

الإختبار التجريبي رقم 1

التمرين 01

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3 \end{cases}$

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$

② لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n + \lambda n - 1$ حيث λ عدد طبيعي

أ/ أثبت أنه يوجد عدد طبيعي λ تكون من أجله المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

ب/ نضع $\lambda = 2$ ، أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n

③ عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث : $S_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

④ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

كلما صغرت العقول زاد صوتها ،

و كلما كبرت العقول زاد صمتها .

التمرين 02

صندوق يحتوي على 8 كرات سوداء ثلاثة منها تحمل الرقم 1- وثلاثة منها تحمل الرقم 0 وإثنتان منها

تحمل الرقم 1 وكرتين حمراوين تحملان الرقمين 1 ، 2 . لا نميز بين الكرات عند اللمس .

I- نسحب عشوائيا من الصندوق كرتين في آن واحد .

① أحسب احتمال الحوادث التالية : A : " سحب كرتين من نفس اللون " .

B : " سحب كرة سوداء على الأكثر " ، C : " سحب كرة سوداء على الأقل " .

② ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب جداء الرقمين المسجلين على الكرتين .

أ/ عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عين قانون احتماله .

ب/ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X^2 ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X^2)$.

II- نسحب عشوائيا من الصندوق n كرة في آن واحد حيث $1 \leq n \leq 9$.

نسمي $P(D)$ احتمال الحدث D : " سحب كرة واحدة حمراء فقط " .

أحسب $P(D)$ بدلالة n ، ثم عين قيم العدد الطبيعي n من أجل $P(D) = \frac{7}{15}$.

التمرين 03

في كل سؤال يوجد إقتراح واحد صحيح عينه مع التبرير .

① فريق كرة قدم يتكون من 22 لاعب منهم 3 حراس ، المدرب لا يملك أي معلومة على اللاعبين ويريد

تشكيل فريق من 11 لاعب منهم حارس ، عدد الإمكانيات الممكنة لتشكيل فريق هو :

أ / 277134 ، ب / 705432 ، ج / 9240 .

② الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $h(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$ القيمة المتوسطة لـ h على المجال $[1; 3]$:

أ / $\mu = 2 - \frac{\ln 3}{3}$ ، ب / $\mu = 1 - \frac{1}{4}(\ln 3)^2$ ، ج / $\mu = \frac{1}{2}(\ln 3)^2$.

③ المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $v_n = \frac{1}{e^{1-n}}$ هي متتالية هندسية أساسها :

أ ($\frac{1}{e}$ ، ب $\sqrt{e}$ ، ج e .

التمرين 04

I- لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

① أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

② أ / بين أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1,31 < \alpha < 1,32$.

ب / إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II- f هي الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = x - e + \frac{1 - \ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم $(o; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الرسم $2cm$.

① بين أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ وفسر النتيجة هندسيا ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

② بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - e$ مقارب مائل لـ (C_f) ، ثم أدرس الوضع النسبي بينهما .

③ أ / بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب / استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

④ بين أن $f(\alpha) = 2\alpha - e - \frac{1}{\alpha}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

⑤ أنشئ (C_f) و (Δ) .

⑥ نعتبر الدالتين h و H المعرفتين على $]0; +\infty[$ كمايلي : $h(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$ و $H(x) = \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

أ / بين أن H هي دالة أصلية للدالة h على المجال $]0; +\infty[$.

ب / إستنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

ج / احسب بـ cm^2 العدد A مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

والمستقيمين اللذين معادليهما : $x = 5$ و $x = e$.

"يجتهد الإنسان في خداع نفسه ، كي لا يفسد يومه الجميل"

الحل المفصل لإختبار رقم 01

التمرين 01

① البرهان بالتراجع : $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$

نسمي الخاصية $P(n) : u_n = 2^{-n} - 2n + 1$ لدينا $u_0 = 2^{-0} - 2(0) + 1 = 2$ ومنه $P(0)$ صحيحة
نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن
 $P(n+1)$ أي نبرهن أن $u_{n+1} = 2^{-(n+1)} - 2(n+1) + 1$
أي نثبت أن $u_{n+1} = 2^{-n-1} - 2n - 1$ ؟؟

لدينا : $u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3$

أي : $u_{n+1} = -n - \frac{3}{2} + \frac{u_n}{2}$

أي : $u_{n+1} = -n - \frac{3}{2} + \frac{2^{-n} - 2n + 1}{2}$

أي : $u_{n+1} = -n - \frac{3}{2} + 2^{-n-1} - n + \frac{1}{2}$

ومنه $u_{n+1} = 2^{-n-1} - 2n - 1$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع

نستنتج أن : $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$

② / إثبات أنه يوجد عدد λ تكون من أجله (v_n) هندسية

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} + \lambda(n+1) - 1$

أي : $v_{n+1} = -n - \frac{3}{2} + \frac{u_n}{2} + \lambda n + \lambda - 1$

أي : $v_{n+1} = -n - \frac{3}{2} + \frac{u_n}{2} + \lambda n + \lambda$

أي : $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 2\lambda n + 2\lambda - 5 - 2n)$

أي : $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \lambda n - 1) + 2\lambda + \lambda n - 4 - 2n$

(v_n) هندسية لما $2\lambda + \lambda n - 4 - 2n = 0$

أي : $\lambda(2+n) - 2(2+n) = 0$

أي : $\lambda(2+n) = 2(2+n)$ ، ومنه $\lambda = 2$

إذن لما $\lambda = 2$ تكون (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

حدها الأول $v_0 = u_0 + \lambda(0) - 1 = 1$

ب/ نضع $\lambda = 2$ ، أكتب v_n بدلالة n

من أجل n كل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 \times q^n$

ومنه $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

❖ استنتاج u_n : لدينا $v_n = u_n + 2n - 1$

ومنه $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2n + 1$

③ عبر عن المجموع S_n حيث : $S_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \dots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\dots+n}$$

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{ إذن :}$$

④ حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \right] = 0 \text{ فإن } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

التمرين 02

عدد السحب الممكنة : $C_{10}^2 = 45$

$$P(A) = \frac{C_8^2 + C_2^2}{45} = \frac{29}{45} \text{ ، حساب } P(A) \text{ ①}$$

الحدث A معناه سحب إما (NN) أو (RR)

$$P(B) = \frac{C_8^1 \times C_2^1 + C_2^2}{45} = \frac{17}{45} \text{ ، حساب } P(B) \text{ ❖}$$

الحدث B معناه سحب إما (NR) أو (RR)

$$P(C) = \frac{C_8^1 \times C_2^1 + C_8^2}{45} = \frac{44}{45} \text{ ، حساب } P(C) \text{ ❖}$$

الحدث C معناه سحب إما (NR) أو (NN)

$$P(\bar{C}) = \frac{C_2^2}{45} = \frac{1}{45} \text{ ، أي } P(\bar{C}) = \frac{1}{45}$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45} \text{ ومنه}$$

② / عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عين قانون احتماله .

$$X(\Omega) = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

الحدث $X = -2$ معناه سحب كرتان تحملان الرقم 2 و -1

$$P(X = -2) = \frac{C_1^1 \times C_3^1}{45} = \frac{3}{45}$$

الحدث $X = -1$ معناه سحب كرتان تحملان الرقم 1 و -1

$$P(X = -1) = \frac{C_3^1 \times C_3^1}{45} = \frac{9}{45}$$

الحدث $X = 0$ معناه سحب كرتان تحملان الرقم 0 أو كرتان

إحدهما تحمل الرقم 0 والأخرى لا تحمل الرقم 0 .

$$P(X = 0) = \frac{C_3^2 + C_3^1 \times C_7^1}{45} = \frac{24}{45}$$

الحدث $X = 1$ معناه سحب كرتان تحملان الرقمان 1 ، أو

$$P(X = 1) = \frac{C_3^2 + C_3^1}{45} = \frac{6}{45} \text{ ، كرتان تحملان الرقمان -1 ، 1}$$

الحدث $X = 2$ معناه سحب كرتان تحملان الرقمان 2 و 1

$$P(X = 2) = \frac{C_1^1 \times C_3^1}{45} = \frac{3}{45}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 - x - \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} - 3 - \frac{(\ln 3)^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2} \right)$$

$$\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} \right) + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} (\ln 3)^2$$

③ الإجابة الصحيحة هي: ج/ e لأن:

$$v_n = \frac{1}{e^{1-n}} = e^{n-1} = e^n \times e^{-1}$$

ولدينا من جهة: $v_{n+1} = e^n$ ومن جهة أخرى

$$q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = e \text{ أي } q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^n}{e^{n-1}}$$

التمرين 04

I- g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$

① دراسة تغيرات الدالة g .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 - 2 + \ln x] = +\infty$$

g تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي:

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x} > 0$$

لأن $x \in]0; +\infty[$ أي $x > 0$ و $2x^2 + 1 > 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

② أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1,31; 1,32]$

$$\begin{cases} g(1,31) = -0,01 \\ g(1,32) = 0,02 \end{cases} \Rightarrow g(1,31) \times g(1,32) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x) = 0$ تقبل

حلا وحيدا α حيث $1,31 < \alpha < 1,32$.

ب/ إستنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+

$X = x_i$	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{45}$	$\frac{9}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{3}{45}$

ب/ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X^2

$$P(X^2 = 0) = P(X = 0) = \frac{24}{45}$$

$$P(X^2 = 1) = P(X = 1) + P(X = -1) = \frac{15}{45}$$

$$P(X^2 = 4) = P(X = 2) + P(X = -2) = \frac{6}{45}$$

$X^2 = x_i^2$	0	1	4
$P(X^2 = x_i^2)$	$\frac{24}{45}$	$\frac{15}{45}$	$\frac{6}{45}$

❖ أحسب أمله الرياضي $E(X^2)$.

$$E(X^2) = \frac{0 \times 24 + 1 \times 15 + 4 \times 6}{45} = \frac{39}{45}$$

II- حساب $P(D)$ بدلالة n .

$$P(D) = \frac{C_2^1 C_8^{n-1}}{C_{10}^n} = \frac{2 \times \frac{8!}{(n-1)!(9-n)!}}{\frac{10!}{n!(10-n)!}}$$

$$P(D) = 2 \times \frac{8!}{(n-1)!(9-n)!} \times \frac{n!(10-n)!}{10!}$$

$$P(D) = 2 \times \frac{8!}{(n-1)!(9-n)!} \times \frac{n!(10-n)(9-n)!}{10 \times 9 \times 8!}$$

$$P(D) = \frac{2}{(n-1)!} \times \frac{n!(10-n)}{10 \times 9}$$

$$P(D) = \frac{2}{(n-1)!} \times \frac{n(n-1)!(10-n)}{10 \times 9}$$

$$P(D) = \frac{n(10-n)}{45} = \frac{10n - n^2}{45}$$

❖ عين قيم العدد الطبيعي n من أجل $P(D) = \frac{7}{15}$

$$P(D) = \frac{10n - n^2}{45} = \frac{7}{15}$$

يكافئ $n^2 - 10n + 21 = 0$ أي $n = 3$ أو $n = 7$

التمرين 03

① الإجابة الصحيحة هي: أ/ 277134 إمكانية لأن

نختار حارس من بين 3 حراس و 10 لاعبين من بين 19

$$\text{لاعب ومنه } C_3^1 \times C_{19}^{10} = 277134$$

② الإجابة الصحيحة هي: ب/ $\mu = 1 - \frac{1}{4} (\ln 3)^2$

$$\mu = \frac{1}{3-1} \int_1^3 h(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 \left(x - 1 - \frac{\ln x}{x} \right) dx$$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

④ تبين أن $f(\alpha) = 2\alpha - e - \frac{1}{\alpha}$

لدينا (1) $f(\alpha) = \alpha - e + \frac{1 - \ln \alpha}{\alpha}$

لدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ ومنه $\alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0$

ومنه (2) $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$

بتعويض (2) في (1) نجد :

$$f(\alpha) = \alpha - e + \frac{1 - (2 - \alpha^2)}{\alpha} = \alpha - e + \frac{-1 + \alpha^2}{\alpha}$$

$$f(\alpha) = \alpha - e - \frac{1}{\alpha} + \alpha = 2\alpha - e - \frac{1}{\alpha}$$

وهو المطلوب .

