

الموضوع الأول التوال كثرات الحدود (03 آراب وفلسفة، 03 آراب ولغات أجنبية)

ذالة كثر حدود من الدرجة الأولى

نوعزة مصطفي
أستاذة a و b عددين حقيقيين، $a \neq 0$

$$f(x) = ax + b$$

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

 f ذالة كثر حدود من الدرجة الأولى

01-النهايات

 $a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax) = -\infty$$

 $a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax) = +\infty$$

02-اتجاه تغير الذالة f $a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$f'(x) = a < 0$$

 f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$. $a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$f'(x) = a > 0$$

 f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.03-جدول تغيرات الذالة f $a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

 $a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

04-تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثياتب-تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصلنحل المعادلة $f(x) = 0$ نجد $x = -\frac{b}{a}$

$$(C_f) \cap (xx') = \left\{ B\left(-\frac{b}{a}; 0\right) \right\}$$

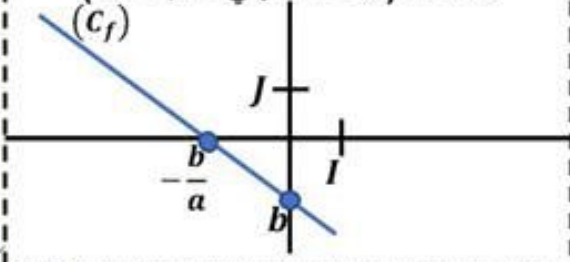
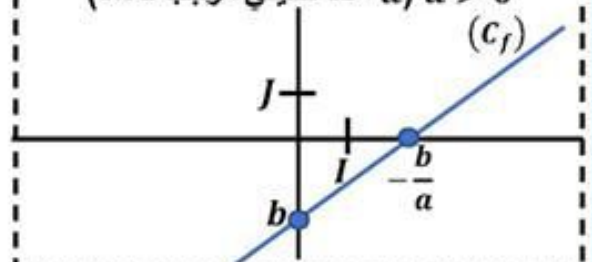
نسمي نقطة التقاطع B إن لم تذكر في التمرينأ-تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيبنحسب $f(0) = b$ نجد

$$(C_f) \cap (yy') = \{A(0; b)\}$$

نسمي نقطة التقاطع A إن لم تذكر في التمرين05-التمثيل البياني للذالة f (رسم (C_f))

بصفة عامة: منحناها عبارة عن مستقيم ولرسم هذا المستقيم نستعمل جدول مساعد

x		
y		

 $a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما) $a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

٢) دالة كثير حدود من الدرجة الثانية

$a \neq 0$ و b و c أعداد حقيقية،

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

f دالة كثير حدود من الدرجة الثانية

٠١- النهايات

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^2) = -\infty$$

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^2) = +\infty$$

٠٢- اتجاه تغير الدالة f

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$f'(x) = 2ax + b$$

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$f'(x) = 2ax + b$$

تذكير: إشارة $ax + \beta$

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{\alpha}$	$+\infty$
$ax + \beta$	مثل إشارة α	عكس إشارة α	مثل إشارة α

بصفة عامة: لدينا $f'(x)$ من الشكل $ax + \beta$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	مثل إشارة a	عكس إشارة a	مثل إشارة a

إشارة $f'(x)$

$$\text{نضع } f'(x) = 0 \text{ نجد } x = -\frac{b}{2a}$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-

f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$
ومتناقصة تماما على المجال $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$

إشارة $f'(x)$

$$\text{نضع } f'(x) = 0 \text{ نجد } x = -\frac{b}{2a}$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+

f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$
ومتزايدة تماما على المجال $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$

٠٣- جدول تغيرات الدالة f

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(-\frac{b}{2a})$	$-\infty$

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(-\frac{b}{2a})$	$+\infty$

٠٤- معادلة المستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0

معادلة المستقيم (Δ) من الشكل $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ حيث $f'(x_0)$ هو معامل توجيه المماس (Δ) .

من البيان

ويمكن إيجاد $f'(x_0)$ من البيان باختيار نقطتين من المماس $M(x_M; y_M)$ و $N(x_N; y_N)$ نجد: $f'(x_0) = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N}$

كما يمكن إيجاد معادلة المماس من البيان (سنشرح هذا الفصل في الدالة كثير حدود من الدرجة الثالثة)

ملاحظة:

إذا طلب منا تبين أن $f(x) = (\dots)(\dots)$ من الطرف الثاني $(\dots)(\dots)$ باستعمال النشر نصل إلى الطرف الأول $f(x)$ ، نستعملها في حل معادلة $f(x) = 0$.

٣-٥٦ تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات

ب-تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل
نحل المعادلة $f(x) = 0$ [حسب اختيار $f(x)$]
نكون أماما ثلاث (03) حالات إما:

