

## ﴿الاحتمالات﴾

## 1- تذكير :

التجربة العشوائية : هي كل تجربة لا يمكن توقع نتائجها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة .

مجموعة الإمكانات : مجموعة النتائج الممكنة تسمى مجموعة مجموعة الإمكانات أو مجموعة المخارج أو المجموعة الشاملة ويرمز لها بالرمز  $\Omega$  وكل عنصر من  $\Omega$  يسمى إمكانية

الحوادث : كل مجموعة جزئية من  $\Omega$  تسمى حادثة ، وليكن  $A$  جزءا من  $\Omega$  نقول عندئذ أن  $A$  حادثة

- إذا احتوت الحادثة  $A$  على عنصر وحيد فإنها تدعى حادثة أولية
- إذا احتوت الحادثة  $A$  على أكثر من عنصر تسمى حادثة مركبة
- $\Omega$  هي الحادثة الأكيدة و  $\emptyset$  هي الحادثة المستحيلة .
- إذا كانت  $A$  حادثة ما فإن حادثتها العكسية يرمز لها بالرمز  $\bar{A}$  وهي التي تحتوي كل عناصر  $\Omega$  ما عدا عناصر  $A$
- لتكن  $A$  و  $B$  حادثتين :
- الرمز  $A \cap B$  يعني الحادثة  $A$  و  $B$  وهي التي تحوي العناصر المشتركة بين  $A$  و  $B$
- الرمز  $A \cup B$  يعني الحادثة  $A$  أو  $B$  وهي التي تحوي عناصر  $A$  وعناصر  $B$  أيضا
- إذا كانت  $A \cap B$  خالية أي  $\emptyset$  نقول عندئذ أن الحادثتين  $A$  و  $B$  غير متلائمتين .

مثال :

- نرمي زهرة نرد غير مزيفة ذات ستة أوجه مرقمة من 1 الى 6 .
- ✓ الحادثة  $A$  " الحصول على رقم زوجي "
  - ✓ الحادثة  $B$  " الحصول على رقم أكبر أو يساوي 4 "
  - ✓ الحادثة  $C$  " الحصول على رقم 6 "
  - ✓ الحادثة  $D$  " الحصول على رقم زوجي أكبر أو يساوي 4 "
  - ✓ الحادثة  $F$  " الحصول على رقم زوجي أو أكبر أو يساوي 4 "

## 2 - قانون الاحتمال :

لتكن  $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  مجموعة الإمكانات (المخارج) لتجربة عشوائية ذات  $n$  عنصر ، يعرف قانون احتمال على  $\Omega$  إذا ارفقنا كل مخرج  $e_i$  من  $\Omega$  بعدد موجب  $P_i$  مع  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  بحيث يكون  $P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$

- ✓ يسمى العدد  $P_i$  احتمال تحقق المخرج  $e_i$
- ✓ إذا كانت  $A$  حادثة فإن  $P(A)$  يرمز الى احتمال الحادثة  $A$  والذي يساوي مجموع احتمالات الحوادث الأولية للحادثة  $A$
- ✓ من أجل كل  $i \in \{1, 2, \dots, n\} : 0 \leq P(e_i) \leq 1$

### مثال :

كيس به كرتان حموان و 4 كرات خضراء و كرة سوداء نسحب كرة واحدة ونسجل لونها ، ما هي احتمالات الحوادث التالية :

$$1 \quad A = \text{"الحصول على كرة حمراء"}$$

$$2 \quad B = \text{"الحصول على كرة خضراء"}$$

$$3 \quad C = \text{"الحصول على كرة سوداء"}$$

### 3 - تساوي الاحتمال :

عندما يكون لجميع الحوادث الأولية لتجربة عشوائية نفس الاحتمال نقول عن التجربة أنها متساوية الاحتمال

و أن قانون الاحتمال متساوي التوزيع ويكون :  $P_1 = P_2 = P_3 = \dots = P_n = \frac{1}{n}$  ويكون احتمال حادثة

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega} \text{ في هذه الحالة :}$$

### ملاحظة :

يشار الى تساوي الاحتمال من خلال عبارات تتضمنها نصوص التجربة مثل ان يقال ( زهرة نرد غير مزيفة أو قطعة نقود متوازنة أو كريات لا نفرق بينها باللمس )

### مثال :

نرمي قطعة نقود متوازنة ثلاث مرات متتالية ، نعتبر الحادثة  $A$  الحصول على ظهريين و وجه نرمر للظهر  $P$  بالرمز و للوجه بالرمز  $F$ .