❖ استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$

لدينا : $1,31 < \alpha < 1,32$

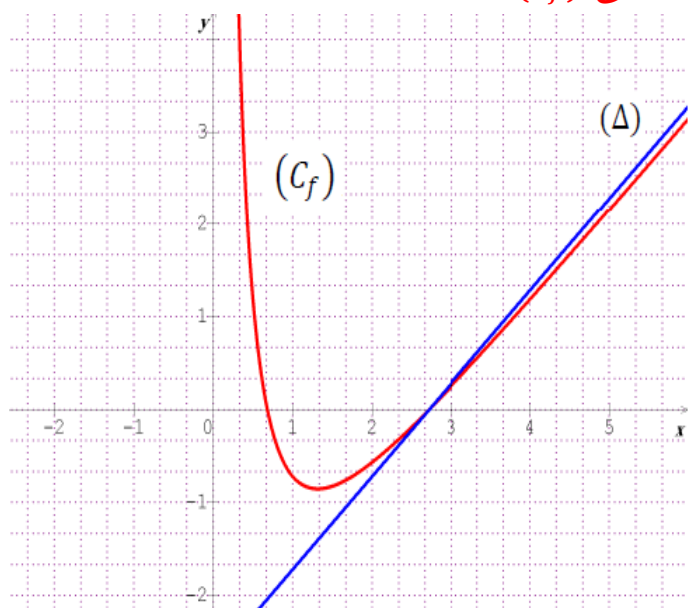
أي $-0,09 < 2\alpha - e < -0,07$

ولدينا من جهة أخرى $-0,75 < -\frac{1}{\alpha} < -0,76$

بالجمع طرفا لطرف نجد :

$$-0,85 < 2\alpha - e - \frac{1}{\alpha} < -0,82$$

⑤ أنشئ (C_f) و (Δ)



-II f دالة ب : $f(x) = x - e + \frac{1 - \ln x}{x}$

① بين أن : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ وفسر النتيجة هندسيا

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (x - e) = -e \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) .

❖ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - e + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

② تبين أن $y = x - e$ (Δ) مقارب مائل لـ (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - e)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

ومن المستقيم $y = x - e$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

❖ دراسة الوضع النسبي بينهما .

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - (x - e) = \frac{1 - \ln x}{x}$

من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ أي $x > 0$ ومنه إشارة

الفرق من إشارة $(1 - \ln x)$.

لدينا $1 - \ln x \geq 0$ أي $-\ln x \geq -1$ أي $\ln x \leq 1$

أي $x \leq e$ أي $x \in]0; e]$.

لما يكون $x \in]0; e]$ فإن (C_f) يقع فوق (Δ) .

لما يكون $x \in]e; +\infty[$ فإن (C_f) يقع تحت (Δ) .

لما يكون $x = e$ فإن (C_f) يقطع (Δ) في $(e; 0)$.

③ أ/ تبين أنه : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = 1 + \frac{-\frac{1}{x} \times x - 1(1 - \ln x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-1 - 1 + \ln x}{x^2} = 1 + \frac{-2 + \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + -2 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $x^2 > 0$.

ومن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $]0; \alpha]$.

⑥ نعتبر الدالتين H و h المعرفتين على $]0; +\infty[$ كمايلي

$$h(x) = \frac{1-\ln x}{x} \text{ و } H(x) = \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 :$$

أ/ بين أن H هي دالة أصلية للدالة h على $]0; +\infty[$.

H هي دالة أصلية للدالة h معناه $H'(x) = h(x)$

الدالة H قابلة للإشتقاق ودالتها المشتقة هي :

$$H'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \left[2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \right]$$

$$H'(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} = \frac{1 - \ln x}{x} = h(x)$$

وهو المطلوب .

ب/ إستنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

$$f(x) = x - e + \frac{1-\ln x}{x} \text{ لدينا}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - ex + \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c \text{ ومنه}$$

ج/ احسب بـ cm^2 العدد A

لما يكون $x \in]e; 5]$ فإن (C_f) يقع تحت (Δ) ومنه

$$A = \int_e^5 [y - f(x)] dx = \int_e^5 - \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right) dx$$

$$A = - \int_e^5 h(x) dx = \int_5^e h(x) dx = [H(x)]_5^e$$

$$A = \left[\ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_5^e =$$

$$A = \left(\ln e - \frac{1}{2}(\ln e)^2 \right) - \left(\ln 5 - \frac{1}{2}(\ln 5)^2 \right)$$

$$A = \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{2 \ln 5 - (\ln 5)^2}{2} \right)$$

$$A = \frac{1}{2} - \frac{2 \ln 5 - (\ln 5)^2}{2} = \frac{1 - 2 \ln 5 + (\ln 5)^2}{2}$$

$$A = \left(\frac{1 - 2 \ln 5 + (\ln 5)^2}{2} \right) \times 2 \times 2 cm^2$$

$$A = (2 - 4 \ln 5 + 2(\ln 5)^2) cm^2 = 0,74 cm^2$$

الإختبار التجريبي رقم 2

التمرين 01

- (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :
- $$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}} \end{cases}$$
- ① أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n+1} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$.
 ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 3$.
 ج/ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة .
- ② أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $9 - (u_{n+1})^2 < 4(3 - u_n)$.
 ب/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 - u_{n+1} < \frac{4}{5}(3 - u_n)$.
 ج/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 - u_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$. ثم استنتج نهاية (u_n) .
- ③ نعتبر المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{u_0-4}{3-u_0} + \frac{u_1-4}{3-u_1} + \dots + \frac{u_n-4}{3-u_n}$.
 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n < 4 \left[1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} \right] - n - 1$.
- ④ استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

" من لم يجد الأمان بين عائلته ، سيظل يرتجف للأبد "

التمرين 02

- لدينا 3 أكياس متماثلة ، الكيس الأول U_1 يحوي كرية بيضاء وكرية سوداء ، الكيس الثاني U_2 يحوي كرتين بيضاوين وكرية سوداء أما الكيس الثالث U_3 يحوي ثلاث كريات بيضاء وكرية سوداء .
 كل الكرات متماثلة ولا نميز بينها باللمس ، نختار كيسا عشوائيا ونسحب منه كرية .
- ① أنجز شجرة الاحتمالات .
- ② أحسب احتمال الحدث A : " الحصول على كرية بيضاء " .
- ③ إذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء ، ما احتمال أن تكون من الكيس U_2 .
- ④ نضع جميع كريات الأكياس السابقة في صندوق واحد ، ونفترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب α دج ، حيث $(\alpha$ عدد طبيعي) ويسحب كرتين من الصندوق في آن واحد ، إذا سحب كرتين بيضاوين يخسر ما دفعه وإذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يعاد له ما دفعه ، وإذا سحب كرتين سوداوين يتحصل على $100 DA$ ، وليكن المتغير العشوائي X الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .
 أ/ برر أن قيم المتغير العشوائي X هي $\{100 - \alpha; 0; -\alpha\}$.
 ب/ عرف قانون احتمال X ، ثم عين أصغر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة ليست في صالح اللاعب .

التمرين 03

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقطتين A و B لاحتقيهما على الترتيب : $z_A = 1 - 2i$ و $z_B = -i$

في كل حالة من الحالات التالية ، عين الإقترح الصحيح الوحيد من بين الإقترحات الثلاثة مع التبرير .

① حل المعادلة : $(1 + 2i)\bar{z} + 2 - i = 0$ ذات المجهول z في $\mathbb{C}$ هو :

أ/ $z = -i$ ، ب/ $z = i$ ، ج/ $z = 1 - 2i$ ،

② عمدة للعدد المركب z حيث : $z = -3 \left(-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right)$ هي :

أ/ $\frac{\pi}{7}$ ، ب/ $-\frac{\pi}{7}$ ، ج/ $\pi - \frac{\pi}{7}$ ،

③ العدد المركب $L = \left(\frac{z_A - z_B}{\sqrt{2}} \right)^{1446}$ يساوي :

أ/ $L = -1 + i$ ، ب/ $L = 1 - i$ ، ج/ $L = i$ ،

التمرين 04

لا تركب القطار الخطأ لمجرد أن الإنتظار مزعج

I- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = 2x + 1 + e^{2x}$

① أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

ب/ أدرس إتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$

② بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α حيث : $-0,7 < \alpha < -0,6$

③ إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = 1 - x + (x + 1)e^{-2x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

① أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب/ إستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y = -x + 1$

ج/ أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)

② أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -g(x)e^{-2x}$

ب/ أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

③ بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث : $-1,2 < x_1 < -1,1$ و $1,1 < x_2 < 1,2$

④ أنشئ (C_f) و (Δ) ، نأخذ $f(\alpha) = 2,9$

⑤ بإستعمال المكاملة بالتجزئة جد دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x + 1)e^{-2x}$ على $\mathbb{R}$

⑥ أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = -1$ و $x = 1$

بالتوفيق إن شاء الله

إذن نستنتج أن $u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 3 فهي متقاربة.