الحالة 01: للمعادلة حلين متمايزين x' و x''

$$(C_f) \cap (xx') = \{B(x'; 0); C(x''; 0)\}$$

الحالة 02: للمعادلة حل مضاعف x'

$$(C_f) \cap (xx') = \{B(x'; 0)\}$$

الحالة 03: المعادلة ليس لها حلول $(C_f) \cap (xx') = \{ \}$

أ-تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب

نحسب $f(0) = c$ نجد

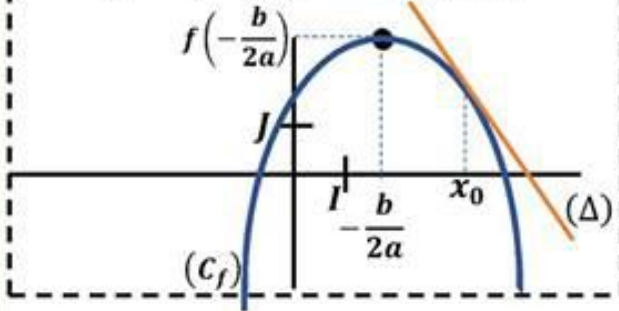
$$(C_f) \cap (yy') = \{A(0; c)\}$$

نسمي نقطة التقاطع A إن لم تذكر في التمرين

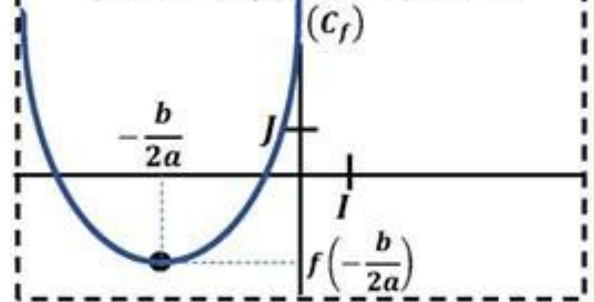
٥٦- التمثيل البياني للدالة f (رسم (C_f))

بصفة عامة: نُعين مجموعة من النقاط $M(x; f(x))$ ونصل بينها باليد نحصل على المنحنى (C_f) .

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)



$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)



دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة (الأهم)

④

$a \neq 0$ ، b ، c و d أعداد حقيقية،

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

f دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة

01- النهايات

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^3) = -\infty$$

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^3) = +\infty$$

02- اتجاه تغير الدالة f

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

(إشارة المشتقة)

بصفة عامة: لدينا $f'(x)$ من الشكل $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$

تذكير: إشارة $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ نضع: $f'(x) = 0$ نجد: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (*)

حسب إشارة المميز $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$\Delta < 0$ (المميز سالب تماما)

إشارة $f'(x)$

(إشارة $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	مثل إشارة α	

$\Delta = 0$ (المميز معدوم)

إشارة $f'(x)$

(إشارة $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$)

x	$-\infty$	x'	$+\infty$
$f'(x)$	مثل	مثل	مثل
		إشارة α	إشارة α
		$x' = -\frac{\beta}{2\alpha}$	

$\Delta > 0$ (المميز موجب تماما)

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$)

x	$-\infty$	x'	x''	$+\infty$
$f'(x)$	مثل	عكس	مثل	مثل
	إشارة α	إشارة α	إشارة α	إشارة α

$$x'' = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ و } x' = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

حيث $x' < x''$ ، الترتيب في الجدول مهم.

(إشارة المشتقة حالة خاصة 01)

إذا كانت $f'(x)$ من الشكل $\alpha x^2 + \beta x$ ($\gamma = 0$)

إشارة $\alpha x^2 + \beta x$ نضع: $f'(x) = 0$ نجد: $\alpha x^2 + \beta x = 0$ ويكون: $x(\alpha x + \beta) = 0$ ومنه: $x = 0$ أو $x = -\frac{\beta}{\alpha}$

(بعد إيجاد الحلول، نلخص إشارة $f'(x)$ في جدول)

(إشارة المشتقة حالة خاصة 02)

إذا كانت $f'(x)$ من الشكل $\alpha x^2 + \gamma$ ($\beta = 0$)

إشارة $\alpha x^2 + \gamma$ نضع: $f'(x) = 0$ نجد: $\alpha x^2 + \gamma = 0$ ويكون: $x^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$

$x^2 = k < 0$ لا توجد قيم x .

$x^2 = 0$ نجد $x = 0$.

$x^2 = k > 0$ نجد $x = \sqrt{k}$ أو $x = -\sqrt{k}$.

إشارة $f'(x)$

(إشارة $\alpha x^2 + \gamma$)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	مثل إشارة α	

إشارة $f'(x)$

(إشارة $\alpha x^2 + \gamma$)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	مثل	مثل	مثل
		إشارة α	إشارة α

نكون أمام هذه الحالة

في حالة $\beta = \gamma = 0$

أي: $f'(x) = \alpha x^2$.

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2 + \gamma$)

x	$-\infty$	$-\sqrt{k}$	$\sqrt{k}$	$+\infty$
$f'(x)$	مثل	عكس	مثل	مثل
	إشارة α	إشارة α	إشارة α	إشارة α

حيث $k = -\frac{\gamma}{\alpha}$

٥٣-جدول تغيّرات الدالة f

(5)

(يكون جدول تغيّرات الدالة f حسب إشارة $f'(x)$)

٥٤-معادلة المستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0

معادلة المستقيم (Δ) من الشكل $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ حيث $f'(x_0)$ هو معامل توجيه المماس (Δ) .