1. أنشئ مخططا يوضح كل الحالات .
2. استنتج احتمال الحادثة  $A$  .

### 4 - خواص الاحتمالات :

$\Omega$  مجموعة الإمكانات معرف عليها قانون احتمال  $P$  :

$$1 \quad \text{من أجل كل حادثة } A \text{ فإن } 0 \leq P(A) \leq 1 .$$

$$2 \quad P(\emptyset) = 0 \text{ و } P(\Omega) = 1$$

$$3 \quad \text{إذا كانت } A \text{ و } B \text{ حادثين كيفيتين فإن : } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$4 \quad \text{إذا كانت } A \text{ و } B \text{ حادثين غير متلائمتين } (A \cap B = \emptyset) \text{ فإن } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$5 \quad \text{إذا كانت الحادثة } A \text{ جزءا من الحادثة } B \text{ فإن } (A \subset B) \text{ فإن } P(A) \leq P(B)$$

$$6 \quad \text{إذا كانت } \bar{A} \text{ الحادثة العكسية للحادثة } A \text{ فإن } P(\bar{A}) = 1 - P(A) \text{ أي } P(\bar{A}) + P(A) = 1 .$$

## مثال 01 :

عند رمي زهرة نرد غير مزيفة أوجهها مرقمة من 1 إلى 6 ، نعتبر الحوادث :

1 = "الحصول على رقم زوجي"

2 = "الحصول على رقم من مضاعفات 3"

عين الحوادث و احسب احتمالاتها :  $A, B, \bar{A}, A \cap B, A \cup B$

## مثال 02 :

$A$  و  $B$  حادثتان حيث :  $P(A) = 0,3, P(A \cup B) = 0,7, P(A \cap B) = 0,2$  ، احسب :  $P(B)$

## مثال 03 :

$A$  و  $B$  حادثتان حيث :  $P(A) = 0,45, P(B) = 0,37, P(A \cup B) = 0,82$  ، اثبت أن  $A$  و  $B$  غير متلائمتين

## 5 - أمل وتباين والانحراف المعياري لقانون الاحتمال :

لتكن  $\Omega$  مجموعة الإمكانات لتجربة عشوائية نتائجها أعداد حقيقية حيث :

$\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  و  $P$  احتمال على  $\Omega$  ، نضع  $P_i = P(e_i)$

➡ أمل قانون الاحتمال هو العدد  $E$  المعروف كما يلي :  $E = \sum_{i=1}^n e_i P_i$

➡ تباين قانون الاحتمال هو العدد  $V$  حيث :  $V = \sum_{i=1}^n (e_i - E)^2 P_i$

➡ الانحراف المعياري لقانون الاحتمال هو العدد  $S$  حيث :  $S = \sqrt{V}$

➡ يمكن أن نكتب :  $V = \sum_{i=1}^n e_i^2 P_i - E^2$

## 6 - المتغير العشوائي :

لتكن  $\Omega$  المجموعة الشاملة .

كل دالة عددية معرفة على  $\Omega$  وتأخذ قيمها في  $\mathbb{R}$  تسمى متغيراً عشوائياً .

مثال : نرمي ثلاث مرات متتابة قطعة نقدية متوازنة ، نربح 15 دينار كلما كانت النتيجة (ظهر P) ونخسر 5 دینارات كلما كانت النتيجة

(وجه F) ، وليكن الربح الجبري المحصل عليه بعد 3 رميات .

## قانون الاحتمال لمتغير عشوائي :

ليكن  $P$  احتمال معرف على  $\Omega$  ،  $X$  متغير عشوائي معرف على  $\Omega$  و  $X(\Omega)$  مجموعة منتهية ، عندما نرفق بكل قيمة  $x$  من  $X$  احتمالات الحوادث  $X = x_i$  نقول أننا نعرف قانون احتمال  $P_x$  للمتغير العشوائي  $X$  .

|              |      |      |      |      |         |
|--------------|------|------|------|------|---------|
| $x_i$        | .... | .... | .... | .... | المجموع |
| $P(X = x_i)$ | .... | .... | .... | .... | 1       |

مثال :

نسحب كرة من صندوق يحتوي 10 كرات منها 5 بيضاء و 3 حمراء و 2 سوداء ، نرفق بكل كرة بيضاء العدد 2 وبكل كرة العدد 2- وبكل كرة سوداء العدد 1.

