

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول (3ن) أجب عن الأسئلة الآتية المستقلة عن بعضها البعض

(1) اوجد العبارة الخطية للدالة $h(x) = \cos^5 x$ ثم استنتج دالتها الأصلية

H التي تحقق $H(\pi) = 16$ (توجيه استعمل نشر $\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^5$)

(2) الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

احسب اصغر بمسافة بين المستقيمين (Γ) و (δ) بحيث

$$(\Gamma) \begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 3t + 2 \\ z = 2 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad (\delta) \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = -\alpha \\ z = 1 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

(3) بين صحة المساواة $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{4k}{4k^4 + 1} = 1 - \frac{1}{2n^2 + 2n + 1}$

(إستعمل $(4a^4 + b^4 = (2a^2 + 2ab + b^2)(2a^2 - 2ab + b^2))$)

التمرين الثاني (5ن)

لتكن المتتالية $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي $w_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

حيث e يرمز الى اساس اللوغاريتم النبيري

1) احسب w_1

باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن $w_n = e - nw_{n-1}$

2) لتكن المتتالية $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ بحيث $w_n = (-1)^n(e\varphi_n - n!)$

عبر عن φ_{n+1} بدلالة φ_n واستنتج أن حدود المتتالية (φ_n) طبيعية

برهن بالتراجع من اجل $n \in \mathbb{N}^*$ أن $n - 1 \leq \varphi_n$

3) بين ان المتتالية $(\mathcal{L}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة كما يلي $\mathcal{L}_n = \frac{1}{n! \varphi_{n+1}}$ متقاربة

التمرين الثالث (5ن)

(I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\frac{\sqrt{2}z}{2} = \sqrt{z-2}$

ا ستنتج حلول المعادلة $(\bar{z} + 2 + 2\sqrt{3}i)^2 - 2\bar{z} = 4\sqrt{3}i$ حيث $\bar{z}$ هو مرافق z

(II) المستوي منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ D,C,B,A نقط ذات اللواحق على

الترتيب $z_D = -1 + 3\sqrt{3}i, z_C = -1 + \sqrt{3}i, z_B = 1 - \sqrt{3}i, z_A = 1 + \sqrt{3}i$

أوجد زاوية و نسبته التشابه المباشر $\mathcal{S}$ الذي مركزه B ويحول C إلى A ثم اعط عبارته المركبة

عين إحداثيات صورة D بالتشابه $\mathcal{S}$ ثم إستنتج أن المثلثين BCD و BAD متشابهين

نعتبر التحويل النقطي Φ الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(Z')$ بحيث

$$2Z' = 2(-i\cos(\pi/6) + \sin(\pi/6))z - 1$$

عين طبيعة التحويل Φ وعناصره المميزة

عين العبارة المركبة للتحويل $\Phi \circ \mathcal{S}$

عين طبيعة مجموعة النقط M من المستوي (Γ) بحيث $(\Gamma): 2(Z + \bar{Z}) + Z\bar{Z} = 0$

عين صورة المجموعة (Γ) بالتحويل $\Phi \circ S$

التمرين الرابع (7ن)

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي $f(x) = (1 - 2x)e^{2x}$

نسمي (C_f) منحناها البياني في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول $2cm$

أدرس تغيرات الدالة f شكل جدول تغيراتها ثم أنشئ (C_f) في المعلم السابق

ناقش حسب قيم m عدد و اشارة حلول المعادلة $f(x) = f(m)$ حيث m و سيط حقيقي

أحسب ب cm^2 و بدلالة λ المساحة $S(\lambda)$ لحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f)

و المستقيمات التي معادلاتها $y = 0$ و $x = \frac{1}{2}$ و $x = \lambda$ بحيث $\lambda < \frac{1}{2}$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} S(\lambda)$

(II)

احسب المشتقات المتتالية $f^{(n)}$ للدالة f حتى الرتبة 4 من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

أوجد تخمينا للعبارة العامة ل $f^{(n)}$ ثم برهن بالتراجع هذا التخمين

أستنتج حلول المعادلة التفاضلية $y'' = 8(-2 - 2x)e^{2x}$

(III)

من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n المنحني $(C_{f^{(n)}})$ الممثل للدالة $f^{(n)}$ يقبل مماس يوازي

حامل محور الفواصل في النقطة $M_n(x_n, y_n)$ احسب بدلالة n كلا من x_n و y_n

بين أن المتتالية (x_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول
أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