② / تبين أن : $9 - (u_{n+1})^2 < 4(3 - u_n)$

$$\text{لدينا } 9 - (u_{n+1})^2 = 9 - \left(\frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}}\right)^2 = 9 - \frac{4(u_n)^2}{u_n+1}$$

$$\text{أي : } 9 - (u_{n+1})^2 = \frac{9u_n+9-4(u_n)^2}{u_n+1}$$

معلومة : يمكن تحليل ثلاثي كثير الحدود من الدرجة الثانية إذا كان $(\Delta > 0)$ كمايلي :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{ومنه } -4(u_n)^2 + 9u_n + 9 = -4\left(u_n + \frac{3}{4}\right)(u_n - 3)$$

$$\text{ومنه } 9 - (u_{n+1})^2 = \frac{-4(u_n + \frac{3}{4})(u_n - 3)}{u_n+1} = \frac{(4u_n+3)(3-u_n)}{u_n+1}$$

$$\text{ومنه } 9 - (u_{n+1})^2 = \frac{(4u_n+3)(3-u_n)}{u_n+1}$$

$$\text{ومنه } 9 - (u_{n+1})^2 = \left(\frac{4(u_n+1)}{u_n+1} - \frac{1}{u_n+1}\right)(3-u_n)$$

$$\text{ومنه } 9 - (u_{n+1})^2 = \left(4 - \frac{1}{u_n+1}\right)(3-u_n)$$

لدينا من جهة أخرى $u_n < 3$ أي $u_n + 1 < 4$

$$\text{أي } \frac{1}{u_n+1} > \frac{1}{4} \text{ أي } -\frac{1}{u_n+1} < -\frac{1}{4} \text{ أي } 4 - \frac{1}{u_n+1} < \frac{15}{4}$$

$$\text{أي } 4 - \frac{1}{u_n+1} < 4 \text{ وبما أن } 3 - u_n < 2 \text{ نجد}$$

إذن بضرب طرفي المتراجحة في $(3 - u_n)$ نجد

$$\left(4 - \frac{1}{u_n+1}\right)(3-u_n) < 4(3-u_n)$$

إذن $9 - (u_{n+1})^2 < 4(3 - u_n)$ ، وهو المطلوب .

ب/ تبين أنه : $3 - u_{n+1} < \frac{4}{5}(3 - u_n)$

$$\text{لدينا : } 9 - (u_{n+1})^2 < 4(3 - u_n)$$

$$\text{أي : } (3 - u_{n+1})(3 + u_{n+1}) < 4(3 - u_n)$$

$$\text{وبما أن } 3 + u_{n+1} > 0 \text{ فإن } 3 - u_{n+1} < \frac{4(3-u_n)}{3+u_{n+1}}$$

ولدينا (u_n) متزايدة تماما إذن $u_0 < \dots < u_n < u_{n+1}$

$$\text{أي : } u_{n+1} < 2 \text{ ، ومنه } 3 + u_{n+1} < 5$$

$$\text{أي : } \frac{1}{3+u_{n+1}} < \frac{1}{5} \text{ ، ومنه } \frac{4(3-u_n)}{3+u_{n+1}} < \frac{4}{5}(3-u_n)$$

$$\text{ومنه } 3 - u_{n+1} < \frac{4(3-u_n)}{3+u_{n+1}} < \frac{4}{5}(3-u_n)$$

$$\text{ومنه } 3 - u_{n+1} < \frac{4}{5}(3-u_n) \text{ ، وهو المطلوب .}$$

ج/ تبين أنه : $3 - u_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$

① / تبين أن : $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n+1} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$

$$\text{لدينا : } u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}} = \frac{2u_n+2-2}{\sqrt{u_n+1}} = \frac{2u_n+2}{\sqrt{u_n+1}} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$\text{أي : } = \frac{2(u_n+1)}{\sqrt{u_n+1}} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}} = \frac{2(u_n+1)\sqrt{u_n+1}}{\sqrt{u_n+1}\sqrt{u_n+1}} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$\text{أي : } u_{n+1} = 2\sqrt{u_n+1} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}} \text{ ، وهو المطلوب .}$$

ب/ برهن بالتراجع أن : $1 < u_n < 3$

نسمي الخاصية $P(n) : 1 < u_n < 3$

لدينا $u_0 = 2$ ، ومنه $1 < u_0 < 3$ ومنه $P(0)$ صحيحة

نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي كفي ونبرهن

$P(n+1)$ أي نبرهن أن $1 < u_{n+1} < 3$ ؟؟

لدينا : $1 < u_n < 3$ أي $2 < u_n + 1 < 4$

$$\text{أي : } \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{u_n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ أي } \sqrt{2} < \sqrt{u_n+1} < 2$$

$$\text{أي : } -1 < -\frac{2}{\sqrt{u_n+1}} < -\sqrt{2} \text{ (*)}$$

$$\text{لدينا : } 1 < u_n < 3 \text{ أي } \sqrt{2} < \sqrt{u_n+1} < 2$$

$$\text{أي : } 2\sqrt{2} < 2\sqrt{u_n+1} < 4 \text{ (**)}$$

بجمع المتراجحتين (*) و (**) طرفا لطرف نجد :

$$\sqrt{2} < 2\sqrt{u_n+1} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}} < 4 - 1$$

$$\text{ومنه } 1 < u_{n+1} < 3 \text{ ، إذن } 1 < \sqrt{2} < u_{n+1} < 3$$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع

نستنتج أن : $1 < u_n < 3$

ج/ تبين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}} - u_n = \frac{2u_n - u_n\sqrt{u_n+1}}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n+1})}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$= \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n+1})(2 + \sqrt{u_n+1})}{\sqrt{u_n+1}(2 + \sqrt{u_n+1})}$$

$$= \frac{u_n(4 - u_n - 1)}{\sqrt{u_n+1}(2 + \sqrt{u_n+1})} = \frac{u_n(3 - u_n)}{\sqrt{u_n+1}(2 + \sqrt{u_n+1})}$$

$$\text{لدينا : } 1 < u_n < 3 \text{ أي } 0 < 3 - u_n < 2$$

$$\text{و لدينا : } \sqrt{u_n+1}(2 + \sqrt{u_n+1}) > 0$$

بالجمع طرفا لطرف نجد :

$$\frac{-1}{3-u_0} + \dots + \frac{-1}{3-u_n} < - \left[\left(\frac{5}{4}\right)^0 + \dots + \left(\frac{5}{4}\right)^n \right]$$

$$S'_n < - \left[\left(\frac{5}{4}\right)^0 + \dots + \left(\frac{5}{4}\right)^n \right]$$

$$S'_n < - \left[\left(\frac{5}{4}\right)^0 \left(\frac{1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{5}{4}} \right) \right]$$

$$S'_n < - \left[\left(\frac{1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}}{\frac{-1}{4}} \right) \right]$$

$$S'_n < 4 \left(1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} \right)$$

وبما أن $S_n = S'_n - n - 1$ فإن

$$S_n < 4 \left[1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} \right] - n - 1$$

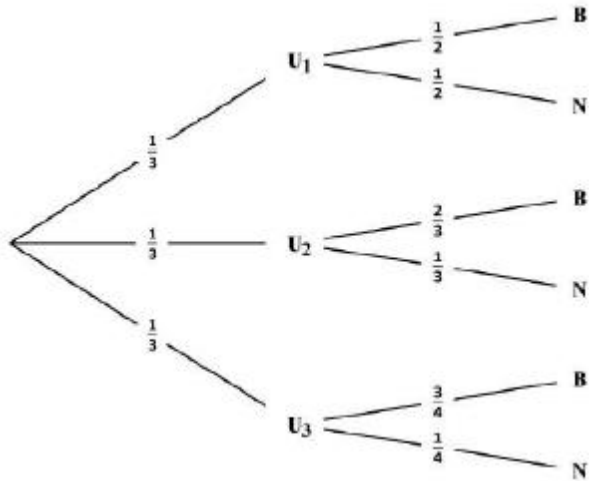
④ استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 \left[1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} \right] - n - 1 \right) = -\infty$$

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$ حسب مبرهنة النهايات بالمقارنة فإن

التمرين 02

① أنجز شجرة الاحتمالات .



② أحسب احتمال A : "الحصول على كرية بيضاء" .

$$P(A) = P(U_1 \cap B) + P(U_2 \cap B) + P(U_3 \cap B)$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{23}{36}$$

③ إذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء ، ما احتمال أن

تكون من الكيس U_2

لدينا : $3 - u_{n+1} < \frac{4}{5}(3 - u_n)$ ومنه :

$$3 - u_1 < \frac{4}{5}(3 - u_0)$$

$$3 - u_2 < \frac{4}{5}(3 - u_1)$$

$$\vdots$$

$$3 - u_{n-1} < \frac{4}{5}(3 - u_{n-2})$$

$$3 - u_n < \frac{4}{5}(3 - u_{n-1})$$

بضرب المتراجحات طرفا لطرف نجد :

$$3 - u_n < \left(\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{4}{5} \right) (3 - u_0)$$

$$3 - u_n < \left(\frac{4}{5} \right)^n (3 - 2) \text{ أي } 3 - u_n < \left(\frac{4}{5} \right)^n \text{ ومنه } 3 - u_n < \left(\frac{4}{5} \right)^n (3 - 2)$$

❖ استنتاج نهاية (u_n) .

لدينا : $3 - u_n < \left(\frac{4}{5} \right)^n$ ولدينا أيضا : $3 - u_n > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5} \right)^n = 0 \text{ ، وبما أن } 0 < 3 - u_n < \left(\frac{4}{5} \right)^n$$

لأن $0 < \frac{4}{5} < 1$ إذن حسب مبرهنة الحصر فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 - u_n) = 0 \text{ ، إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 3$$

$$\textcircled{3} \text{ نعتبر } S_n \text{ حيث : } S_n = \frac{u_0 - 4}{3 - u_0} + \frac{u_1 - 4}{3 - u_1} + \dots + \frac{u_n - 4}{3 - u_n}$$

$$\text{بين أنه : } S_n < 4 \left[1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} \right] - n - 1$$

$$\text{لدينا : } \frac{u_n - 4}{3 - u_n} = \frac{u_n - 3 - 1}{3 - u_n} = \frac{-1 - (3 - u_n)}{3 - u_n} = \frac{-1}{3 - u_n} - 1$$