01/الامل الرياضي للمتغير  $X$  هو العدد حيث :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P_i$$

02/التباين للمتغير  $X$  هو العدد  $V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 P_i$

03/الانحراف المعياري للمتغير  $X$  هو العدد  $S = \sqrt{V(X)}$

04/ويمكن كتابة  $V(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 P_i - (E(X))^2$



## القوائم ، الترتيبات و التوفيقات :

$n$  و  $p$  عددان طبيعيين غير معدومين ، نعتبر التجربة سحب  $p$  عنصر من مجموعة ذات  $n$  عنصرا :

| العدد | الترتيب | التكرار | السحب                            |
|-------|---------|---------|----------------------------------|
|       | م       | م       | على التوالي بالارجاع : قوائم     |
|       | م       | غ م     | على التوالي بدون إرجاع : ترتيبات |
|       | غ م     | غ م     | في أن واحد : توفيقات             |

حيث :  $A_n^p = n(n-1) \times \dots \times (n-p+1)$  ،  $A_n^n = n! = n(n-1)(n-2) \dots \times 2 \times 1$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} , C_1^0 = 1 , C_n^n = 1 , C_n^1 = n$$

امثلة :

- 1 كم عدد من 4 أرقام يمكن تشكيل باستخدام أرقام
- 2 لتكن ، كم عدد من 3 ارقام مختلفة من يمكن تشكيله .
- 3 نريد تشكيل لجنة من رئيس و نائب 1 ونائب 2 من قسم 3 علمي 1 (31 تلميذ) بكم طريقة يمكن تشكيلها .

## دستور ثنائي الحد :

$n$  و  $p$  عددان طبيعيين ،  $n$  عدد طبيعي ( $n \geq 1$ ) لدينا :  $(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p$

## الاحتمالات الشرطية :

- **الحوادث المستقلة** : نقول عن حادثين  $A$  و  $B$  مستقلين إذا وفقط إذا كان :  $p(a \cap b) = P(A) \times P(B)$
- **الاحتمال الشرطي** : ليكن  $P$  احتمالا علي المجموعة  $\Omega$  و  $A$  حادثة حيث  $P(A) \neq 0$  من اجل كل حادثة  $B$  ،

نسمي احتمال "  $B$  علما ان  $A$  محققة " العدد  $P_A(B)$  والمعروف كما يلي :  $P_A(B) = \frac{P(a \cap b)}{P(A)}$

ويمكن الكتابة أيضا :  $P_A(B) = P(B/A)$

**مثال :** عند رمي زهرة نرد غير مزيف ، ما هو احتمال الحصول على رقم اكبر من 3 علما أنه فردي .

## قانون الاحتمالات الكلية :

$A$  حادثة احتمالها غير معدوم ،  $\bar{A}$  حادتها العكسية ، لدينا :

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A})$$

## سلسلة الاحتمالات

**01** قطعة نقدية غير مزيفة ذات وجه  $F$  وظهر  $P$  ، نرمي القطعة 4 مرات متتالية ونعتبر الحوادث التالية :

A : " الحصول على أربعة أوجه "

B : " الحصول على وجهين و ظهريين "

C : " الحصول على ثلاث أوجه و ظهر "

**1** قم بإنشاء شجرة الاحتمالات التي تتمثل هذه الوضعية .

**2** إعط عدد الحالات الممكنة .

**3** احسب احتمال : A ، B و C

**02** كيس A به أقلام 6 زرقاء و 5 حمراء ، و آخر به أقلام 9 زرقاء و 5 حمراء نسحب بطريقة عشوائية قلما من كل كيس .

**1** ما هو عدد الحالات الممكنة لهذا السحب ؟

**2** احسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية :

- E : " الحصول على قلمين حمراوين "

- F : " الحصول على قلم واحد أحمر "

- G : " الحصول على الأقل على قلم أحمر "

**03** كيس يحتوي على 20 كرية منها 15 بيضاء و 5 سوداء ، نسحب علي التوالي كرتين دون ارجاع، احسب احتمال

الحوادث التالية :

- E : " الكرتين بيضاويتين "

- F : " الكرية الأولى سوداء و الثانية بيضاء "

- G : " الكرتين من نفس اللون "

- H : " الكرتين سوداويتين "

**04** نرمي زهرة نرد مزيف أوجهه الستة تحمل الأرقام من 1 إلى 6 بحيث إحتمال ظهور كل وجه معطي كما يلي :

$$p(6)=0,05, \quad p(5)=0,3, \quad p(4)=0,15, \quad p(3)=0,25, \quad p(2)=0,13, \quad p(1)=0,12$$