من البيان

ويمكن إيجاد $f'(x_0)$ من البيان باختيار نقطتين من المماس $M(x_M; y_M)$ و $N(x_N; y_N)$

$$f'(x_0) = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} \text{ نجد:}$$

كما يمكن إيجاد معادلة المماس (Δ) من البيان وذلك باتّباع ما يلي:

$$(1) \text{ نحسب } a: a = f'(x_0) = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N}$$

$$(2) \text{ ثم نحسب } b: b \text{ هو ترتيب نقطة تقاطع المماس } (\Delta) \text{ مع محور الترتيب } (b = y_N - ax_N)$$

$$\text{أو } b = y_M - ax_M \text{ في الأخير نجد: } (\Delta): y = ax + b$$

ولدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى مماسه (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

أو كان الفرق من الشكل $f(x) - y = (x + 1)^3$ (ندرس إشارة $(x + 1)$)
نلخص الوضع النسبي في جدول

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x + 1$	-	○	+
$f(x) - y$	-	○	+
الوضعية النسبية	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)

مثلاً إذا كان الفرق من الشكل $f(x) - y = x^3$ (ندرس إشارة x)
نلخص الوضع النسبي في جدول

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	○	+
$f(x) - y$	-	○	+
الوضعية النسبية	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)

ملاحظة: بما أن المنحنى (C_f) غير وضعيته بالنسبة إلى مماسه (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 (لتكن هذه النقطة E) نقول أن المنحنى (C_f) يخترق المماس (Δ) في النقطة E ونستنتج أن النقطة $E(x_0; f(x_0))$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f) .

٥٥-نقطة الانعطاف

لتبيان أن $E(x_0; y_0)$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f) نتبع ما يلي:

$$(1) \text{ نحسب } f''(x) \text{ (انطلاقاً من } f'(x) \text{)}$$

$$a < 0 \text{ (عدد حقيقي سالب تماماً)}$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$a > 0 \text{ (عدد حقيقي موجب تماماً)}$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$(2) \text{ ندرس إشارة } f''(x) \text{ (نضع } f''(x) = 0 \text{ نجد } x = x_0)$$

$$a < 0 \text{ (عدد حقيقي سالب تماماً)}$$

إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f''(x)$	+		-

$$a > 0 \text{ (عدد حقيقي موجب تماماً)}$$

إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f''(x)$	-		+

$f''(x)$ انعدمت عند x_0 مُغيّرة إشارتها إذن $E(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف لـ (C_f) وهي $E(x_0; y_0)$.

ملاحظة:

إذا طلب منا تبيان أن $f(x) = (\dots)(\dots)$ ننتقل من الطرف الثاني $(\dots)(\dots)$ باستعمال النشر نصل إلى الطرف الأول $f(x)$ ، نستعملها في حل معادلة $f(x) = 0$.

٦ ﴿٥٥﴾ تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات

أ- تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب

نحسب $f(0) = d$ نجد $f(0)$

$$(C_f) \cap (yy') = \{A(0; d)\}$$

نسمي نقطة التقاطع A إن لم تذكر في التمرين

ب- تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

نحل المعادلة $f(x) = 0$ [حسب اختيار $f(x)$]

نكون أمام (٥٢) حالتين إما:

الحالة ٥١: إذا كان $d = 0$ نختار عبارة $f(x)$ الموجودة في المعطيات ونقوم بإخراج x كعامل مشترك (ثم نحل معادلة جداء)

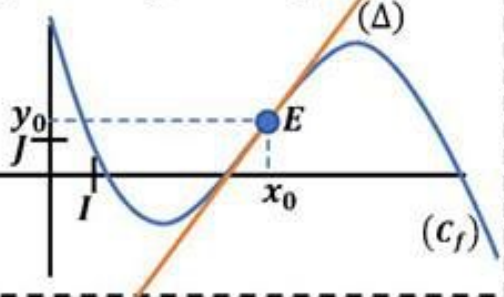
الحالة ٥٢: إذا كان $d \neq 0$ نختار عبارة $f(x)$ الموجودة في الأسئلة (ثم نحل معادلة جداء)

ملاحظة مهمة: عدد الحلول هو عدد نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

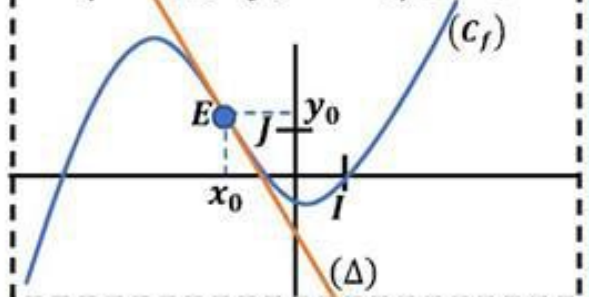
٥٦- التمثيل البياني للدالة f (رسم (C_f))

بصفة عامة: نعين مجموعة من النقط $M(x; f(x))$ ونصل بينها باليد نحصل على المنحنى (C_f) .

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)



$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)



٥٥- إضافات: (أسئلة طرحت في البكالوريا)

السؤال	كيفية الإجابة عليه
١) عيّن نقطتي تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (D) ذي المعادلة: $y = 3x - 1$.	نحل المعادلة $f(x) = 3x - 1$ نجد حلين x_1 و x_2 . وبالتالي: $(C) \cap (D) = \{A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)\}$ لإيجاد y_1 نعوض x_1 في عبارة f أو في معادلة (D) .
٢) حل بيانيا المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x : $f(x) < -1$.	حلول المتراجحة $f(x) < -1$ هي فواصل نقط (C_f) الواقعة تحت المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ باستثناء فواصل نقط التقاطع، من البيان نجد $S = \dots$.
٣) عيّن $f'(1)$ و $f'(-1)$ BAC2010	أ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 موازيا لمحور الفواصل يعني $f'(1) = 0$. ب) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 كذلك موازيا لمحور الفواصل يعني $f'(-1) = 0$.
٤) بيّن أنه يوجد مماسان للمنحنى (C_f) معامل توجيه كل منهما يساوي 5. BAC2011	نحل المعادلة $f'(x) = 5$ نجد حلين.

