العام :  $u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1}$ .  
 (أ)  $(u_n)$  حسابية ، (ب)  $(u_n)$  هندسية ، (ج)  $(u_n)$  ليست هندسية ولا حسابية.
- (2)  $(v_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $v_0 = 1$  وأساسها 4 ، قيمة  $n$  التي من أجلها يكون  $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 2015$  هي :  
 (أ)  $n = 31$  ، (ب)  $n = 32$  ، (ج)  $n = 33$ .

### دورة 2015 الموضوع (2) :

بينت دراسة أن 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يحالون على التقاعد سنويا وبالمقابل يوظف 3000 عامل سنويا . علما أن سنة 2012 كان عدد العمال 50000.

نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز بـ :  $u_n$  لعدد العمال سنة  $2012 + n$  أي  $u_0 = 50$ .

- (1) أحسب  $u_1$  و  $u_2$ .
- (2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = 0.95u_n + 3$ .  
 (ب) بين أن المتتالية  $(u_n)$  ليست حسابية وليست هندسية .
- (3) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع :  $v_n = 60 - u_n$ .  
 (أ) بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .  
 (ب) أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$ .  
 (ج) قدر عدد العمال سنة 2017.  
 (د) حدد اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .  
 (هـ) أحسب نهاية المتتالية  $(u_n)$  . هل يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60000 عامل ؟

### دورة 2016 الموضوع (1):

$(v_n)$  متتالية هندسية حدودها موجبة ومعرفة على  $\square$  بحددها الأول  $v_0 = 18$  والعلاقة :  $v_0 + v_1 + v_2 = 38$

- 1/ بين أن أساس المتتالية  $(v_n)$  هو  $q = \frac{2}{3}$ .
- 2/ (أ) أكتب عبارة الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$ .  
 (ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(v_n)$ .  
 (ج) أحسب نهاية  $(v_n)$ .
- 3/ نضع  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$   
 (أ) أحسب  $S_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج نهاية  $S_n$  عندما  $n$  يؤول إلى  $+\infty$ .  
 (ب) جد العدد الطبيعي  $n$  بحيث  $S_n = \frac{3510}{81}$ .

### دورة 2016 الموضوع (2) :

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\square$  بـ :  $u_0 = 5$  و  $u_{n+1} = \frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7}$

- (1) أحسب الحدين  $u_1$  و  $u_2$ .
- (2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n > 1$ .  
 ب- بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما.  
 ج- ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب المتتالية  $(u_n)$  ؟
- (3) لنكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\square$  بـ :  $v_n = u_n - 1$ .  
 أ- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية معينا أساسها وحدها الأول .  
 ب- أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = 1 + 4\left(\frac{4}{7}\right)^n$ .  
 ج- أحسب نهاية  $(u_n)$ .

**دورة 2017 الموضوع (1) :**

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول  $u_0 = -1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

- (1) أ. برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n < 3$  .  
ب) بين أن المتتالية ( $u_n$ ) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .
- (2) ( $v_n$ ) المتتالية المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = 3 - u_n$  .  
أ) بين أن المتتالية ( $v_n$ ) هندسية أساسها  $\frac{1}{3}$  ثم عين حدها الأول .  
ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  .  
بين أن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $S_n = 3(n-1) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$  .

**دورة 2017 الموضوع (2) :**

لتكن ( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول  $u_0 = 2$  ومن أجل كل  $n$  طبيعي،  $u_{n+1} = 3u_n - 2$

- (1) أحسب  $u_1$  ،  $u_2$  ،  $u_3$  ثم خمن اتجاه تغير المتتالية ( $u_n$ ) .
- (2) نعتبر المتتالية العددية ( $v_n$ ) المعرفة بـ : من أجل كل  $n$  طبيعي،  $v_n = u_{n+1} - u_n$  .  
أ) بين أن المتتالية ( $v_n$ ) هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول .  
ب) عين  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج أن المتتالية ( $u_n$ ) متزايدة .
- (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم ،  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$  .  
أ) أحسب  $S_n$  بدلالة  $n$  .  
ب) بين أن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = S_n + u_0$  واستنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$

**دورة 2018 الموضوع (1) :**

(I) لتكن المتتاليتان العدديتان ( $u_n$ ) و ( $v_n$ ) المعرفتان كما يلي :

$u_0 = 50$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = 0.7u_n + 6$  و  $v_n = u_n - 20$

- (1) برهن أن ( $v_n$ ) متتالية هندسية أساسها 0.7 يطلب تعيين حدها الأول  $v_0$  ، وكتابة عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  .
- (2) أ. أكتب بدلالة  $n$  عبارة الحد العام  $u_n$  .

ب. عين اتجاه تغير المتتالية ( $u_n$ ) ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

(II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك في سنة 2016 . بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد .

نعتبر المنة هي الوحدة : ونرمز بـ  $u_n$  لعدد المشتركين في سنة  $2016 + n$  أي  $u_0 = 50$

- (1) ماهو عدد المشتركين في سنة 2017 ؟ ثم في سنة 2018 ؟

(2) أ. برر العبارة  $u_{n+1} = 0.7u_n + 6$  .

ب. ابتداء من أي سنة يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك ؟

**دورة 2018 الموضوع (2) :**

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة كما يلي :  $u_0 = -1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $2u_{n+1} = u_n + 6$

- (1) أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n < 6$  .

