

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

**التمرين الأول: 04 نقاط**

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي:

$$\begin{cases} u_1 = \ln(2) \\ u_{n+1} = \ln(2 - e^{-u_n}) \end{cases}$$

1. أ، تحقق أن:  $u_3 = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$  و  $u_2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ .

ب، برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n: u_n > 0$ .

2. أ، بين أنه من أجل  $n \in \mathbb{N}^*$ :  $2 - e^{-u_n} - e^{u_n} = -e^{u_n} (e^{u_n} - 1)^2$  ثم استنتج أن:  $2 - e^{-u_n} < e^{u_n}$ .

ب، بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

3. برهن بالتراجع من أجل  $n \in \mathbb{N}^*$ :  $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ ، ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

4. نعتبر الجداء  $P$  بحيث:  $P = e^{u_1} \times e^{u_2} \times \dots \times e^{u_{2021}}$ .

✓ بين أنه من أجل  $n \in \mathbb{N}^*$ :  $P = 2022$ .

**التمرين الثاني: 04 نقاط**

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1. نعتبر الدالة  $u$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $u(x) = 1443 - 2022x$ .

✓ الدالة  $x \mapsto e^{u(x)}$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$ .

2. نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $h(x) = 2x \ln(x)$ .

✓ الدالة الأصلية للدالة  $h$  والتي تنعدم عند العدد 1 هي الدالة  $H$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $H(x) = x^2 \ln(x)$ .

3. المتتالية العددية  $(w_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  بـ:  $w_n = \frac{\ln(n)}{e^n}$  متقاربة.

4. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  بـ:  $g(x) = x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ .

✓ الدالة  $g$  زوجية.

### التمرين الثالث: 05 نقاط

يحتوي كيس على سبع كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها أربع كريات بيضاء و ثلاث كريات خضراء.

- I.
  1. احسب احتمال كل من الحادثتين  $A$  و  $B$  بحيث  $A$ : عدد الكريات البيضاء المسحوبة أكبر من عدد الكريات الخضراء المسحوبة و  $B$ : الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون.
  2. احسب  $P(A \cap B)$  ثم استنتج  $P(A \cup B)$  و  $P_A(B)$ .
- II.
  1. نسحب الآن ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع و ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات البيضاء المتبقية.
  2. عرف قانون احتمال للمتغير العشوائي  $X$ .
  3. احسب الأمل الرياضي  $E(X)$  للمتغير العشوائي  $X$ ، ثم استنتج  $E(1743X - 1962)$ .

### التمرين الرابع: 07 نقاط

- I.
  1. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالعلاقة:  $g(x) = 2e^{x-1} - x - 1$ .
  2. ادرس تغيرات الدالة  $g$ .
  3. أ) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين أحدهما العدد 1 والآخر  $\alpha$  بحيث  $-0,6 < \alpha < -0,5$ .  
 ب) استنتج حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$ .
- II.
  1. الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = 2x - 2 + (x + 2)e^{1-x}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
 أ) بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ثم احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .  
 ب) بين أنه من أجل  $x \in \mathbb{R}$  :  $f'(x) = e^{1-x} g(x)$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .  
 ج) بين أنه من أجل  $x \in \mathbb{R}$  :  $f''(x) = xe^{1-x}$ ، ثم استنتج أن  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.
  2. بين أن  $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{2}{\alpha + 1}$ ، ثم اعط حصر  $f(\alpha)$ .
  3. أ) بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = 2x - 2$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $+\infty$ ، ثم ادرس الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  و  $(\Delta)$ .  
 ب) بين أن  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  موازيا لـ  $(\Delta)$  يطلب كتابة معادلته.
  4. أ) أنشئ كلامن  $(\Delta)$ ،  $(T)$  ثم مثل  $(C_f)$ . نقبل أن  $f(\beta) = 0$  بحيث  $-1,61 < \beta < -1,63$ ، يعطى  $f(\alpha) \approx 3,73$ .  
 ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي  $m$  التي من أجلها تقبل المعادلة  $f(x) = 2(x - 1) + m$  حلين مختلفين في الإشارة.
  5. أ) بين أن الدالة  $H$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $H(x) = (-x - 3)e^{1-x}$  دالة أصلية للدالة  $f(x) = 2(x - 1) + m$  على  $\mathbb{R}$ .  
 ب) استنتج  $A$  مساحة الحيز المحدد بـ:  $(C_f)$  و  $(\Delta)$  بين العددين -2 و 1.