انتهى ملخص الدوال كثيرات الحدود.

دالة تناظرية (كسرية)

7

a, b, c و d أعداد حقيقية،

$$ad - cb \neq 0 \text{ و } c \neq 0$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} =]-\infty; -\frac{d}{c}[\cup]-\frac{d}{c}; +\infty[$$

f دالة تناظرية

عبارة f تأخذ ثلاثة (03) أشكال وهي كالتالي

الشكل الثالث

$$f(x) = k + \frac{\lambda}{cx+d}$$

الشكل الثاني (إذا كان $a = 0$)

$$f(x) = \frac{b}{cx+d}$$

الشكل الأول

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

إذا أعطي الشكل الأول وطلب منا تبين الشكل الثالث

$$k + \frac{\lambda}{cx+d} = \frac{k(cx+d)+\lambda}{cx+d} = \frac{ax+b}{cx+d} = f(x)$$

01- النهايات

المستقيم المقارب لـ (C_f) (الموازي لمحور الفواصل)

المستقيم ذو المعادلة $y = k$

(الموازي لمحور الفواصل) مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ (محور

الفواصل) مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{a}{c}$

(الموازي لمحور الفواصل) مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

الشكل الثالث

(نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k \end{cases}$$

الشكل الثاني (إذا كان $a = 0$)

(نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$$

الشكل الأول

(نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{a}{c} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{a}{c} \end{cases}$$

المستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{d}{c}$ (الموازي لمحور الترتيب) مقارب لـ (C_f) .

المستقيم المقارب لـ (C_f) (الموازي لمحور الترتيب)

الشكل الثالث

(نهاية الدالة f عند $-\frac{d}{c}$)

أ/ إذا كان λ و c من نفس الإشارة:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\frac{d}{c}} f(x) = +\infty \end{cases}$$

ب/ إذا كان λ و c مختلفين في الإشارة

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\frac{d}{c}} f(x) = -\infty \end{cases}$$

الشكل الثاني (إذا كان $a = 0$)

(نهاية الدالة f عند $-\frac{d}{c}$)

أ/ إذا كان b و c من نفس الإشارة:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\frac{d}{c}} f(x) = +\infty \end{cases}$$

ب/ إذا كان b و c مختلفين في الإشارة

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\frac{d}{c}} f(x) = -\infty \end{cases}$$

الشكل الأول

(نهاية الدالة f عند $-\frac{d}{c}$)

نعوض $-\frac{d}{c}$ في البسط نحصل على عدد e .

أ/ إذا كان e و c من نفس الإشارة:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\frac{d}{c}} f(x) = +\infty \end{cases}$$

ب/ إذا كان e و c مختلفين في الإشارة

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\frac{d}{c}} f(x) = -\infty \end{cases}$$

(8)

02- اتجاه تغير الدالة f

الطريقة الثانية

$$f'(x) = \frac{u/v - v/u}{v^2} = \frac{a(cx-d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2}$$

الطريقة الأولى

$$f'(x) = \frac{ad - cb}{(cx+d)^2}$$

نجد

$$f'(x) = \frac{\delta}{(cx+d)^2} < 0 \text{ أو}$$

f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty; -\frac{d}{c}[$ و $]-\frac{d}{c}; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{\delta}{(cx+d)^2} > 0 \text{ إما}$$

f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty; -\frac{d}{c}[$ و $]-\frac{d}{c}; +\infty[$.

03- جدول تغيرات الدالة f (في حالة $f'(x) < 0$)

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$

(في حالة $f'(x) > 0$)

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$-\infty$	$\frac{a}{c}$

04- تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثياتب- تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصلنحل المعادلة $f(x) = 0$ نجد $ax + b = 0$ و $cx + d \neq 0$ ويكون $x = -\frac{b}{a}$ و $x \neq -\frac{d}{c}$

$$(C_f) \cap (xx') = \left\{ B \left(-\frac{b}{a}; 0 \right) \right\}$$

نسمي نقطة التقاطع B إن لم تذكر في التمرينأ- تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيبنحسب $f(0) = \frac{b}{d}$ نجد $f(0)$

$$(C_f) \cap (yy') = \left\{ A \left(0; \frac{b}{d} \right) \right\}$$

نسمي نقطة التقاطع A إن لم تذكر في التمرين05- معادلة المستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0 معادلة المستقيم (Δ) من الشكل $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ حيث $f'(x_0)$ هو معامل توجيه المماس (Δ) .

