

٤

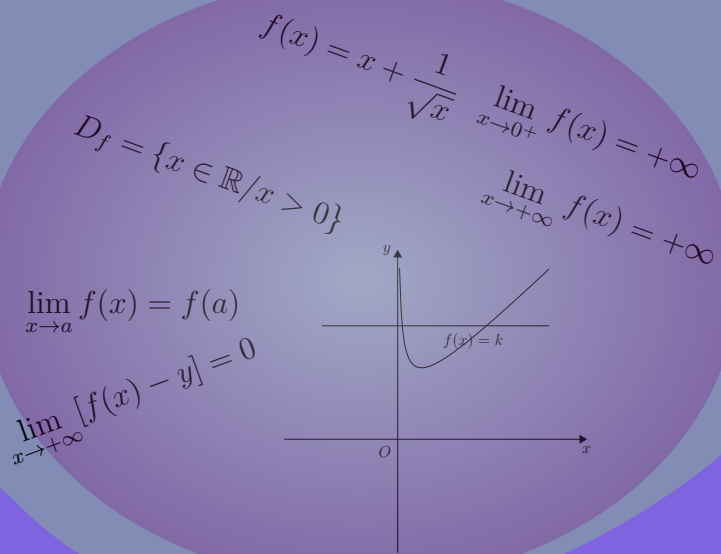
السنة الثالثة ثانوي

سلسلة إيلوت

الرياضيات

المحور الأول :

النهايات والاستمرارية



إعداد : شطاح أسامة عبد المنعم

النهايات والإستمرارية

تمرين (01) :

أحسب النهايات التالية إن وجدت :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2018x - x^3 + 2019x^2 + 2020$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(5 - \frac{4}{(x-3)^2} \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^3 + 9x - 1}{7x^2 - 5x + 2}$

4. $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 25}$

5. $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 25}$

6. $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 25}$

7. $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 25}$

تمرين (02) :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + \frac{2}{x} & ; x > 0 \\ \frac{x^2 + 3x}{x + 1} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)), \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

تمرين (03) :

أحسب نهايات الدوال الآتية عند أطراف مجال التعريفها :

1. $f_1(x) = \frac{2x^2 + x + 3}{-x^2 + x + 2}$

8. $f_8(x) = \frac{|x - 1|}{x^2 - 1}$

2. $f_2(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

9. $f_9(x) = \frac{x^2 + 3}{|x - 1|}$

3. $f_3(x) = \frac{-2x^3 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3}$

10. $f_{10}(x) = \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right|$

4. $f_4(x) = \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^2 - 4x + 4}$

5. $f_5(x) = -3x + 1 - \frac{x}{(x - 1)^2}$

6. $f_6(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x - 1}{x^2}$

7. $f_7(x) = \frac{-2x^3 + 4x + 3}{x - 4x + 3}$

تمرين (04) :

من أجل تحديد النهاية عند 0^+ و عند $+\infty$ للدالة f المعرفة على

$$f(x) = \sqrt{\frac{6x + 5}{x}} \quad \text{بـ} :]0, +\infty[$$

$$f(x) = \sqrt{g(x)} \quad \text{حيث : } g(x) = \sqrt{g(x)}$$

$$(2) - \text{أحسب نهاية الدالة } g \text{ عند } 0^+ \text{ وعند } +\infty$$

1. تذكر : حالات عدم التعيين : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \times 0$ (3) - استنتج نهاية الدالة f عند حدود مجال تعريفها

تمرين (05) :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x - 1}{x + 4}} \quad \text{لتكن الدالة } f \text{ المعرفة بـ} :$$

عين مجموعة تعريف الدالة f ثم أدرس النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها ؟

تمرين (06) :

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{لتكن الدالة } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R}^* \text{ بـ} :$$

(1) - ما هي نهاية الدالة $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$ ؟ هل يمكن استنتاج نهاية الدالة f عند $+\infty$ ؟(2) - أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

تمرين (07) :

(1) - أحسب النهايات الآتية إن وجدت :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\pi - 2x)$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 2)^2$

3. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{x - \pi}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1}$

(2) - إليك جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
f	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$

أوجد باستعمال هذا الجدول النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(-1 + \frac{1}{x}\right), \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(-1 + \frac{1}{x}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(\sqrt{x})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right), \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2 - x^2}{2 + x^2}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) + 3}, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x) + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x^2 + 1}{2x + 1}\right)$$

تمرين (08) :

دالة معرفة على $[0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ (1) - تحقق أن لدينا حالة عدم التعيين لما يؤوال x إلى $+\infty$ (2) - اثبت أنه من أجل كل $x > 0$ ، $f(x) = x\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$ (3) - استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

تمرين (09) :

لتكن الدالة f المعرفة على $D_f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}, 2\}$ بـ :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)(2x-1)}$$

(1) - ماهي النهاية عند الدالة $x \mapsto x^2 - 5x + 6$ ؟ هل يمكن استنتاج نهاية الدالة f عند 2 ؟

(2) - أثبت أنه من أجل كل x من D_f ، $f(x) = \frac{x-3}{2x-1}$

(3) - استنتج نهاية الدالة f عند 2

تمرين (10) :