بالتعويض نجد :

$$S_n = \frac{-1}{3 - u_0} - 1 + \frac{-1}{3 - u_1} - 1 + \dots + \frac{-1}{3 - u_n} - 1$$

$$S_n = \left(\frac{-1}{3 - u_0} + \frac{-1}{3 - u_1} + \dots + \frac{-1}{3 - u_n} \right) - n - 1$$

$$S_n = S'_n - n - 1$$

$$\text{حيث } S'_n = \frac{-1}{3 - u_0} + \frac{-1}{3 - u_1} + \dots + \frac{-1}{3 - u_n}$$

$$\text{لدينا سابقا } 3 - u_n < \left(\frac{4}{5} \right)^n \text{ أي } \frac{1}{3 - u_n} > \left(\frac{5}{4} \right)^n$$

$$\text{أي } \frac{-1}{3 - u_n} < - \left(\frac{5}{4} \right)^n \text{ ، ومنه بالتعويض نجد}$$

$$\frac{-1}{3 - u_0} < - \left(\frac{5}{4} \right)^0$$

$$\frac{-1}{3 - u_1} < - \left(\frac{5}{4} \right)^1$$

$$\vdots$$

$$\frac{-1}{3 - u_n} < - \left(\frac{5}{4} \right)^n$$

$$\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ومنه}$$

$$\frac{z_A - z_B}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{2}} = e^{-\frac{\pi}{4}i} \text{ ومنه ، } 1-i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$L = \left(\frac{z_A - z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1446} = \left(e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^{1446} = e^{-\frac{1446\pi}{4}i}$$

$$L = \cos\left(-\frac{1446\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{1446\pi}{4}\right)$$

$$L = \cos\left(\frac{-1448\pi + 2\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-1448\pi + 2\pi}{4}\right)$$

$$L = \cos\left(-362\pi + \frac{2\pi}{4}\right) + i \sin\left(-362\pi + \frac{2\pi}{4}\right)$$

$$L = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

التمرين 04

• $g(x) = 2x + 1 + e^{2x}$ دالة g -I

① أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 + e^{2x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 + e^{2x}) = +\infty$$

ب/ أدرس إتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$

g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = 2 + 2e^{2x} > 0$$

ومنه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

② تبين أن $g(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α

g مستمرة و متزايدة تماما على $[-0,7; -0,6]$

$$g(-0,7) \times g(-0,6) < 0 \text{ ، إذن } \begin{cases} g(-0,7) = -0,1 \\ g(-0,6) = 0,1 \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x) = 0$

تقبل حل وحيدا α حيث : $-0,7 < \alpha < -0,6$

③ إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

• $f(x) = 1 - x + (x+1)e^{-2x}$ دالة حيث : -II

① أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [1 + e^{-2x}(x+1 - xe^{2x})]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 + e^{-2x} \left(x + 1 - \frac{1}{2}(2x)e^{2x}\right)\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 - x + xe^{-2x} + e^{-2x}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - x - \frac{1}{2}(-2xe^{-2x}) + e^{-2x}\right] = -\infty$$

$$P_A(U_2) = \frac{P(U_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{23}{36}} = \frac{8}{23}$$

④ أ/ تبرير أن $X(\Omega) = \{100 - \alpha; 0; -\alpha\}$

الحدث $(X = 100 - \alpha)$ معناه سحب (NN)

الحدث $(X = 0)$ معناه سحب (NB)

الحدث $(X = -\alpha)$ معناه سحب (BB)

ب/ عرف قانون احتماله .

$$P(X = 100 - \alpha) = \frac{C_3^2}{C_9^2} = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_3^1 C_6^1}{C_9^2} = \frac{18}{36}$$

$$P(X = -\alpha) = \frac{C_6^2}{C_9^2} = \frac{15}{36}$$

$X = x_i$	$100 - \alpha$	0	$-\alpha$
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{15}{36}$

❖ عين أصغر قيمة ممكنة لـ α

تكون اللعبة ليست في صالح اللاعب إذا وفقط إذا كان :

$$E(X) < 0 \text{ أي } \frac{300 - 3\alpha - 15\alpha}{36} < 0 \text{ أي } 300 - 18\alpha < 0$$

$$\text{أي } -18\alpha < -300 \text{ ، أي } \alpha > \frac{300}{18} \simeq 16,66$$

إذن أصغر قيمة ممكنة لـ α هي $\alpha = 17$

التمرين 03

① الإجابة الصحيحة هي : أ/ $z = -i$ ، لأن

$$\bar{z} = \frac{-2+i}{1-2i} \text{ أي } (1+2i)\bar{z} + 2 - i = 0$$

$$\bar{z} = \frac{-2+i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{-2+4i+i+2}{1^2+2^2} = \frac{5i}{5} = i$$

لدينا : $\bar{z} = i$ ، ومنه $z = -i$

② الإجابة الصحيحة هي : ب/ $-\frac{\pi}{7}$ ، لأن

$$z = -3\left(-\cos\frac{\pi}{7} + i \sin\frac{\pi}{7}\right)$$

$$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{7} - i \sin\frac{\pi}{7}\right)$$

$$z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$$

$$\text{لأن } \cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{\pi}{7} \text{ و } \sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) = -\sin\frac{\pi}{7}$$

③ الإجابة الصحيحة هي : ج/ $L = i$

$$\frac{z_A - z_B}{\sqrt{2}} = \frac{1-2i+i}{\sqrt{2}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

لدينا :

$$\begin{cases} \cos(1-i) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(1-i) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ لدينا } |1-i| = \sqrt{2}$$

ب/ إستنتج أن $y = -x + 1$: مستقيم مقارب مائل.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [xe^{-2x} + e^{-2x}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2}(-2xe^{-2x}) + e^{-2x} \right] = 0$$

$y = -x + 1$: مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ج / دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - (-x + 1) = (x + 1)e^{-2x}$

من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن $e^{-2x} > 0$

ومنه إشارة الفرق من إشارة $(x + 1)$ ومنه

لما يكون $x \in]-\infty; -1[$ فإن (C_f) يقع تحت (Δ) .

لما يكون $x \in]-1; +\infty[$ فإن (C_f) يقع فوق (Δ) .

لما يكون $x = -1$ فإن (C_f) يقطع (Δ) في $(-1; 2)$.

② أ/ تبين أنه: $f'(x) = -g(x)e^{-2x}$.

$$f'(x) = -1 + e^{-2x} - 2e^{-2x}(x + 1)$$

$$f'(x) = -1 + e^{-2x} - 2xe^{-2x} - 2e^{-2x}$$

$$f'(x) = -1 - e^{-2x} - 2xe^{-2x}$$

$$f'(x) = -e^{-2x} \left(\frac{1}{e^{-2x}} + 1 + 2x \right)$$

$$f'(x) = -e^{-2x}(e^{2x} + 1 + 2x) = -g(x)e^{-2x}$$

ب/ أدرس إتجاه تغير الدالة f .

من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن $e^{-2x} > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$

ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

③ بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2

حيث: $-1,2 < x_1 < -1,1$ و $1,1 < x_2 < 1,2$

f مستمرة و متزايدة تماما على $[-1,2; -1,1]$

$$f(-1,2) \simeq -0,8 \quad \text{و} \quad f(-1,1) \simeq 0,05$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x) = 0$

تقبل حل وحيدا x_1 حيث: $-1,2 < x_1 < -1,1$.

f مستمرة و متزايدة تماما على $[1,1; 1,2]$

$$f(1,1) \times f(1,2) < 0 \quad \text{،} \quad \begin{cases} f(1,1) \simeq 0,13 \\ f(1,2) \simeq -0,02 \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x) = 0$ تقبل

حل وحيدا x_2 حيث: $1,1 < x_2 < 1,2$.

ومنه نستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث

: $-1,2 < x_1 < -1,1$ و $1,1 < x_2 < 1,2$.

⑤ المكاملة بالتجزئة جد دالة أصلية لـ $x \mapsto (x + 1)e^{-2x}$

$u(x) = x + 1$	$u'(x) = 1$
$v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$	$v'(x) = e^{-2x}$

$$\int (x + 1)e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}[(x + 1)e^{-2x}] + \int \frac{1}{2}e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{1}{2}[(x + 1)e^{-2x}] + \left[-\frac{1}{4}e^{-2x}\right] = \left(\frac{-x-1}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$$

$$= \left(\frac{-2x-2}{4} - \frac{1}{4}\right)e^{-2x} = \left(\frac{-2x-3}{4}\right)e^{-2x} + C$$

⑥ أحسب مساحة الحيز

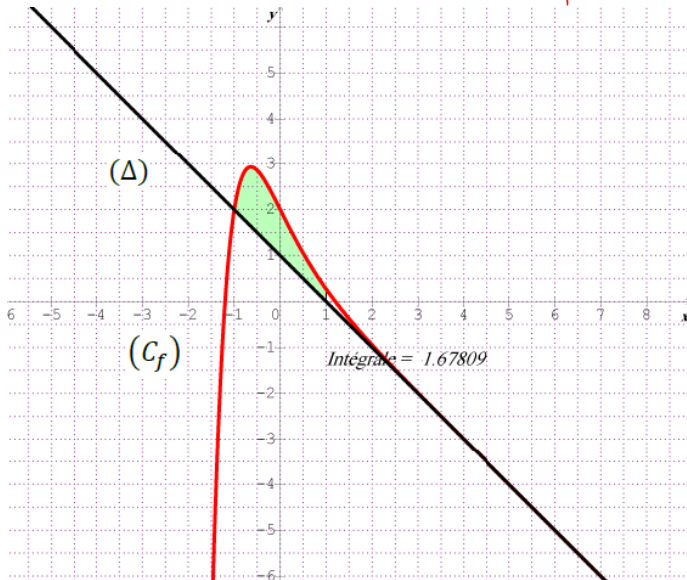
لما يكون $x \in [-1; 1]$ فإن (C_f) يقع فوق (Δ) ومنه

$$A = \int_{-1}^1 [f(x) - (1 - x)] dx = \int_{-1}^1 (x + 1)e^{-2x} dx$$

$$A = \left[\left(\frac{-2x-3}{4} \right) e^{-2x} \right]_{-1}^1 = \frac{-5e^{-2}}{4} - \left(-\frac{1}{4}e^2 \right)$$

$$A = \left(\frac{e^2 - 5e^{-2}}{4} \right) ua$$

الرسم



الإختبار التجريبي رقم 3

التمرين 01

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{cases}$$

① أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 3$.

ب/ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة . ثم حدد نهايتها .

② أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_{n+1} - 3| < \frac{2}{5}|u_n - 3|$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 - u_n < \left(\frac{2}{5}\right)^n (3 - u_0)$.

③ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = n(3 - u_n)$.

أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{4}{5}$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $v_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

" ستعلمك أمك كل شيء إلا العيش بدونها "

التمرين 02

صندوق يحتوي على 4 كرات سوداء و كرية واحدة بيضاء ، لا نميز بين الكرات عند اللمس .

نعبر اللعبة التالية :

يقوم اللاعب برمي زهرة نرد متزن مرقم من 1 إلى 6 ، إذا كان الرقم الظاهر فرديا نضيف كرية بيضاء إلى الصندوق ، وإذا كان الرقم الظاهر زوجيا نضيف كرية سوداء إلى الصندوق ، بعد ذلك يسحب في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق .

نعبر الأحداث التالية : I : " الرقم الظاهر فردي " .

N : " الكريات الثلاث المسحوبة سوداء " .

① أحسب الإحتمالات $P(I)$ ، $P_I(N)$ ، $P_{\bar{I}}(N)$ و $P(N \cap I)$.