من البيان

ويمكن إيجاد $f'(x_0)$ من البيان باختيار نقطتين من المماس $M(x_M; y_M)$ و $N(x_N; y_N)$

$$f'(x_0) = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} \text{ نجد:}$$

كما يمكن إيجاد معادلة المماس (Δ) من البيان وذلك باتباع ما يلي:

$$(1) \text{ نحسب } a: a = f'(x_0) = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N}$$

$$(2) \text{ ثم نحسب } b: b \text{ هو ترتيب نقطة تقاطع المماس } (\Delta) \text{ مع محور الترتيب } b = y_N - ax_N$$

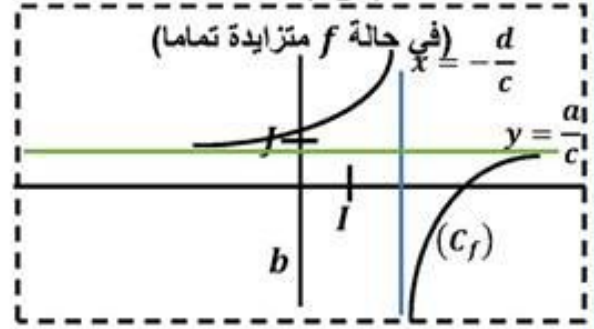
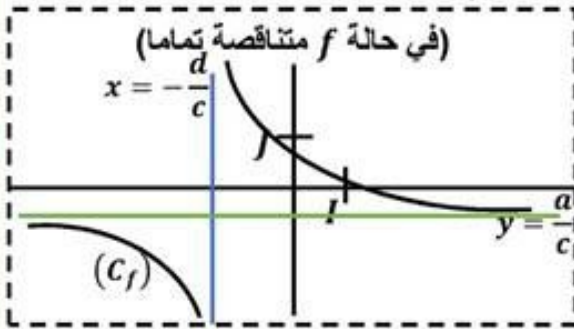
$$\text{أو } b = y_M - ax_M \text{ في الأخير نجد: } (\Delta): y = ax + b$$

ملاحظة:

 (C_f) يشمل النقطة $A(x_A; y_A) (A \in (C_f))$ معناه: $f(x_A) = y_A$

06- التمثيل البياني للدالة f (رسم (C_f))

(9)



ملاحظة:

إذا كانت f (دالة تناظرية) معرفة على مجال واحد في تمرين بكالوريا نقتصر الدراسة على هذا المجال فقط BAC 2012.

07- إضافات: (أسئلة طرحت في البكالوريا)

السؤال	كيفية الإجابة عليه
1) بين أن الدالة f تكتب على الشكل: $f(x) = 1 + \frac{a}{x+1}$ حيث a عدد حقيقي يُطلب تعيينه. (الدينا: $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$)	نوجد المقامات نجد: $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ وبما: $f(x) = 1 + \frac{a}{x+1} = \frac{x+1+a}{x+1}$ بالمطابقة نجد: $1+a = -3$ وبالتالي: $a = -4$.

انتهى ملخص الدالة التناظرية (الكسرية).

المتتاليات العددية

معارف لابد منها في المتتاليات

نرمز إلى المتتاليات العددية بـ: (u_n) , (v_n) , (w_n) ... الخ.
الأعداد الحقيقية $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}$ تسمى حدود المتتالية (u_n) (يسمى الحد العام للمتتالية) إذا كانت المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ يكون حدها الأول u_0 , وإذا كانت معرفة على $\mathbb{N}^*$ يكون حدها الأول u_1 , ... الخ.

01- المتتالية (u_n) تُعرف بـ

أ) بعبارة الحد العام $u_n = f(n)$ (أي يُعطى حدها العام u_n بدلالة n) لحساب حد من الحدود نعوض n .	ب) بعلاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ (أي يُعطى حدها الأول وعلاقة تربط بين حدين متتابعين u_{n+1} و u_n) لحساب حد من الحدود يجب معرفة الحد الذي قبله ونستعمل العلاقة التراجعية لإيجاده. علاقة تراجعية من الشكل: 1) $u_{n+1} = au_n + b$ (u_n) لا حسابية ولا هندسية 2) $u_{n+1} = au_n$ (u_n) هندسية أساسها a ($q = a$) 3) $u_{n+1} = u_n + b$ (u_n) حسابية أساسها b ($r = b$)
--	---

02- اتجاه تغير المتتالية (u_n)

الطريقة: ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n < 0$ (الفرق سالب تماما) (u_n) متناقصة تماما.	$u_{n+1} - u_n = 0$ (الفرق معدوم) (u_n) ثابتة. كل الحدود متساوية وتساوي الحد الأول	$u_{n+1} - u_n > 0$ (الفرق موجب تماما) (u_n) متزايدة تماما.
---	---	---

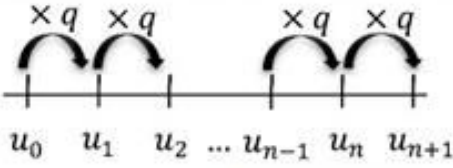
إذا أردنا حساب u_{n+1} نعوض n بـ $(n+1)$ مع استعمال الأقواس.

03-المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية

(10)

المتتالية (u_n)

هندسية



حيث q عدد حقيقي $u_{n+1} = qu_n$
 q يسمى أساس المتتالية الهندسية (u_n) .

الطريقة 01:

نُبين أن الحاصل $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت (الأساس)

الطريقة 02:

نكتب u_{n+1} بدلالة u_n نجد:
 $u_{n+1} = qu_n$

إذا أُعطي u_0 :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

إذا أُعطي u_1 :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

من أجل عددين طبيعيين n و p :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

علاقة تربط بين حدين مختلفين في متتالية هندسية.