انتهى الموضوع الأول

## الموضوع الثاني

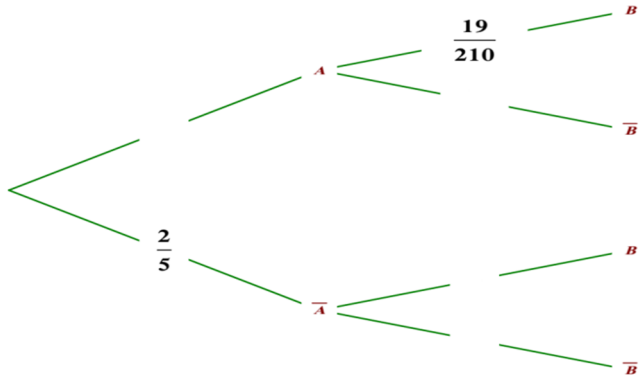
### التمرين الأول: 5 نقاط

يحتوي وعاء  $U$  على 10 كريات منها خمس كريات حمراء مرقمة بـ: -2، -1، 0، 1، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -1، 0، 1 وكريتين سوداوين مرقمتين بـ: -1، 1 ويحتوي وعاء  $V$  على 9 كريات موزعة كما يلي: خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 1، 1، 2، 2، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 3، 2، 3 وكرية سوداء مرقمة بـ: -1، ويحتوي وعاء  $W$  على خمس كريات منها ثلاث كريات بيضاء وكريتين صفراوين.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كريات من أحد الوعاءين  $U$  أو  $V$  بالكيفية التالية:

نقوم بسحب كرية واحدة عشوائيا من الوعاء  $W$ ، إذا تحصلنا على كرية بيضاء نسحب الكريات الأربعة من  $U$  وإذا تحصلنا على كرية صفراء نسحب الكريات الأربعة من  $V$ .

نسمي  $A$  الحدث: الحصول على كرية بيضاء، ونسمي  $B$  الحدث الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم.



1. انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها موضحا طريقة الحساب.

2. استنتج  $P(B)$  ثم احسب  $P_{\bar{B}}(A)$ .

3. ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة.

➤ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  ثم أحسب أملة الرياضياتي  $E(X)$ .

### التمرين الثاني: 04 نقاط

1. نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بحددها الأول:  $u_0 = e^{-1}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_{n+1} = u_n \sqrt{u_n}$ .

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $0 < u_n < 1$ .

2. أ) بين أنه من أجل  $n \in \mathbb{N}$ :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .

ب) استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة، ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

II. نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ:  $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \ln(u_n)$ .

1. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  يطلب حساب حدها الأول.

2. اكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج أنه من أجل  $n \in \mathbb{N}$ :  $u_n = e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n}$ .

3. احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  بحيث  $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)$ .

### التمرين الثالث: 04 نقاط

نعتبر الدالتين  $f$  و  $g$  المعرفتين على المجال  $D = [0; \ln 2]$  بـ:  $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ ،  $g(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ ، وليكن

$(C_f)$  و  $(C_g)$  تمثيليهما البيانيين على الترتيب في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

$$\text{نضع } I = \int_0^{\ln 2} f(x) dx \text{ و } J = \int_0^{\ln 2} g(x) dx$$

1. بين أنه من أجل  $x \in D$  :  $\frac{1}{3} \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$ ، ثم أعط حصرًا للتكامل  $J$ .

2. أثبت أن  $I - J = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1) dx$ ، ثم استنتج مساحة الحيز المحدد بـ  $(C_f)$  و  $(C_g)$  والمستقيمين اللذين معادلتيهما:  $x = 0$  و  $x = \ln 2$ .

3. أ) تحقق أنه من أجل  $x \in D$  :  $f(x) = e^x - \frac{e^x}{e^x + 1}$ ، ثم احسب التكامل  $I$ .  
ب) استنتج قيمة التكامل  $J$ ، ثم فسر النتيجة هندسيًا.

### التمرين الرابع: 07 نقاط

I. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ:  $g(x) = x - 1 - \ln x$ .  
1. ادرس تغيرات الدالة  $g$ .

2. احسب  $g(1)$  ثم استنتج حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$ .

II. الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \ln x + \frac{2 + \ln x}{x}$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب

إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

ب) بين أنه من أجل  $x \in ]0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

ج) استنتج أن  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

2. ليكن  $(P)$  التمثيل البياني للدالة  $x \mapsto \ln x$ .

أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيًا.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  و  $(P)$ .

3. أ) بين أن  $(C_f)$  يقطع حامل محاور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  بحيث  $0,17 < \alpha < 0,19$ ، ثم استنتج حسب قيم  $x$  إشارة  $f(x)$ .

ب) ارسم  $(P)$  ثم ارسم  $(C_f)$ .

4. ادرس تغيرات الدالة  $h$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $h(x) = [f(x)]^2$  دون تعيين عبارتها.

انتهى الموضوع الثاني