② أ/ أكمل شجرة الإحتمالات المقابلة التي تتمحور هذه التجربة

ب/ بين أن $P(N) = \frac{7}{20}$

③ علما أن الكريات المسحوبة كلها سوداء ، ما إحتمال أن

يكون الرقم الظاهر زوجيا ؟

④ ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

أ/ بين أن $P(X = 1) = \frac{11}{20}$ ، ثم عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ب/ أعط تقديرا للقيمة المتوسطة لعدد الكرات البيضاء المسحوبة . ج / إستنتج التباين $V(X)$.

التمرين 03

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) : $z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = 0$.

① أ/ عين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $z^3 - 3z^2 + 3z - 3 = (z - 3)(z^2 + az + b)$.
ب/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

② المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(0; \vec{u}, \vec{v})$.

النقاط A, B, C و D صور الأعداد المركبة $z_A = 3, z_B = i\sqrt{3}, z_C = -i\sqrt{3}, z_D = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.
بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

③ عين z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة D بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

④ F النقطة التي لاحقتها $z_F = 1 - i\sqrt{3}$.

أ/ احسب $\frac{z_F}{z_E}$ واستنتج أن المستقيمين (OF) و (OE) متعامدان .

ب/ عين z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا .

سُئل أعرابي ما رأيك في فلان ؟ فقال
لو كان في بني إسرائيل حين أمرهم
موسى بذبح بقرة لما ذبحوا غيره .

التمرين 04

I- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x - 1)e^{x-1} - 1$.

① أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

② بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α حيث : $1,56 < \alpha < 1,57$.

③ إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x - 2)e^{x-1} - x + 1$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

① أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

② أ/ بين أن f هي دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

ب/ أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

③ أ/ إستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $-\infty$ ، معادلته $y = -x + 1$.

ب/ أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

④ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 .

⑤ أ/ بين أن $f(\alpha) = 2 - \alpha - \frac{1}{\alpha-1}$ ، ثم بين أن $f(\alpha) < 0$.

ب/ أستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين موجبين .

⑥ أنشئ (C_f) و (Δ) و (T) ، وحدة الرسم $2cm$.

⑦ λ عدد حقيقي من المجال $] -\infty; 2[$ و $A(\lambda)$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي

معادلاتها : $y = -x + 1$ و $x = \lambda$ و $x = 2$.

أ/ أحسب بوحدة المساحة cm^2 و بإستعمال المكاملة بالتجزئة $A(\lambda)$.

ب/ عين $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$.

الحل المفصل لإختبار رقم 03

التمرين 01

① ب/ البرهان بالتراجع أن : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 3$

نسمي الخاصية $P(n) : \frac{1}{2} \leq u_n \leq 3$ لدينا $u_0 = \frac{1}{2}$ ، ومنه $\frac{1}{2} \leq u_n < 3$ ومنه $P(0)$ صحيحة
نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n كيفي ونبرهن $P(n+1)$ أي نبرهن أن $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 3$ ؟؟

لدينا : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 3$ أي $1 \leq 2u_n \leq 6$
أي : $2 \leq \sqrt{2u_n + 3} \leq 3$ أي $4 \leq 2u_n + 3 \leq 9$
أي : $\frac{1}{2} \leq 2 \leq \sqrt{2u_n + 3} \leq 3$
ومنه $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 3$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع نستنتج أن : $\frac{1}{2} \leq u_n < 3$

ب/ تبين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2u_n + 3} - u_n = \\ &= \frac{(\sqrt{2u_n + 3} - u_n)(\sqrt{2u_n + 3} + u_n)}{(\sqrt{2u_n + 3} + u_n)} \\ &= \frac{2u_n + 3 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} = \frac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} \end{aligned}$$

إشارة الفرق من إشارة البسط لأن $\sqrt{2u_n + 3} + u_n > 0$

u_n	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$		$-$	$+$	$-$

بما أن $\frac{1}{2} \leq u_n < 3$ فإن $u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه نستنتج المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

❖ استنتاج أنها متقاربة

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 فهي متقاربة .

❖ حدد نهايتها

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة إذن

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \\ \text{ومنه } \sqrt{2l + 3} &= l \text{، إذن } 2l + 3 = l^2 \\ \text{ومنه } -l^2 + 2l + 3 &= 0 \text{، إذن } \begin{cases} l_1 = 3 \\ l_2 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

الحل السالب مرفوض لأن $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 3$

ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

② أ/ تبين أنه : $|u_{n+1} - 3| < \frac{2}{5}|u_n - 3|$

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - 3| &= |\sqrt{2u_n + 3} - 3| \\ &= \left| \frac{(\sqrt{2u_n + 3} - 3)(\sqrt{2u_n + 3} + 3)}{\sqrt{2u_n + 3} + 3} \right| \\ &= \left| \frac{2u_n + 3 - 9}{\sqrt{2u_n + 3} + 3} \right| = \left| \frac{2u_n - 6}{\sqrt{2u_n + 3} + 3} \right| = \frac{2|u_n - 3|}{\sqrt{2u_n + 3} + 3} \end{aligned}$$

لأن $\sqrt{2u_n + 3} + 3 > 0$

ولدينا من جهة أخرى $u_n \geq \frac{1}{2}$ ومنه $2u_n \geq 1$

ومنه $2u_n + 3 \geq 4$ ، ومنه $\sqrt{2u_n + 3} \geq 2$

ومنه $\sqrt{2u_n + 3} + 3 \geq 5$ ، أي $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{\sqrt{2u_n + 3} + 3}$

بضرب الطرفين في $2|u_n - 3|$ نجد :

$$\begin{aligned} \frac{2|u_n - 3|}{\sqrt{2u_n + 3} + 3} &\leq \frac{2}{5}|u_n - 3| \\ |u_{n+1} - 3| &\leq \frac{2}{5}|u_n - 3| \end{aligned}$$

ب/ استنتاج أنه : $3 - u_n < \left(\frac{2}{5}\right)^n (3 - u_0)$

لدينا مما سبق : $|u_{n+1} - 3| \leq \frac{2}{5}|u_n - 3|$

$$|u_1 - 3| \leq \frac{2}{5}|u_0 - 3|$$

$$|u_2 - 3| \leq \frac{2}{5}|u_1 - 3|$$

$$|u_3 - 3| \leq \frac{2}{5}|u_2 - 3|$$

$$|u_n - 3| \leq \frac{2}{5}|u_{n-1} - 3|$$

بضرب أطراف المتباينة طرفا لطرف نجد :

$$|u_n - 3| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n |u_0 - 3|$$

لدينا $u_0 - 3 < 0$ إذن $u_0 - 3 = 3 - u_0$

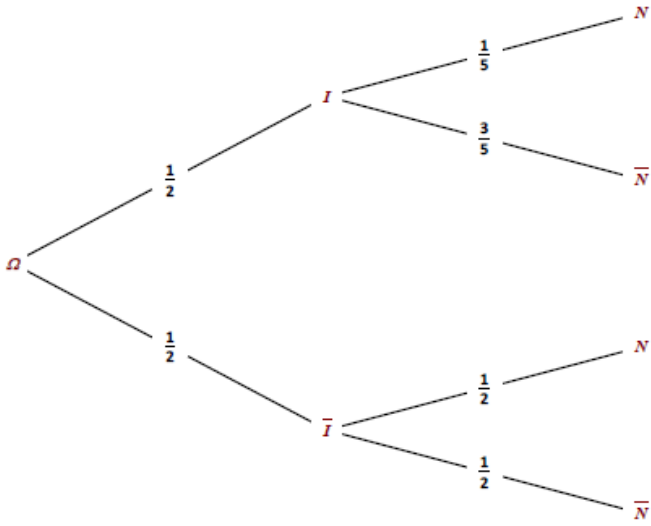
و $u_n - 3 < 0$ ، إذن $u_n - 3 = 3 - u_n$

ومنه بالتعويض نجد $3 - u_n < \left(\frac{2}{5}\right)^n (3 - u_0)$

③ أ/ تبين أنه : $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{4}{5}$

لدينا : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)(3-u_{n+1})}{n(3-u_n)}$

② أ / أكمل شجرة الاحتمالات



ب / تبين أن $P(N) = \frac{7}{20}$.

$$P(N) = P(N \cap I) + P(N \cap \bar{I}) =$$

$$P(N) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} = \frac{7}{20}$$

③ علما أن الكريات المسحوبة كلها سوداء ، ما

إحتمال أن يكون الرقم الظاهر زوجيا ؟

$$P_N(\bar{I}) = \frac{P(N \cap \bar{I})}{P(N)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{20}} = \frac{5}{7}$$

④ ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد

الكريات البيضاء المسحوبة . أي $X \in \{0,1,2\}$

أ / تبين أن $P(X = 1) = \frac{11}{20}$

$$P(X = 1) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{C_2^1 \times C_4^2}{C_6^3}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{C_1^1 \times C_5^2}{C_6^3}\right)$$

$$P(X = 1) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{12}{20}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{10}{20}\right) = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$$

❖ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

$$P(X = 0) = P(N) = \frac{7}{20}$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{C_2^2 \times C_4^1}{C_6^3} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{20} = \frac{2}{20}$$

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{20}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{2}{20}$

ب / أعط تقديرا للقيمة المتوسطة لعدد الكرات البيضاء

$$E(X) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

ج / إستنتاج التباين $V(X)$.

$$V(X) = \frac{(0^2 \times 7) + (1^2 \times 11) + (2^2 \times 2)}{20} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{31}{80}$$

ولدينا سابقا $|u_{n+1} - 3| \leq \frac{2}{5} |u_n - 3|$

أي أن : $3 - u_{n+1} \leq \frac{2}{5} (3 - u_n)$

ومنه $\frac{3 - u_{n+1}}{3 - u_n} \leq \frac{2}{5} \dots\dots\dots (1)$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $n \geq 1$

ومنه : $\frac{1}{n} \leq 1$ ، أي $\frac{1}{n} + 1 \leq 2$ أي أن $\frac{n+1}{n} \leq 2 \dots\dots (2)$

بضرب طرفي المتباينة (1) و (2) طرفا لطرف نجد :

$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 2 \left(\frac{2}{5}\right)$ ، وبالتالي $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{4}{5}$ وهو المطلوب .

ب / استنتاج أنه : $v_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

لدينا مما سبق $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{4}{5}$ ومنه

$$\frac{v_2}{v_1} \leq \frac{4}{5}$$

$$\frac{v_3}{v_2} \leq \frac{4}{5}$$

.

.

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} \leq \frac{4}{5}$$

بضرب المتباينات طرف لطرف نجد $\frac{v_n}{v_1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

وبما أن $v_1 = 1(3 - u_1) = 3 - 2 = 1$

إذن $v_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$.

④ استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

لدينا : $v_n = n(3 - u_n) > 0$ لأن $u_n < 3$

ولدينا أيضا $0 < v_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ وبالتالي $v_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = 0$ لأن $-1 < \frac{4}{5} < 1$

ومنه حسب مبرهنة الحصر فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

التمرين 02

① حساب $P(N \cap I)$ ، $P_I(N)$ ، $P_I(N)$ ، $P(I)$.

$$P(I) = \frac{3}{2} \text{ ، ومنه } P(I) = \frac{3}{6}$$

$$P_I(N) = \frac{1}{5} \text{ ، ومنه } P_I(N) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20}$$

$$P_{\bar{I}}(N) = \frac{1}{2} \text{ ، ومنه } P_{\bar{I}}(N) = \frac{C_5^3}{C_6^3} = \frac{10}{20}$$

لدينا $P(N \cap I) = P(I) \times P_I(N)$ ،

$$P(N \cap I) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10} \text{ ومنه}$$

التمرين 03

① أ/ تعيين العددين a و b .

لدينا : $(z-3)(z^2+az+b)$ ، بعد النشر والتبسيط نجد :

$$z^3 + (a-3)z^2 + (b-3a)z - 3b$$

بالمطابقة نجد : $a-3 = -3$ ، ومنه $a = 0$

$-3b = -9$ ، ومنه $b = 3$ ، ومنه بالتعويض نجد :

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = (z-3)(z^2+3)$$

ب/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

المعادلة (E) تكافئ $z^2 = -3$ أو $z = 3$ أي

$$z = 3 \text{ أو } z = i\sqrt{3} \text{ أو } z = -i\sqrt{3}$$

② تبين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{3 + \sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i} \times \frac{2\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i} = \frac{6\sqrt{3}i - 6}{-12} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\left| \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

لدينا : 1 وهذا يعني أن $|z_A - z_C| = |z_B - z_C|$ أي $CA = CB$

ومن المثلث ABC متساوي الساقين .

$$\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \theta_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta_1 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \text{ أي } \theta_1 = -\frac{\pi}{3}$$

وهذا يعني أن $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{3}$ ، إذن نستنتج أن

المثلث ABC متقايس الأضلاع .

طريقة ثانية : يمكن حساب AB و AC و BC .

③ عين z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة D

بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

$$z' - z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_0)$$

نعلم أن : $z' - z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_0)$ وبما أن E صورة النقطة D فإن

$$z_E - z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_0)$$

$$z_E = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ أي } z_E = e^{i\frac{\pi}{3}} z_D$$

$$z_E = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} \text{ أي } z_E = 2e^{i(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3})}$$

$$z_E = 2 \left[\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right] = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

$$z_E = -\sqrt{3} - i$$

④ F النقطة التي لاحقتها $1 - i\sqrt{3}$.

أ/ حساب $\frac{z_F}{z_E}$.

$$\frac{z_F}{z_E} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - i} \times \frac{-\sqrt{3} + i}{-\sqrt{3} + i} = \frac{-\sqrt{3} + i + 3i + \sqrt{3}}{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = i$$

$$\frac{z_F}{z_E} = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ إذن } \frac{z_F}{z_E} = i$$

❖ استنتاج أن (OF) و (OE) متعامدان .

$$(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) = \frac{\pi}{2} \text{ أي } \frac{z_F}{z_E} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ومنه نستنتج أن المستقيمين (OF) و (OE) متعامدان .

ب/ عين z_G بحيث يكون $OEGF$ مربعا .

$$(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) = \frac{\pi}{2} \text{ و } OE = OF \text{ إذن } \frac{z_F}{z_E} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$OEGF$ مربع معناه $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FG}$ أي $z_E = z_G - z_F$

$$z_G = 1 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3}) \text{ أي } z_G = 1 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})$$

التمرين 04

① دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)e^{x-1} - 1] = -1$$

توضيح : بوضع $x-1 = t$ ، إذن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} te^t = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)e^{x-1} - 1] = +\infty$$

$$g'(x) = e^{x-1} + (x-1)e^{x-1} = xe^{x-1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن $e^{x-1} > 0$ ومنه

إشارة $g'(x)$ من إشارة x ومنه نستنتج أن

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$

و متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		0	+
$g(x)$	-1	$-1 - e^{-1}$	$+\infty$

② تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α

g مستمرة ومتناقصة تماما على $[1,56; 1,57]$

$$g(1,56) \times g(1,57) < 0 \text{ أي } \begin{cases} g(1,56) = -0,01 \\ g(1,57) = 0,007 \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج أن $g(x) = 0$

تقبل حل وحيدا α حيث : $1,56 < \alpha < 1,57$.

③ إستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

$$= \frac{\alpha - 1 - 1}{\alpha - 1} - \alpha + 1 = 1 + \frac{-1}{\alpha - 1} - \alpha + 1$$

$$= 2 - \alpha - \frac{1}{\alpha - 1} = f(\alpha)$$

❖ تبين أن $f(\alpha) < 0$

لدينا : $1,56 < \alpha < 1,57$ ، أي $0,56 < \alpha - 1 < 0,57$

أي $1,75 < \frac{1}{\alpha - 1} < 1,78$ ، أي $-1,78 < \frac{-1}{\alpha - 1} < -1,75$

ولدينا $1,56 < \alpha < 1,57$ أي $0,43 < 2 - \alpha < 0,44$

ومنه $-1,35 < f(\alpha) < -1,31$ ، أي $f(\alpha) < 0$

ب/ استنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين موجبين

f مستمرة ومتناقصة على $[0; \alpha]$ و $f(0) = 0,2$ و $f(\alpha) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x) = 0$ تقبل

حلا وحيدا في المجال $]0; \alpha[$.

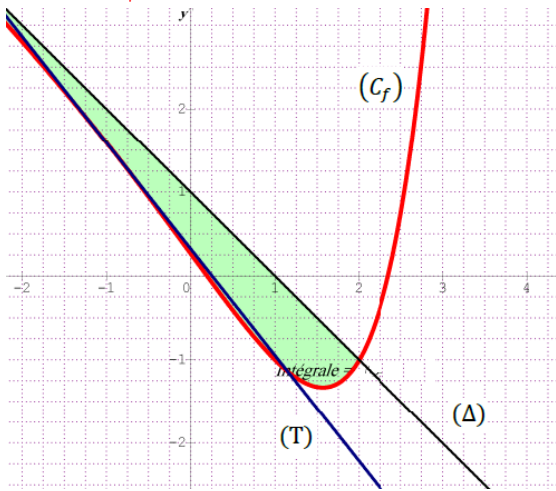
f مستمرة ومتناقصة على $[\alpha; +\infty[$ و $f(\alpha) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

فإن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[\alpha; +\infty[$

ومنه نستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين موجبين

⑥ أنشئ (C_f) و (Δ) و (T) ، وحدة الرسم $2cm$.



⑦ أ/ حساب $A(\lambda)$

لما $x \in]-\infty; 2[$ فإن (C_f) يقع تحت (Δ) .

$$A(\lambda) = - \int_{\lambda}^2 (f(x) - (-x + 1)) dx = - \int_{\lambda}^2 (x - 2)e^{x-1} dx$$

$u(x) = x - 2$	$u'(x) = 1$
$v(x) = e^{x-1}$	$v'(x) = e^{x-1}$

$$A(\lambda) = - \left([(x - 2)e^{x-1}]_{\lambda}^2 - \int_{\lambda}^2 e^{x-1} dx \right)$$

$$A(\lambda) = - [(x - 2)e^{x-1}]_{\lambda}^2 + [e^{x-1}]_{\lambda}^2 =$$

$$A(\lambda) = ((\lambda - 3)e^{\lambda-1} + e) \times 4cm^2$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} [\lambda e^{\lambda} \times e^{-1} - 3e^{\lambda-1} + e] = 4e \text{ ب/}$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

-II دالة $f(x) = (x - 2)e^{x-1} - x + 1$

① حساب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^{x-1} - 2e^{x-1} - x + 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x \times e^{-1} - 2e^{x-1} - x + 1] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x [(x-2)e^{-1} - xe^{-x}] + 1 = +\infty$$

② أ/ تبين أن f هي دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

f هي دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ معناه $f'(x) = g(x)$

$$f'(x) = e^{x-1} + (x - 2)e^{x-1} - 1$$

$$= (1 + x - 2)e^{x-1} - 1 = (x - 1)e^{x-1} - 1 = g(x)$$

ب/ دراسة إتجاه تغير الدالة f .

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه الدالة f متناقصة

تماما على $]-\infty; \alpha[$ و متزايدة تماما على $[\alpha; +\infty[$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

③ أ/ إستنتاج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x + 1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x \times e^{-1} - 2e^{x-1}] = 0$$

ب/ أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (-x + 1) = (x - 2)e^{x-1}$

من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن $e^{x-1} > 0$ ومنه إشارة

الفرق من إشارة $(x - 2)$ ، ومنه

لما $x \in]-\infty; 2[$ فإن (C_f) يقع تحت (Δ) .

لما $x \in]2; +\infty[$ فإن (C_f) يقع فوق (Δ) .

لما $x = 2$ فإن (C_f) يقطع (Δ) في $(2; -1)$

④ كتابة معادلة المماس (T) عند $x_0 = -1$.

$$(T): y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$$

$$(T): y = (-2e^{-2} - 1)x - 5e^{-2} + 1$$

⑤ أ/ تبين أن $f(\alpha) = 2 - \alpha - \frac{1}{\alpha - 1}$

لدينا (1) $f(\alpha) = (\alpha - 2)e^{\alpha-1} - \alpha + 1$.

لدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ أي (2) $e^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha-1}$.

بتعويض (2) في (1) نجد

$$f(\alpha) = (\alpha - 2) \left(\frac{1}{\alpha - 1} \right) - \alpha + 1 = \frac{\alpha - 2}{\alpha - 1} - \alpha + 1$$

الإختبار التجريبي رقم 4

التمرين 01

• $\begin{cases} u_0 = 11 \\ u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n - 2} \end{cases}$: $n \in \mathbb{N}$ هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 \leq u_n \leq 11$.

② أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2}(1 - \sqrt{u_n - 2})$:

ب/ إستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة ، و برر تقاربها . ثم حدد نهايتها .

③ أ/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_{n+1} - 3 < \frac{1}{2}(u_n - 3)$:

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n - 3 < 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

④ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(u_n - 2)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب/ أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) ، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

⑤ أحسب بدلالة n العدد $P_n = (u_0 - 2) \times (u_1 - 2) \times \dots \times (u_n - 2)$ ، ثم استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 81$.

التمرين 02

يحتوي صندوق U_1 على 4 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء ، ويحتوي صندوق U_2 على كرتين حمراوين و

5 كرات بيضاء ، ويحتوي صندوق U_3 على 3 كرات تحمل الرقم 1 و كرتين تحملان الرقم 2 .

I- نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من U_1 ، ولا نهتم بالصندوقين U_2 و U_3 .