بصفة عامة:

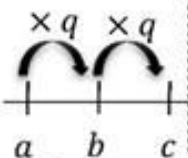
$$\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q} \right) \text{ الحد الأول} = \text{المجموع}$$

1 + دليل الحد الأول - دليل الحد الأخير = عدد الحدود

الربط الهندسي:

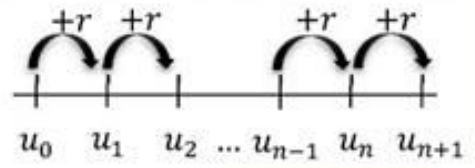
تكون a, b و c ثلاث حدود متتابة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان

$$a \times c = b^2$$



$$\begin{cases} a = \frac{b}{q} \\ c = qb \end{cases}$$

حسابية



حيث r عدد حقيقي $u_{n+1} = u_n + r$
 r يسمى أساس المتتالية الحسابية (u_n) .

الطريقة 01:

نُبين أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت (الأساس)

الطريقة 02:

نكتب u_{n+1} بدلالة u_n نجد:
 $u_{n+1} = u_n + r$

إذا أُعطي u_0 :

$$u_n = u_0 + nr$$

إذا أُعطي u_1 :

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

من أجل عددين طبيعيين n و p :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

علاقة تربط بين حدين مختلفين في متتالية حسابية.

بصفة عامة:

$$\left(\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2} \right) (\text{عدد الحدود}) = \text{المجموع}$$

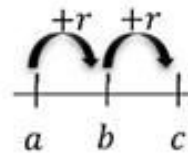
مجموع حدود متتابة من متتالية

خاصية الربط

الربط الحسابي:

تكون a, b و c ثلاث حدود متتابة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان

$$a + c = 2b$$



$$\begin{cases} a = b - r \\ c = b + r \end{cases}$$

11 04-إضافات: (أسئلة طُرحت في البكالوريا)

السؤال	كيفية الإجابة عليه
1) تحقق أن العدد 2008 حدّ من حدود المتتالية (u_n) . $u_n = 3n + 1$	نضع: $u_n = 2008$ نجد: $3n + 1 = 2008$ ويكون: $n = \frac{2007}{3} = 669 \in \mathbb{N}$ إذن: العدد 2008 حدّ من حدود المتتالية (u_n) .

05-معالجة تمرين بكالوريا: (أسئلة طُرحت في البكالوريا)

التمرين BAC2008	كيفية الإجابة عليه
(u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها الأول $u_1 = 7$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معنوم n: $u_{n+1} = 2u_n + 1$. 1) أحسب u_2, u_3 و u_4. 2) من أجل كل عدد طبيعي غير معنوم n، نُعرف المتتالية (v_n) كما يأتي: $v_n = u_n + 1$ أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_1. ب- اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n. ج- نضع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ احسب S_n بدلالة n. د- عيّن n علماً أن $S_n = 1016$.	لدينا: (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$ 1) حساب u_2, u_3, u_4: $u_2 = 2u_1 + 1 = 2(7) + 1 = 14 + 1 = 15$ $u_3 = 2u_2 + 1 = 2(15) + 1 = 30 + 1 = 31$ $u_4 = 2u_3 + 1 = 2(31) + 1 = 62 + 1 = 63$ 2) (v_n) متتالية معرفة كما يأتي: $v_n = u_n + 1$ أ- اثبات أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_1: ط1) نبين أن الحاصل $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت. لدينا: $v_n = u_n + 1$ ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = (2u_n + 1) + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1)$ وعليه: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2(u_n + 1)}{u_n + 1} = 2$ إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدّها الأول $v_1 = u_1 + 1 = 7 + 1 = 8$ ط2) نكتب v_{n+1} بدلالة v_n ($v_{n+1} = v_n \times q$) لدينا: $v_n = u_n + 1$ ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = (2u_n + 1) + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1) = 2v_n$ وعليه: $v_{n+1} = 2v_n$ إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدّها الأول $v_1 = 8$ ب- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n: بما: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدّها الأول $v_1 = 8$ فإن: $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ بالتعويض نجد: $v_n = 8 \times 2^{n-1}$ استنتج u_n بدلالة n: $u_n = v_n - 1 = 8 \times 2^{n-1} - 1$ ومنه: $v_n = u_n + 1$ ج- حساب S_n بدلالة n: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$ $= 8 \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \right) = \frac{8}{-1} (1 - 2^{n+1})$ إذن: $S_n = 8(2^{n+1} - 1)$ د- عيّن n علماً أن $S_n = 1016$: $8(2^{n+1} - 1) = 1016$ معناه: $S_n = 1016$ ومنه: $2^{n+1} - 1 = \frac{1016}{8}$ أي: $2^{n+1} - 1 = 127$ وعليه: $2^{n+1} = 128 = 2^7$ (لأن $128 = 2^7$) إذن: $n = 7$ ($S_7 = 1016$)

انتهى ملخص المسائل العددية.

(12)

القسمة في $\mathbb{Z}$

01- العدد الطبيعي التام والعددان الطبيعيان المتحابان

العددان الطبيعيان المتحابان

نقول عن عددين طبيعيين أنهما متحابان إذا كان مجموع القواسم الموجبة لأحدهما ما عدا نفسه مساويا للآخر والعكس. مثلا: 220 و 284 هما عددان متحابان.

العدد الطبيعي التام

نقول عن عدد طبيعي أنه تام إذا كان مساويا لمجموع قواسمه الموجبة ما عدا نفسه. مثلا: 6، 28، 496 هي أعداد تامة. القواسم الموجبة للعدد 6 هي: 1، 2، 3، 6 ولدينا: $6 = 1 + 2 + 3$

02- القسمة في $\mathbb{Z}$ قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

في حالة $r = 0$ نجد: $a = bq$

نقول أن: " b يقسم العدد a "

أو " b قاسم للعدد a "

أو " a مضاعف للعدد b "

أو " a يقبل القسمة على العدد b "

القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

توجد ثنائية وحيدة $(q; r)$ حيث

$$0 \leq r < b \text{ و } a = bq + [r]$$

r : يسمى باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b .

q : يسمى حاصل القسمة الإقليدية للعدد a على b .