- 1- حسب احتمال الحادثة  $A$  ظهور رقم زوجي
- 2- حسب احتمال الحادثة  $B$  ظهور رقم فردي
- 3- حسب احتمال الحادثة  $C$  ظهور رقم أولي
- 4- حسب احتمال الحادثة  $D$  ظهور رقم مضاعف للعدد 3

**05** يحتوي كيس 15 كرة مرقمة من 1 إلى 15 ، نسحب عشوائيا كرة واحدة ونسجل رقمها :

- 1- حين المجموعة الشاملة  $\Omega$  .
- 2- حين الحادثة  $A$  الحصول على رقم مضاعف للعدد 5 .
- 3- حين الحادثة  $B$  الحصول على رقم مضاعف للعدد 3 .
- 4- حين الحوادث :  $A \cap B$  و  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  ثم استنتج الحادتين :  $\bar{A} \cap \bar{B}$  و  $\overline{A \cap B}$  .

**06** يحتوي كيس على 7 كرات منها 3 كرات سوداء تحمل الأرقام 1 ، 2 و 3 و 4 كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، و 4 ، نسحب عشوائيا من الكيس كرة واحدة

1- حسب احتمال الحوادث التالية :

$N$  : كرة سوداء ،  $B$  : كرة بيضاء ،  $C$  : كرة تحمل رقم زوجي .

2- حسب احتمال الحوادث :  $N \cap B$  ،  $N \cap C$  ،  $B \cap C$  ،  $N \cup B$  ،  $N \cup C$  ،  $B \cup C$  .

**07** إليك قانون احتمال الاتي :

|       |     |     |      |     |      |     |
|-------|-----|-----|------|-----|------|-----|
| $x_i$ | -6  | -5  | -4   | 4   | 5    | 8   |
| $p_i$ | 0,1 | 0,2 | 0,05 | 0,4 | 0,05 | 0,2 |

- 1- حسب الامل الرياضي
- 2- حسب التباين و الانحراف المعياري

**08** نعتبر المجموعة  $\Omega = \{-1, 0, 2, 5, 6, 10\}$  ونعرف قانون الاحتمال على  $\Omega$  كما في الجدول :

|       |                |                |                |                |                |     |
|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|
| $e_i$ | -1             | 0              | 2              | 5              | 6              | 10  |
| $p_i$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{4}{15}$ | $a$ |

- 1- عين العدد الحقيقي
- 2- حسب الامل لهذا القانون .
- 3- حسب التباين ثم الانحراف المعياري لهذا القانون

**09** نرمي قطعة نقدية غير مزيفة 3 مرات متتابة وليكن  $X$  المتغير العشوائي يرفق بكل 3 رميات متتابة عدد الأوجه الظاهرة  $F$

1 أخط الاحالات الممكنة

2 أخط مجموعة قيم  $X$  .

3 عين قانون الاحتمال للمتغير  $X$  .

4 عين الامل الرياضي للمتغير  $X$

5 حسب التباين و الانحراف المعياري للمتغير  $X$  .

**10** يحتوي وعاء على 6 قريصات لا نفرق بينها باللمس كل منها مرقمة بعدد اولي ينتمي الى مجموعة الاعداد الأولية الستة

الأولى ، نسحب من الوعاء قريصتان في أن واحد عشوائيا ، وليكن  $X$  هو المتغير عشوائيا أي يأخذ مجموع الرقمين اللذان

تحملهما القريصتان المسحوبتان

1 عين قيم المتغير العشوائي  $X$  .

2 كتب قانون الاحتمال للمتغير  $X$  .

3 حسب الامل الرياضي .

4 حسب التباين و الانحراف المعياري .

**11** يرمي لاعب زهري نرد متوازنين على شكل رباعي أوجه كل منهما تحمل الأرقام 1,2,3,4 وليكن  $X$  المعرف كما يلي

أ) إذا كان كان مجموع الرقمين الظاهرين زوجيا يربح نفس مجموع الرقمين بالدينار .

ب) إذا كان كان مجموع الرقمين الظاهرين فرديا يخسر نفس مجموع الرقمين بالدينار .

1 عين قيم المتغير العشوائي  $X$

2 عين قانون احتمال المتغير  $X$

3 حسب الامل الرياضي ، التباين و الانحراف المعياري للمتغير  $X$  .