ب. أدرس اتجاه تغير المتتالية ( $u_n$ ) واستنتج أنها متقاربة .

- (2) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = u_n - 6$  .

أ. بين أن ( $v_n$ ) متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  يطلب حساب حدها الأول  $v_0$  .

ب. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

- (3) أحسب بدلالة  $n$  ما يلي :  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  و  $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

**الموضوع 2019 دورة (1):**

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة كما يلي :  $u_0 = -4$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$  .

- (1) أ) أحسب كلا من  $u_1$  و  $u_2$  .  
ب) برهن بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n < 8$  .
- (2) أدرس اتجاه تغير المتتالية ( $u_n$ ) واستنتج أنها متقاربة .
- (3) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، نضع  $v_n = u_n - \alpha$  ، حيث  $\alpha$  عدد حقيقي .  
أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$  .  
ب) عين قيمة العدد  $\alpha$  حتى تكون المتتالية ( $v_n$ ) هندسية أساسها  $\frac{3}{4}$  ، يطلب تعيين حدها الأول  $v_0$  .  
ج) نضع  $\alpha = 8$  ، عبر عن  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج أنه من أجل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = -12\left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$  .
- (4) أحسب المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$  حيث :  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  .

**دورة 2019 الموضوع (2) :**

( $u_n$ ) المتتالية الحسابية المعرفة على  $\square$  ب : 
$$\begin{cases} u_2 + 2u_5 = 27 \\ u_1 = \frac{9}{2} \end{cases}$$

- (1) أحسب حدها الأول  $u_0$  وأساسها  $r$  .
- (2) أكتب عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$  .
- (3) بين أن العدد 2019 حد من حدود هذه المتتالية ثم أحسب كلا من المجموعين  $S_1$  و  $S_2$  .  
حيث  $S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{1344}$  و  $S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{1344}$  .  
- استنتج حساب المجموع  $S_3$  حيث :  $S_3 = u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{1343}$  .
- (4) ( $v_n$ ) المتتالية العددية المعرفة على  $\square$  ب :  $v_n = e^{6-2u_n}$  .  
- أحسب المجموع  $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$  .

**دورة 2020 الموضوع (1) :**

يتقاضى موظف خلال 2019 راتبا شهريا ثابتا يقدر بـ 70000 DA ، في شهر جانفي استهلك منه 80% وابتداء من شهر فيفري قرر تخفيض مبلغ الاستهلاك شهريا بنسبة 5% من المبلغ المستهلك في الشهر الذي قبله .

- (1) أ. ماهو المبلغ المستهلك في شهر جانفي ؟  
ب. حدد المبلغ المستهلك في شهر فيفري .
- (2) نضع :  $u_1$  المبلغ المستهلك في شهر جانفي و  $u_n$  المبلغ المستهلك في الشهر  $n$  ، حيث  $n$  عدد طبيعي غير معدوم .  
عبر عن  $u_{n+1}$  بدلالة  $u_n$  واستنتج إن ( $u_n$ ) متتالية هندسية أساسها 0.95 .
- (3) اكتب عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$  .
- (4) أ. احسب المبلغ المستهلك خلال سنة 2019 .  
ب. أوجد المبلغ المدخر خلال هذه السنة .

**دورة 2020 الموضوع (1):**

( $u_n$ ) المتتالية العددية معرفة بحددها الأول  $u_0$  حيث :  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{3}{2}$  .

- (1) أ. برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n < \frac{9}{2}$  .  
ب. أدرس اتجاه تغير المتتالية ( $u_n$ ) واستنتج أنها متقاربة .
- (2) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = u_n - \frac{9}{2}$  .

أ.بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{2}{3}$  يطلب حساب حدها الأول  $v_0$ .

ب. عبر عن  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  أحسب  $S_n$  بدلالة  $n$ .

### دورة 2020 الموضوع (2):

المتتالية الهندسية  $(v_n)$  حدها الأول  $v_0$  وأساسها  $q$  موجبان تماما و :  

$$\begin{cases} \ln v_5 + \ln v_3 = 8 \ln 2 \\ \ln v_5 - \ln v_3 = 2 \ln 2 \end{cases}$$

(1) بين أن :  $v_3 = 8$  و  $v_5 = 32$ .

(2) أ.بين أن :  $q = 32$  و  $v_0 = 1$ .

ب. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$ .

ج. هل العدد 1024 حد من حدود المتتالية  $(v_n)$  ؟

(3) المتتالية  $(w_n)$  معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}$  ب :  $w_n = 2n - 3 + 2^n$

أ. تحقق أن :  $w_n = u_n + v_n$  ، حيث  $(u_n)$  متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول  $u_0$ .

ب. من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع :  $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $S_n = (n+1)(n-3) + 2^{n+1} - 1$

### دورة 2020 الموضوع (2):

المتتالية العددية  $(u_n)$  معرفة بحدها الأول  $u_0$  حيث :  $u_0 = 5$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{5}{7}u_n + \frac{6}{7}$ .

(1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n > 3$ .

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  واستنتج أنها متقاربة .

(3) المتتالية العددية  $(v_n)$  معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ب :  $v_n = u_n - 3$ .

أ.بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب. أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  .

ج . استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = 2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^n + 3$  و أحسب نهاية  $(u_n)$

(4) عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي  $n$  التي يكون من أجلها  $u_n < \frac{7}{2}$ .