03- حصر عدد صحيح a بين مضاعفين متعاقبين لعدد طبيعي غير معدوم b

$$a \mid \frac{b}{q}$$

حيث، $bq \leq a < b(q+1)$ هو حاصل قسمة a على b .

04- إيجاد عدد قواسم عدد طبيعي a وكيفية إيجاد هذه القواسم.

طريقة: لإيجاد عدد قواسم عدد طبيعي a أنحلل a إلى جداء عوامل أولية.

بإلى كل أس في التحليل نضيف 1 ثم نحسب جداء الأعداد المحصل عليها.

ملاحظة: ولإيجاد القواسم يمكن استعمال شجرة انظر الكتاب المدرسي ص 11.

05- الموافقات في $\mathbb{Z}$

a و b عدنان صحيحان

$$(b \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z})$$

و n عدد طبيعي غير معدوم

$$(n \in \mathbb{N}^*)$$

a و b متوافقان بتعدد n .

$$a \equiv b[n]$$

الفرق $a - b$ مضاعف لـ n

$$\text{أي: } a - b = nq$$

$$\text{يعني: } a - b \equiv 0[n]$$

للعددين a و b نفس الباقي في

القسمة الإقليدية على n

$$\text{أي: } \begin{cases} a = nq + [r] \\ b = nq' + [r] \end{cases}$$

$$\text{يعني: } \begin{cases} a \equiv r[n] \\ b \equiv r[n] \end{cases}$$

مثال: b عدد طبيعي حيث $a = 2006$
تبيان أن $b \equiv -1[9]$

نبين أن الفرق $b - (-1)$ مضاعف لـ 9:
لدينا: $b - (-1) = b + 1 = 2007 = 9(223)$

$$\text{أي: } b - (-1) \equiv 0[9]$$

وبالتالي: الفرق $b - (-1)$ مضاعف لـ 9 إذن: $b \equiv -1[9]$

06- خاصية

خاصية مهمة: كل عدد صحيح a يوافق، بتعدد n ، باقي قسمته على n .

وبالتالي: باقي قسمة a على n هو $[r]$.

$$0 \leq r < n$$

$$\text{أي: } a \equiv r[n]$$

$$\text{لدينا: } a = nq + [r]$$

مثال: a عدد طبيعي حيث $a = 1428$ تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 9.

(13)

لدينا: $a = 1428 = 9(158) + 6$ أي: $a \equiv 6[9]$ وبالتالي: باقي قسمة a على 9 هو 6.

07-خواص الموافقات

- (1) $a \equiv a[n]$ (a عدد صحيح، n عدد طبيعي غير معدوم)
- (2) إذا كان $a \equiv b[n]$ ، فإن $b \equiv a[n]$ (a و b عدنان صحيحان، n عدد طبيعي غير معدوم)
- (3) إذا كان $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ b \equiv c[n] \end{cases}$ ، فإن $a \equiv c[n]$ (a ، b و c أعداد صحيحة، n عدد طبيعي غير معدوم)
- (3) إذا كان $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{cases}$ ، فإن $a + c \equiv b + d[n]$ (a ، b ، c و d أعداد صحيحة، n عدد طبيعي غير معدوم)
- (3) إذا كان $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{cases}$ ، فإن $a \times c \equiv b \times d[n]$ (a ، b ، c و d أعداد صحيحة، n عدد طبيعي غير معدوم)
- (2) إذا كان $a \equiv b[n]$ ، فإن $a^p \equiv b^p[n]$ (a و b عدنان صحيحان، n و p عدنان طبيعيين غير معدومان)

08-إضافات: (تعيين بواقي قسمة قوى عدد طبيعي على آخر /أعمال موجهة ص 19)

الدراسة حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة العدد 2^n على 5:

لدينا: $2^0 \equiv 1[5]$ ، $2^1 \equiv 2[5]$ ، $2^2 \equiv 4[5]$ ، $2^3 \equiv 3[5]$ و $2^4 \equiv 1[5]$.

بواقي قسمة 2^n على 5 تشكل متتالية دورية، دورها 4.

$n =$	$4k$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$
بواقي قسمة 2^n على 5	1	2	4	3

ب/تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $2^{4k} \equiv 1[5]$ واتمام باستعمال خواص الموافقة ما يلي $2^{4k+1} \equiv \dots[5]$:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي k ، $2^4 \equiv 1[5]$ فإن $(2^4)^k \equiv 1^k[5]$ أي: $2^{4k} \equiv 1[5]$.

ولدينا: $\begin{cases} 2^{4k} \equiv 1[5] \\ 2^1 \equiv 2[5] \end{cases}$ فإن $2^{4k} \times 2^1 \equiv 1 \times 2[5]$ أي: $2^{4k+1} \equiv 2[5]$.

ج/تعيين بواقي قسمة كل من 2^{1428} و 2^{2007} على 5:

لدينا: $\begin{cases} 1428 = 4(357) \\ 2007 = 4(501) + 3 \end{cases}$ ومنه: $2^{1428} \equiv 1[5]$ و $2^{2007} \equiv 3[5]$.