بين أن المتتالية (y_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول
أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

الموضوع الثاني

التمرين الأول (3ن) أجب عن الأسئلة الآتية المستقلة عن بعضها البعض

(1) نعتبر المعادلة التفاضلية (E) بحيث $y'' - 2y' + y = 4e^x$ بين ان الدالة ψ

بحيث $\psi(x) = (2x^2 - 3x)e^x$ هي حل ل (E) وأستنتج دالة أصلية لدالة ψ

(2) المستوي منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ولتكن النقطة $M(z)$ ذات

عين مجموعة النقط من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق

$$\arg(\bar{z} - 2i)^2 - \arg(2\bar{z} - 4i)^2 + \arg(i + 1) = \frac{\pi}{7}$$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

بين انه اذا كان n فرديا فإن A_{n+1} يقبل القسمة على 7

التمرين الثاني (5ن)

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ و α عدد حقيقي من المجال $]0, \pi[$

لتكن (S_α) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ التي تحقق

$$(S_\alpha): OM^2 - 2 \cos(\alpha) [\overrightarrow{OM} \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})] + 3 - 4 \sin^2(\alpha) = 0$$

(1) اعط معادلة ديكارتية ل (S_α)

(2) بين ان (S_α) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها I_α و نصف وقطرها R_α

استنتج مجموعة النقط I_α عندما يسمح α المجال $]0, \pi[$

(3) عين سطوح الكرات (S_α) التي تمر بالمبدأ O

بين أن O منتصف القطعة $[I_{\pi-\alpha}I_{\alpha}]$

استنتج أن (S_{α}) و $(S_{\pi-\alpha})$ متناظران بالنسبة إلى O

4) ليكن المستوي (P) ذو المعادلة $x + y + z = 0$

عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة I_{α} على (P) ثم ادرس (P) و (S_{α})

التمرين الثالث(4ن)

1- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 2^n على 5

استنتج باقي القسمة الاقليدية ل $(2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1})$ على 5

2- بين ان العدد 131 اولي

3- عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق
$$\begin{cases} 3m + 7d = 2^n - 8 \\ ab = 5m \end{cases}$$

حيث $d = PGCD(a, b)$ و $m = PPCM(a, b)$

4- عين قيم يكون $7 < n < 15$ ثم استنتج الشئيات (a, b)

التمرين الرابع(8ن)

(I) نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $]0, +\infty[$ كما يلي $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$

نسمي (C_{f_n}) منحناها البياني في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (n عدد طبيعي غير معدوم)

أدرس تغيرات f_1 ثم عين معادلة المماس (T) للمنحني (C_{f_1}) في النقطة ذات الفاصلة 1

بين ان جميع المنحنيات (C_{f_n}) تشترك في نقطتين ثابتين عينهما

أدرس اتجاه تغيرات الدالة f_n في حالة n فردي ثم في حالة n زوجي ثم شكل جدولين لتغيراتها

أنشئ (C_{f_1}) و (C_{f_2})

$$\varphi_n = \int_1^e f_n(x) dx \quad \text{متتالية عددية معرفة ب} \quad (\text{II})$$

$$\varphi_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)\varphi_n \quad \text{ثم بين أن}$$

احسب φ_2 استنتج مساحة الحيز من المستوي المحدد ب (C_{f_1}) و (C_{f_2}) والمستقيمن ذي المعادلتين

$$x=e \quad \text{و} \quad x=1$$

(III)

$$\mathcal{W}_n = \int_1^{e^2} f_n(x) dx \quad \text{نعتبر الان} \quad (\mathcal{W}_n) \quad \text{متتالية عددية معرفة ب}$$

$$\mathcal{W}_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1)\mathcal{W}_n \quad \text{ثم بين أن} \quad (1 \leq n)$$

أستنتج $\mathcal{W}_1$ و $\mathcal{W}_2$

$$\text{لتكن الدالة } g \text{ المعرفة كما يلي } g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} \quad \text{على المجال }]0, +\infty[$$

أوجد حجم المجسم المولد عن دوران منحي الدالة g حول حامل محور الفواصل في المجال

$$x \in [1, e^2]$$

الموضوع الثالث

التمرين الأول (4ن) أجب عن الأسئلة الآتية المستقلة عن بعضها البعض

(1) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a و b و c بحيث

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

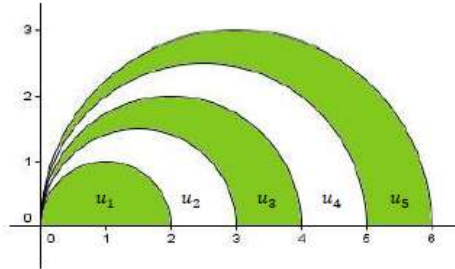
احسب القيمة المتوسطة للدالة $h(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ في المجال $[0, -3]$