لتكن الدالة f المعرفة على $]1, +\infty[$ بـ :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - x}$$

(1) - تحقق أن لدينا حالة عدم التعيين لماؤول x إلى $+\infty$

(2) - اضرب و اقسم العبارة $\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - x}$ بالعبارة

$$\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - x}$$

(3) - أثبت أنه من أجل كل $x \leq 1$ ،

$$f(x) = \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}}$$

(4) - استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

تمرين (11) :

أحسب النهايات الآتية إن وجدت :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{1 - \sqrt{3x-5}}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3} - 2x + 4 \quad 10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 6}{-3x^2 - 7x + 6}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x\sqrt{x^2 + x} - 2x^2 - x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1})$$

تمرين (12) :

لتكن f الدالة المعرفة على $]1, +\infty[$ بـ :

(1) - أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ ،

$$\frac{2x+1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{2x-1}{x-1}$$

(2) استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

تمرين (13) :

(1) - أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos(x)} \leq 1$$

لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

(2) - أدرس نهاية f عند $-\infty$

تمرين (14) :

(1) - أحسب النهايات الآتية إن وجدت :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{\sin(5x)}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2 \cos x \quad 3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x) + 1}{1 + x}$$

(2) - (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$ فإن :

$$1 \leq \frac{x}{x+1} \leq \frac{1}{2}$$

(ب) - استنتج النهايتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x+1)\sqrt{x}}$$

تمرين (15) :

نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$$

(1) - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-2)]$ ثم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) - استنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$

(3) - أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(4) - بين أنه يوجد عددان حقيقيان a و b بحيث :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x-2)] = b \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

(5) - استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ_2) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلته .

تمرين (16) :

لتكن الدالة f المعرفة على $]5, +\infty[\cup]-\infty, -1]$ بـ :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

برهن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائليين (Δ_1) و (Δ_2) يطلب تعيين معادلتهما .

تمرين (17) :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

تمرين (20) :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	1	$+\infty$	2

باستعمال جدول التغيرات المعطى عين :
(1) - مجموعة تعريف الدالة f

(2) - النهايات على أطراف مجال التعريف

(3) - معادلة لكل مستقيم مقارب لـ (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ومتجانس
(4) - استنتج الوضع النسبي لهذه المستقيمات مع (C_f)

تمرين (21) :

x	$-\infty$	-5	-2	0	4	$+\infty$		
$f'(x)$	-		+	0	-	+	0	-
$f(x)$	2 ↘ $-\infty$		-1 ↗ ↘ $-\infty$ $-\infty$		3 ↗ ↘ $-\infty$ 1			

باستعمال جدول التغيرات المعطى عين :
(1) - مجموعة تعريف الدالة f

(2) - النهايات على أطراف مجال التعريف

(3) - معادلة لكل مستقيم مقارب لـ (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ومتجانس

تمرين (22) :

لتكن الدالة f المعرفة على $]-2, 3[$ كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & x \in [-2, 0[\\ x & x \in [0, 3[\end{cases}$$

(1) - مثل بيانيا الدالة f . هل تقبل الدالة f نهاية عند 0 ؟

(2) - هل الدالة f مستمرة على $]-2, 3[$ ؟

(3) - أذكر مجالا تكون الدالة f مستمرة عليه

تمرين (23) :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2, 1[$ كما يلي :

$$f(x) = x(x + E(x))$$

حيث $E(x)$ هي دالة الجزء الصحيح لـ x

(1) - عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية:

$$[0, 1[, [-1, 0[, [-2, -1[$$

(2) - ارسم في المعلم م،م $(O, \vec{i}, \vec{j})$ المنحنى الممثل للدالة f .

(3) - هل الدالة f مستمرة على $[-2, 1[$ ؟

(1) - أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

(2) - برهن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ_1) و (Δ_2) يطلب تعيين معادلتها .

(4) - ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لكل من (Δ_1) و (Δ_2) .

تمرين (18) :

نعتبر الدالة f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ ب :

$$g(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 + 10x + 15}{x^2 + 2x + 5} \quad f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