ج/تعيين باقي قسمة العدد $2 \times 2^{50} - 3 \times 2^{2000} + 2^{83}$ على 5:

لدينا: $\begin{cases} 50 = 4(12) + 2 \\ 2000 = 4(500) \\ 83 = 4(20) + 3 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} 2^{50} \equiv 4[5] \\ 2^{2000} \equiv 1[5] \\ 2^{83} \equiv 3[5] \end{cases}$ وعليه: $\begin{cases} 2 \times 2^{50} \equiv 8[5] \\ 3 \times 2^{2000} \equiv 3[5] \\ 2^{83} \equiv 3[5] \end{cases}$ ويكون: $\begin{cases} 2 \times 2^{50} \equiv 3[5] \\ 3 \times 2^{2000} \equiv 3[5] \\ 2^{83} \equiv 3[5] \end{cases}$

وبالتالي: $2 \times 2^{50} - 3 \times 2^{2000} + 2^{83} \equiv (3 - 3 + 3)[5]$ أي: $2 \times 2^{50} - 3 \times 2^{2000} + 2^{83} \equiv 3[5]$.

إذن: باقي قسمة $2 \times 2^{50} - 3 \times 2^{2000} + 2^{83}$ على 5 هو 3.

د/التحقق أن $2007 \equiv 2[5]$ ثم استنتاج باقي قسمة 2007^{2008} على 5:

لدينا: $2007 = 5(401) + 2$ أي: باقي قسمة 2007 على 5 هو 2 إذن: $2007 \equiv 2[5]$.

ولدينا: $2007 \equiv 2[5]$ ومنه: $2007^{2008} \equiv 2^{2008}[5]$ وبما أن $2008 = 4(502)$ فإن $2007^{2008} \equiv 1[5]$.

إذن: باقي قسمة 2007^{2008} على 5 هو 1.

هـ/تبيان أن العدد $3 \times 12^{2002} - 3 \times 2007^{2000} + 2 \times 42^{2003}$ يقبل القسمة على 5:

لدينا: $\begin{cases} 2002 = 4(500) + 2 \\ 2000 = 4(500) \\ 2003 = 4(500) + 3 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} 12^{2002} \equiv 4[5] \\ 2007^{2000} \equiv 1[5] \\ 42^{2003} \equiv 3[5] \end{cases}$ وعليه: $\begin{cases} 3 \times 12^{2002} \equiv 12[5] \\ 3 \times 2007^{2000} \equiv 3[5] \\ 2 \times 42^{2003} \equiv 6[5] \end{cases}$

(14)

$$\begin{cases} 3 \times 12^{2002} \equiv 2[5] \\ 3 \times 2007^{2000} \equiv 3[5] \text{ ويكون} \\ 2 \times 42^{2003} \equiv 1[5] \end{cases}$$

وبالتالي: $3 \times 12^{2002} - 3 \times 2007^{2000} + 2 \times 42^{2003} \equiv (2 - 3 + 1)[5]$ أي: $3 \times 12^{2002} - 3 \times 2007^{2000} + 2 \times 42^{2003} \equiv 0[5]$ إذن: العدد $3 \times 12^{2002} - 3 \times 2007^{2000} + 2 \times 42^{2003}$ يقبل القسمة على 5.

07-إضافات: (أسئلة طُرحت في البكالوريا)

السؤال	كيفية الإجابة عليه
(1)	

انتهى ملخص القسمة في $\mathbb{Z}$.

الاحتمالات

01-مصطلحات وتعريفات

المصطلح	الرمز	التعريف
التجربة العشوائية		هي كل تجربة لا يمكن توقع نتائجها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة.
مجموعة النتائج الممكنة	E أو Ω	تسمى مجموعة الإمكانيات وهي الحادثة الأكيدة هي مجموعة جزئية من Ω .
الحادثة		<u>ملاحظة:</u> وإذا احتوت على عنصر وحيد تسمى الحادثة الأولية .
الحادثة المستحيلة	$\emptyset$	وهي المجموعة الخالية $\emptyset$.
الحادثة العكسية	للحادثة A يرمز لها بـ $\bar{A}$	وهي التي تحوي كل عناصر Ω ما عدا عناصر A .
تقاطع حدثين	$A \cap B$ أو نكتب " A و B "	هي الحادثة التي تحوي العناصر المشتركة بين A و B . <u>ملاحظة:</u> إذا كانت $A \cap B$ خالية أي $A \cap B = \emptyset$ نقول عندئذ أن الحادثتين A و B غير متلائمتين.
اتحاد حدثين	$A \cup B$ أو نكتب " A أو B "	هي الحادثة التي تحوي عناصر A وعناصر B أيضا.

02-خواص الاحتمالات

1. من أجل كل حادثة A فإن $0 \leq P(A) \leq 1$ حيث $P(A)$ هو احتمال الحادثة A
2. $P(\emptyset) = 0$ و $P(\Omega) = 1$
3. إذا كانت A و B حادثتين كيفيتين فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ ويكون $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ حيث $\bar{A}$ الحادثة العكسية لـ A

ملاحظة: $P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$ حيث $P(A)$ هو احتمال الحادثة A .

راجع التمارين المحولة الموجودة في كراس الدرس.

07-إضافات: (أسئلة طُرحت في البكالوريا)

السؤال	كيفية الإجابة عليه
(1)	

انتهى ملخص الاحتمالات.

يا توفيق في الكالوريا.

انتهى