① ما هو احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون .

كثرة الإختلاط تفقد المرء هيبته وتجعله مألؤفا
مستهلكا ، احتفظ دائما بالكثير من نفسك لنفسك

② ما هو احتمال الحصول على كرية بيضاء على الأقل .

③ ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المسحوبة .

عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عين قانون احتماله .

II- نسحب الآن كرة من U_3 ، إذا كان رقمها هو 1 نسحب كرة من U_1 ، وإذا كان رقمها هو 2 نسحب كرة من U_2 .

① ما هو احتمال الحصول على كرة حمراء .

② علما أن الكرة المسحوبة حمراء ما هو احتمال أن كونها مسحوبة من U_1 .

نسمي الأحداث التالية : R : " الكرة المسحوبة حمراء " . A_1 : الكرة مسحوبة من U_3 و تحمل الرقم 1

A_2 : الكرة مسحوبة من U_3 و تحمل الرقم 2 ، B : " الكرة المسحوبة من U_1 " .

التمرين 03

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A و B نقطتين لاحتيهما :
 $z_B = \sqrt{3} - 3 + i(\sqrt{3} + 3)$ ، $z_A = \sqrt{3} + 3i$

- ① أكتب العدد المركب z_A على الشكل الأسّي ، ثم بين أن z_A^{2025} عددا حقيقيا سالبا .
- ② أ/ أكتب العدد $\frac{z_B - z_A}{z_A}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسّي .
 ب/ استنتج طبيعة المثلث OAB . وقيسا للزاوية الموجهة $(\vec{OA}, \vec{OB})$.
- ③ أ/ بين أن $OB = 2\sqrt{6}$ وأن $(\vec{u}, \vec{OB}) = \frac{7\pi}{12}$ ، ثم أكتب z_B على الشكل المثلثي .
 ب/ استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.
- ④ نعتبر النقطة C من المستوي التي لاحتها $z_C = z_B - z_A$. بين أن $OABC$ متوازي أضلاع .

التمرين 04

f -I هي الدالة العددية المعرفة على المجال $[-4; +\infty[$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2 \ln(1 - 2x) & ; x \in [-4; 0] \\ f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) & ; x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

- "إحذر! وراء كل اهتمام مفاجئ ، مصلحة"
- (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- ① بين أن الدالة f مستمرة عند $x_0 = 0$.
 - ② أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ ، وبين أن $\frac{1}{2}$ ، ماذا تستنتج .
 ب/ فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها .
 ج / عين معادلتى المماسين (T_1) و (T_2) للمنحنى (C_f) عند المبدأ .
 - ③ أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 ب/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f(x) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-x})$.
 ج / إستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y = x - \ln 2$.
 د / أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .
 - ④ أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها .
 - ⑤ أ/ بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $-1,73 < \alpha < 1,72$.
 ب / أرسم (Δ) والمنحنى (C_f) .
 - ⑥ أ/ بإستعمال المكاملة بالتجزئة عين في $[-4; +\infty[$ الدالة الأصلية H للدالة $h(x) = \ln(1 - 2x)$ حيث $H(-1) = 0$.
 ب/ أحسب المساحة S ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلتها :
 $y = x - \ln 2$ ، $x = 0$ ، $x = -4$.
 - ⑦ m عدد حقيقي غير معدوم ، الدالة العددية المعرفة على المجال $[-4; 0]$ بـ : $g_m(x) = 1 + mf(x)$.
 نسمي (C_m) المنحنى الممثل للدالة g_m .
 بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطتين ثابتتين A و B يطلب تعيين إحداثيات كل منهما .

الحل المفصل لإختبار رقم 04

التمرين 01

① ب/ برهن بالتراجع أن : $3 \leq u_n \leq 11$.

نسمي الخاصية $P(n) : 3 \leq u_n \leq 11$.

لدينا $u_0 = 11$ ، ومنه $3 < u_0 \leq 11$ ومنه $P(0)$ صحيحة
نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n كيفي
ونبرهن $P(n+1)$ أي نبرهن أن $3 \leq u_{n+1} \leq 11$ ؟؟

لدينا : $3 \leq u_n \leq 11$ أي $1 \leq \sqrt{u_n - 2} \leq 3$ أي $3 \leq 2 + \sqrt{u_n - 2} \leq 5$: أي $3 \leq u_{n+1} \leq 11$ ، ومنه $3 \leq u_{n+1} \leq 11$ ، ومنه $P(n+1)$ صحيحة ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع نستنتج أن : $3 \leq u_n < 11$.

② أ/ التحقق : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2}(1 - \sqrt{u_n - 2})$

$$u_{n+1} - u_n = 2 + \sqrt{u_n - 2} - u_n = \sqrt{u_n - 2} - (u_n - 2) = \sqrt{u_n - 2} - (\sqrt{u_n - 2})^2 = \sqrt{u_n - 2}(1 - \sqrt{u_n - 2})$$

ب/ تبين أن المتتالية (u_n) متناقصة

$\sqrt{u_n - 2} > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $1 - \sqrt{u_n - 2}$

لدينا : $3 \leq u_n < 11$ أي $1 \leq \sqrt{u_n - 2} < 3$ أي $-3 \leq -\sqrt{u_n - 2} \leq -1$ أي $-2 \leq 1 - \sqrt{u_n - 2} \leq 0$

ومنه نستنتج أن $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ومنه (u_n) متناقصة

❖ استنتاج أنها متقاربة

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 3 فهي متقاربة .

❖ حدد نهايتها

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة إذن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

ومنه $2 + \sqrt{l - 2} = l$ ، إذن $\sqrt{l - 2} = l - 2$

$$(\sqrt{l - 2})^2 = (l - 2)^2$$

أي

$$l^2 - 5l + 6 = 0$$

ومنه $l - 2 = l^2 + 4 - 4l$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3 \text{ ومنه } \begin{cases} l_1 = 2 \notin [3; 11] \\ l_2 = 3 \end{cases} \text{ إذن}$$

② أ/ تبين أنه : $0 \leq u_{n+1} - 3 < \frac{1}{2}(u_n - 3)$.

لدينا : $3 \leq u_n \leq 11$ ، ومنه $1 \leq \sqrt{u_n - 2} \leq 3$

ومنه $3 \leq u_{n+1} \leq 5$ أي $3 \leq \sqrt{u_n - 2} + 2 \leq 5$

ومنه $1 \leq u_{n+1} - 3 \leq 2$ أي $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq 2$ (1)

❖ يبقى لنا أن نثبت أن $0 \leq u_{n+1} - 3 < \frac{1}{2}(u_n - 3)$.

$$u_{n+1} - 3 = \frac{(\sqrt{u_n - 2} - 1)(\sqrt{u_n - 2} + 1)}{(\sqrt{u_n - 2} + 1)}$$

$$u_{n+1} - 3 = \frac{u_n - 2 - 1}{\sqrt{u_n - 2} + 1} = \frac{u_n - 3}{\sqrt{u_n - 2} + 1}$$

لدينا مما سبق $1 \leq \sqrt{u_n - 2} \leq 3$

ومنه $2 \leq \sqrt{u_n - 2} + 1 \leq 4$

$$\frac{1}{\sqrt{u_n - 2} + 1} \leq \frac{1}{2} \text{ ومنه } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{\sqrt{u_n - 2} + 1} \leq \frac{1}{2}$$

بضرب طرفي المتراجحة في $(u_n - 3)$ نجد :

$$\frac{u_n - 3}{\sqrt{u_n - 2} + 1} \leq \frac{1}{2}(u_n - 3)$$

$$u_{n+1} - 3 = \frac{u_n - 3}{\sqrt{u_n - 2} + 1}$$

فإن $u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(u_n - 3)$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(u_n - 3)$

ب/ استنتاج أنه : $0 \leq u_n - 3 < 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا مما سبق : $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(u_n - 3)$

$$0 \leq u_1 - 3 \leq \frac{1}{2}(u_0 - 3)$$

$$0 \leq u_2 - 3 \leq \frac{1}{2}(u_1 - 3)$$

.

$$0 \leq u_n - 3 \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} - 3)$$

بضرب أطراف المتباينة طرفا لطرف نجد :

$$0 \leq u_n - 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 3)$$

لدينا $u_0 - 3 = 11 - 3 = 8$ إذن

$$0 \leq u_n - 3 \leq 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

④ أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية .

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 2) = \ln(2 + \sqrt{u_n - 2} - 2)$$

$$v_{n+1} = \ln(\sqrt{u_n - 2}) = \frac{1}{2} \ln(u_n - 2) = \frac{1}{2} v_n$$

② علما أن الكرة المسحوبة حمراء ماهو احتمال أن

كونها مسحوبة من U_1 .

$$P_R(U_{1(R)}) = \frac{\frac{12}{35}}{\frac{12}{16}} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

التمرين 03

① كتابة العدد المركب z_A على الشكل الأسّي.

$$r = |z_A| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

نضع $\arg(z_A) = \theta$ ، ومنه $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ومنه $z_A = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه :

❖ تبين أن z_A^{2025} عددا حقيقيا سالبا .

$$z_A^{2025} = (2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}})^{2025} = (2\sqrt{3})^{2025} \times e^{i\frac{2025\pi}{3}}$$

$$z_A^{2025} = (2\sqrt{3})^{2025} \times e^{i675\pi} = (2\sqrt{3})^{2025} \times e^{i\pi}$$

$$z_A^{2025} = -(2\sqrt{3})^{2025} \in \mathbb{R}^-$$

② أ/ كتابة $\frac{z_B - z_A}{z_A}$ على الشكل الجبري والأسّي.

$$\frac{z_B - z_A}{z_A} = \frac{\sqrt{3} - 3 + i(\sqrt{3} + 3) - \sqrt{3} - 3i}{\sqrt{3} + 3i}$$

$$= \frac{-3 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + 3i} = \frac{i^2 3 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + 3i} = \frac{i(\sqrt{3} + 3i)}{\sqrt{3} + 3i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ب/ استنتاج طبيعة المثلث OAB .

$$\left| \frac{z_B - z_A}{z_A} \right| = \frac{|z_B - z_A|}{|z_A - z_O|} = \frac{AB}{OA} = 1$$

ومنه $AB = OA$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

لدينا $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$ أي $\angle OAB = 90^\circ$

ومنه OAB مثلث قائم في A ومتساوي الساقين .