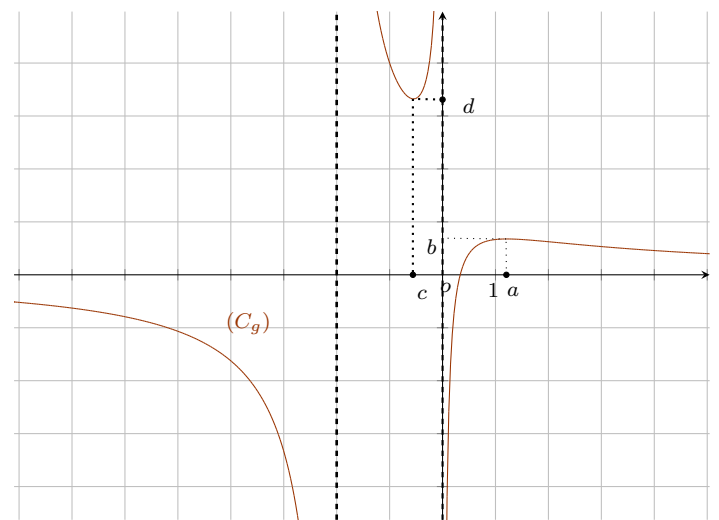
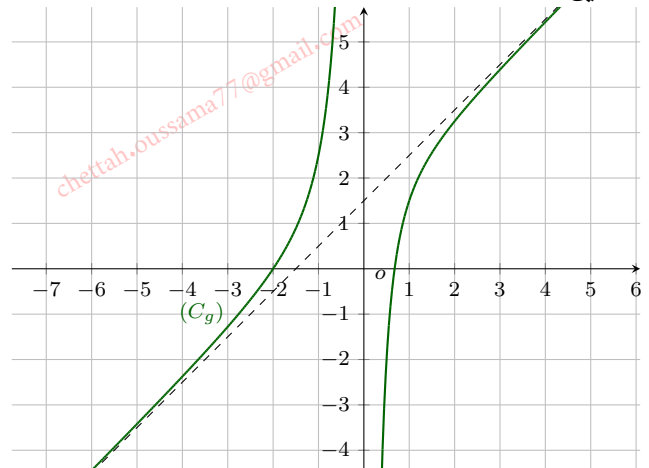
(1) أثبت وجود مستقيم مقارب المائل للمنحنى للدالة g بجوار $+\infty$

(2) - بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$ ثم ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ)

تمرين (19) :

f و g دالتان عدديتان تمثيلها البياني على الترتيب (C_f) و (C_g)

- أنظر الشكلين -



(1) - عين مجموعة تعريف كل من الدالة f و g

(2) - عين نهايات الدوال f و g

(3) - أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لكل المنحنيين (C_g) و (C_f)

(4) - شكل جدول تغيرات الدالتين f و g

تمرين (24) :

أدرس استمرارية الدالة f عند x_0 في كل حالة من الحالتين التاليتين :

$$(1) \quad x_0 = 0; \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad x_0 = 0; \quad f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{2} \sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ x & x = 0 \end{cases}$$

تمرين (25) :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$f(x) = 2x + \frac{x^2 - 5x + 6}{|x^2 - 9| - |x - 3|}$$

(1) - حدد مجموعة تعريف الدالة f

(2) - لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0, 6[$ كما يلي :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 3 \\ \frac{41}{7} & x = 3 \\ f(x) & 3 < x < 6 \end{cases}$$

- هل الدالة g مستمرة عند $x_0 = 3$ ؟ هل الدالة مستمرة على المجال $]0, 6[$ ؟

تمرين (26) :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} & x \neq 3 \\ 2 & x = 3 \end{cases}$$

- عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

تمرين (27) :

لتكن $E(x)$ هي دالة الجزء الصحيح ل x

- أدرس إستمرارية الدالة f على $\mathbb{Z}$ المعرفة كالآتي :

$$f(x) = E(x) - [x - E(x)]^2$$

تمرين (28) :

(I) - برهن باستعمال نظرية القيم المتوسطة أن المعادلات تقبل حلا حقيقيا على الأقل في كل حالة من الحالات التالية :

$$1. \quad x^3 - 4x = -2, \quad x \in [-3, -2]$$

$$2. \quad 4x^3 + 3 = 0, \quad x \in [-1, 0]$$

$$3. \quad x^3 - 2x + 1 = 0, \quad x \in [-2, -1]$$

$$4. \quad x^3 - 3x^2 + 3 = 0, \quad x \in [1, \frac{3}{2}]$$

$$5. \quad \cos(2x) = 2 \sin(x) - 2, \quad x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$$

(II) - لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 3x^3 - 2x - \frac{1}{4}$

² ملاحظة : يمكن للتلميذ إستعمال الإشتقاق لدراسة اتجاه التغير كونه مدرج في دروس سنة ثانية

(1) - أحسب $f(-1), f(\frac{1}{2}), f(0), f(1)$.
(2) - استنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل ثلاث حلول في المجال $] -1, 1[$

تمرين (29) :

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ حيث جدول تغيراتها كما يلي :

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-2	5	-3	8

(1) - عين عدد حلول المعادلات التالية محددًا المجال الذي ينتمي إليه كل حل : $f(x) = 9, f(x) = 2, f(x) = 0$

تمرين (30) :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

(1) - أدرس اتجاه تغير الدالة f .

(2) - برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1.1, 2.3[$.

(3) - باستعمال طريقة التنصيف عين حصرا للعدد α سعته (طوله) 0.15 .

(4) - أثبت أن : $\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$

تمرين (31) :

f و g الدالتان العدديتان المعرفتان على $]2, +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \frac{5}{x-2}$$

- بين أن (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطة وحيدة A فاصلتها x_0 حيث : $4 < x_0 < 5$

إصدار : 17/11/2020

مع تمنياتي لكم بالتوفيق : شطاح أسامة عبد المنعم

Email : chettah.oussama77@gmail.com

كتب بـ L^AT_EX