**12** مجموعة مكونة من 100 شخص 60% رجال ونعلم أن 20% من الرجال و 25% من النساء يتكلمون الفرنسية

نختار شخصا عشوائيا من هذه المجموعة ، ما هي احتمالات الحوادث التالية :

1 A - " رجل يتكلم الفرنسية "

2 B - " امرأة تتكلم الفرنسية "

3 C - " شخص يتكلم الفرنسية "

**13** نظم 5 لاعبين  $A, B, C, D, E$  منافسة في لعبة الشطرنج ، نفرض ان اللاعبين  $A, B$  و  $C$  لهم نفس الاحتمال للربح واللاعبين  $D$  و  $E$  لهما نفس الاحتمال للربح و أن اللاعب  $A$  له ثلاث مرات حظوظ الربح للاعب  $D$  .

1. احسب احتمال ربح كل لاعب .

2. احسب احتمال ربح  $D$  أو  $E$  .

3. ما هو احتمال ربح  $A$  أو  $B$  أو  $C$  .

4. ما هو احتمال أن  $B$  لا يربح .

**14** كيس يحتوي علي 8 كرات منها 4 كرات حمراء و 3 كرات خضراء وكرة بيضاء ، نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كرات من الكيس ، نسمي  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق عدد الالوان المحصل عليها

1. احسب عدد الحالات الممكنة .

2. احسب الاحتمالات التالية : - 3 كرات من نفس اللون - كرة علي الاقل حمراء - كرتين علي الاكثر حمراء

3. ما هي قيم  $X$

4. احسب الاحتمالات التالية :  $P(x=1)$  ،  $P(x=3)$  واستنتج  $P(x=2)$

5. احسب الامل الرياضي  $E(X)$  و التباين  $V(X)$  ثم الانحراف المعياري  $\delta(X)$

**15** يحتوي كيس علي اربع كرات بيضاء تحمل الارقام 0،1،1،2 وأربع كرات حمراء تحمل الارقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كرات من الكيس ، وليكن  $X$  الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات التي تحمل الرقم 1

1. ما هو احتمال الحصول علي 3 كرات من نفس اللون .

2. ما هو احتمال الحصول علي 3 كرات تحمل نفس الرقم .

3. ما هو احتمال الحصول علي 3 كرات ارقامها مختلفة مثنى مثنى .

4. عين قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$

5. احسب الامل الرياضي  $E(X)$

6. احسب التباين  $V(X)$

7. احسب الانحراف المعياري  $\delta(X)$

**16** يضم كيس 5 كرات متماثلة منها 3 بيضاء والباقي سوداء، نسحب كرتين عشوائيا ،نعتبر عدد الكرات البيضاء المحصل عليها عين قانون احتمال في كل حالة

أ) السحب على التوالي دون ارجاع .

ب) السحب على التوالي مع الارجاع .

ج) السحب دفعة واحدة .

نفرض أن احتمال الازدياد للجنسين ( الذكر و الانثى ) متساوي مهما كانت رتبة هذه الولادة ، نعتبر مجموعة تمثل

عائلات لها طفلان ونختار منها عشوائيا عائلة

1. احسب احتمال الحوادث التالية :

A : " العائلة لها ذكران "

B : " الطفل الأكبر ذكر "

C : " العائلة لها على الأقل ذكر "

D : " الطفل الأصغر بنت "

2. إذا علمت أن الطفل الأكبر ذكر احسب احتمال أن العائلة لها ذكران .

3. احسب :  $P_A(C)$  ،  $P_D(A)$  ،  $P_C(A)$  .

## هدية :

|                              |                                 |
|------------------------------|---------------------------------|
| و كنت أضنها يسيــــــــرات   | تكدست في رأسي المشكلات          |
| رأيت كنوز متالآت             | دخلت مغارة الرياضيات            |
| هندسية وأخرى حسابية المكونات | جائتي الاعداد متتاليات هذه      |
| بين عمودين من أعمدة المحددات | أسرعت للخروج فقيدتني المتسلسلات |
| هربت من احدي المقذوفات       | قفزت الى رأسي الاحتمالات        |
| فسالت عن المنحنيات           | وحاولت توحيد المقامات           |
| وجدت نفسي أسير الفئات        | قالو عليك بالمنحنيات            |
| وكبلتني قيود المتابينات      | تكالبت علي أذرع اللوغاريتمات    |
| سرت وحيدا علي محور السينات   | فعلمت أنه لا مفر من الرياضيات   |