(2) لتكن المتتالية (ϖ_n) المعرفة بمجدها العام كما يلي $\varpi_n = \frac{11}{2} + \frac{-5n}{2}$

برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم صحة المساواة

$$\varpi_1 + 2\varpi_2 + 3\varpi_3 + \dots + n\varpi_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$$

(3) أثبت ان المتتالية (u_n) للمساحات كما في الشكل أدناه هي متتالية حسابية اوجد عبارة حددها العام والحد u_{100}



التمرين الثاني (5ن)

(1) نعتبر الدالة φ المعرفة على $]0, +\infty[$ كما يلي $\varphi(x) = \frac{x^2-1}{4} - 2\ln x$

ادرس تغيرات الدالة φ

برهن أن للمعادلة $\varphi(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث $3 < \alpha < 4$ ثم انشئ (C_φ)

(2) نعتبر الدالة μ المعرفة على $[3, +\infty[$ كما يلي $\mu(x) = \sqrt{1 + 8\ln x}$

برهن أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تكافئ المعادلة $\mu(x) = x$

برهن أن $\varphi(x) \geq 3$ و أن $0 < \varphi'(x) \leq \frac{4}{9}$

(3) نعتبر المتتالية (ζ_n) المعرفة كما يلي $\begin{cases} \zeta_0 = 3 \\ \zeta_{n+1} = \mu(\zeta_n) \end{cases}$

برهن بالتراجع أن $\zeta_n \geq 3$

باستعمال التكامل برهن أن $0 < \zeta_{n+1} - \alpha \leq \frac{4}{9}(\zeta_n - \alpha)$

من العبارة الأخيرة اوجد حصرا احد طرفيه $\left(\frac{4}{9}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n$

التمرين الثالث (5ن)

يحتوي كيس على 3 كرات بيضاء ، كرتين صفراوين وكرتين حمراوين. نسحب كرتين على التوالي (بدون إرجاع).

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة و Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الصفراء المسحوبة.

(1) عين القيم الممكنة لـ X .

(2) عين قانون احتمال المتغير X .

(3) احسب الأمل الرياضي والتباين للمتغير X .

(4) أجب عن نفس الأسئلة السابقة بالنسبة للمتغير Y .

(5) نعتبر المتغير العشوائي Z حيث $Z = X + Y$ ، وليكن N المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

• عبر عن Z بدلالة N . • استنتج قانون احتمال Z .

• احسب $E(Z)$ الأمل الرياضي لـ Z و $\sigma(Z)$ تباين Z .

التمرين الرابع (6ن)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

لتكن الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = e^{-x} \cos(4x)$$

الشكل ادناه هو تمثيلها البياني Γ في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $g(x) = e^{-x}$

و نرمز بـ C إلى تمثيلها البياني في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$:

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$$

ب- استنتج نهاية f عند $+\infty$.

2. عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنيين Γ و C .

3. نعرف المتتالية (u_n) على N بـ $u_n = f\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

أ- بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و ادرس تقاربها.

4. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$:

$$f'(x) = e^{-x} [\cos(4x) + 4\sin(4x)]$$

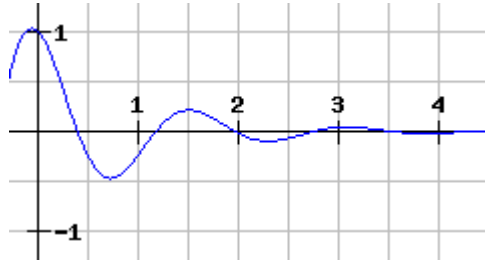
ب- استنتج أن المنحنيين Γ و C لهما نفس المماس عند كل نقطة من نقط تقاطعهما.

5. أعط قيمة مقربة إلى 10^{-1} لمعامل توجيه المماس T

للمنحني Γ عند النقطة التي فاصلتها $\frac{\pi}{2}$

• أتمم الشكل السابق برسم المماس T و المنحني C .

اوجد مساحة الحيز المحدد بـ Γ و C في المجال $[0; 1; 5]$



عن الأستاذ لعلاونة علي