❖ تعيين قياسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4}$$

③ أ/ تبين أن $OB = 2\sqrt{6}$ وأن $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \frac{7\pi}{12}$.

$$OB = |z_B| = \sqrt{(\sqrt{3} - 3)^2 + (\sqrt{3} + 3)^2}$$

$$= \sqrt{3 + 9 - 6\sqrt{3} + 3 + 9 + 6\sqrt{3}} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

$$v_0 = \ln(u_0 - 2) = \ln 9$$

ب/ أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) .

$$\text{لدينا : } v_n = v_0 \times q^n \text{ ، ومنه } v_n = \ln 9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

❖ استنتاج عبارة (u_n) بدلالة n .

$$\text{لدينا : } v_n = \ln(u_n - 2) \text{ ، ومنه } u_n = e^{v_n} + 2$$

$$\text{ومنه } u_n = e^{\ln 9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} + 2$$

⑤ أحسب بدلالة n العدد :

$$P_n = (u_0 - 2) \times (u_1 - 2) \times \dots \times (u_n - 2)$$

لدينا مما سبق $u_n - 2 = e^{v_n}$ ومنه بالتعويض نجد

$$P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n}$$

$$P_n = e^{v_0 \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right)} = e^{\ln 9 \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right)}$$

$$P_n = e^{2 \ln 9 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)}$$

❖ استنتاج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 81$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \text{ ومنه } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2 \ln 9} = e^{\ln 9^2} = 81$$

التمرين 02

I- ① احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون

$$\frac{C_4^3 + C_3^3}{C_7^3} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

② ماهو احتمال الحصول على كرية بيضاء على الأقل

$$\frac{C_3^1 C_4^2 + C_3^2 C_4^1 + C_3^3 C_4^0}{C_7^3} = \frac{31}{35}$$

③ عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عين قانون احتماله .

قيم المتغير العشوائي X هي $\{0, 1, 2, 3\}$

$$P(X = 1) = \frac{C_3^1 C_4^2}{C_7^3} = \frac{18}{35} \text{ ، } P(X = 0) = \frac{C_3^0 C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_3^3 C_4^0}{C_7^3} = \frac{1}{35} \text{ ، } P(X = 2) = \frac{C_3^2 C_4^1}{C_7^3} = \frac{12}{35}$$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

II- ① احتمال الحصول على كرة حمراء .

$$P(R) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{16}{35}$$

❖ تبين أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$ ، ماذا تستنتج .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+e^x) - \ln 2}{x}$$

بوضع $u(0) = \ln 2$ ، و $u(x) = \ln(1+e^x)$

الدالة u تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+e^x) - \ln 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x) - u(0)}{x - 0} = u'(0) = \frac{1}{2}$$

لأن $u'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{2}$ ، ومنه $u'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

نستنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين $x_0 = 0$ وتقبل الاشتقاق على يسار $x_0 = 0$.

ب/ فسر بياننا النتيجة المحصل عليها .

المنحنى (C_f) يقبل على يسار المبدأ نصف مماس
معامل توجيهه $f'_g(0) = 4$

المنحنى (C_f) يقبل على يمين المبدأ نصف مماس
معامل توجيهه $f'_d(0) = \frac{1}{2}$

ج / عين معادلتى المماسين (T_1) و (T_2) ل (C_f) عند المبدأ

$$(T_1): y = f'_g(0)(x - 0) + f(0)$$

$$(T_1): y = 4x$$

$$(T_2): y = f'_d(0)(x - 0) + f(0)$$

$$(T_2): y = \frac{1}{2}x$$

③ أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ ، ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+e^x}{2}\right) = +\infty$$

ب/ بين أنه : $f(x) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-x})$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) = \ln(1+e^x) - \ln 2$$

$$f(x) = \ln\left[e^x \left(\frac{1}{e^x} + 1\right)\right] - \ln 2$$

$$f(x) = \ln[e^x(e^{-x} + 1)] - \ln 2$$

$$f(x) = \ln(e^x) + \ln(e^{-x} + 1) - \ln 2$$

$$f(x) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-x})$$

ج / إستنتاج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - \ln 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^{-x})] = 0$$

ومنه $(\Delta): y = x - \ln 2$ مستقيم مقارب مائل ل (C_f)

د / دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x - \ln 2) = \ln(1 + e^{-x})$
من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن $e^{-x} > 0$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$$

❖ كتابة z_B على الشكل المثلثي .

$$\text{لدينا } |z_B| = 2\sqrt{6} \text{ و } \arg(z_B) = \frac{7\pi}{12}$$

$$z_B = 2\sqrt{6} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i2\sqrt{6} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

ب/ استنتاج القيمة المضبوطة ل $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$$\sqrt{3} - 3 + i(\sqrt{3} + 3) = 2\sqrt{6} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i2\sqrt{6} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-3}{2\sqrt{6}} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+3}{2\sqrt{6}} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} 2\sqrt{6} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sqrt{3} - 3 \\ 2\sqrt{6} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sqrt{3} + 3 \end{cases} \text{ ومنه}$$

④ تبين أن $OABC$ متوازي أضلاع .

$$\text{لدينا } z_C = -3 + \sqrt{3}i$$

$OABC$ متوازي أضلاع معناه $z_{\overrightarrow{OC}} = z_{\overrightarrow{AB}}$

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -3 + \sqrt{3}i$$

$$\text{ومن جهة أخرى } z_{\overrightarrow{OC}} = z_C = -3 + \sqrt{3}i$$

وهو المطلوب .

التمرين 04

① تبين أن الدالة f مستمرة عند $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2 \ln(1 - 2x)) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) = 0$$

$$\text{ومنه } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

ومنه نستنتج أن الدالة f مستمرة عند $x_0 = 0$

② أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 2 \ln(1 - 2x)}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - \frac{2 \ln(1 - 2x)}{x}\right)$$

مساعدة : نضرب ونقسم على -2 ، ومنه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + 4 \left(\frac{\ln(1 - 2x)}{-2x}\right)\right)$$

بوضع $t = -2x$ ، لما $x \rightarrow 0$ فإن $t \rightarrow 0$ ومنه :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 - 2x)}{-2x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + t)}{t}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + 4 \left(\frac{\ln(1 - 2x)}{-2x}\right)\right) = 4$$

$$\int_{-1}^x \ln(1-2t) dt = [t \ln(1-2t)]_{-1}^x - \int_{-1}^x \frac{-2t}{1-2t} dt$$

لكن :

$$\int_{-1}^x \frac{-2t}{1-2t} dt = \int_{-1}^x \frac{1-2t-1}{1-2t} dt = \int_{-1}^x \left(1 - \frac{1}{1-2t}\right) dt$$

$$\int_{-1}^x 1 dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{-2}{1-2t} dt = [t]_{-1}^x + \frac{1}{2} [\ln(1-2t)]_{-1}^x$$

$$= [t \ln(1-2t)]_{-1}^x - [t]_{-1}^x - \frac{1}{2} [\ln(1-2t)]_{-1}^x$$

$$= x \ln(1-2x) + \ln 3 - (x+1) - \frac{1}{2} [\ln(1-2x) - \ln 3]$$

$$H(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln(1-2x) - (x+1) + \frac{3}{2} \ln 3 + C$$

ب/ حساب S :

$$S = \int_{-4}^0 (f(x) - (x - \ln 2)) dx =$$

$$S = \int_{-4}^0 (x^2 - 2 \ln(1-2x) - x + \ln 2) dx$$

$$\left[\frac{x^3}{3} - 2H(x) - \frac{x^2}{2} + x \ln 2 \right]_{-4}^0 = \left(\frac{76}{3} + \ln 16 - 18 \ln 3 \right) ua$$

⑦ تبين أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطتين

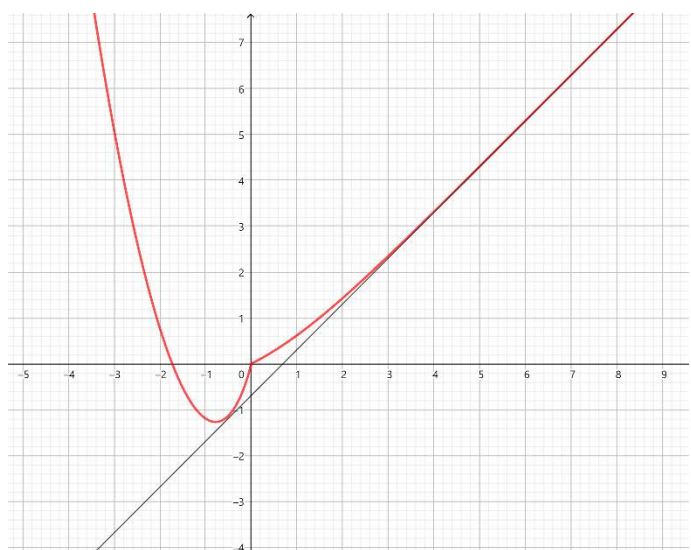
ثابتتين A و B يطلب تعيين إحداثيات كل منهما ..

لدينا : $y = 1 + mf(x)$ أي $1 + mf(x) - y = 0$

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} f(x) = 0 \\ 1 - y = 0 \end{cases}$$

حسب السؤال ⑤ فإن $f(x) = 0$ تكافئ $\begin{cases} x = 0 \\ x = \alpha \end{cases}$

ومنه جميع المنحنيات (C_m) تشمل (0; 1) و (α ; 1) .



أي $1 + e^{-x} > 1$ وبما أن الدالة $x \mapsto \ln x$ متزايدة فإن

$$f(x) - (x - \ln 2) > 0 \text{ ومنه } \ln(1 + e^{-x}) > 0$$

ومنه نستنتج أن (C_f) يقع فوق (Δ) .

④ أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها

الدالة f تقبل الإشتقاق على $[-4; 0]$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = 2x + \frac{4}{1-2x} = \frac{-4x^2 + 2x + 4}{1-2x}$$

من أجل كل $x \in [-4; 0]$ فإن $1 - 2x > 0$ ، ومنه

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-4x^2 + 2x + 4$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \notin [-4; 0] \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4} \end{cases} \text{ لدينا } \Delta = 68 \text{ ومنه}$$

x	-4	x_2	0
$f'(x)$	-	0	+

ومنه f متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1-\sqrt{17}}{4}; 0\right]$

ومتناقصة تماما على المجال $\left[-4; \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right]$.

الف تقبل الإشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{\frac{e^x}{2}}{\frac{1+e^x}{2}} = \frac{e^x}{1+e^x} > 0$$

ومنه f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

x	-4	x_2	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	0	+
$f(x)$	$16 - 4\ln 3$	$f(x_2)$	0	$+\infty$

⑤ تبين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما

معدوم والآخر α حيث $-1,73 < \alpha < 1,72$.

لدينا $f(0) = 0$.

الف مستمرة ومتزايدة تماما على $[-1,73; -1,72]$

ولدينا $f(-1,72) = -0,022$ و $f(-1,73) = 0,002$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,73 < \alpha < 1,72$.

⑥ أ/ المكاملة بالتجزئة عين في $[-4; +\infty[$ الدالة الأصلية H .

$u(t) = \ln(1-2t)$	$u'(t) = \frac{-2}{1-2t}$
$v(t) = t$	$v'(t) = 1$

الإختبار التجريبي رقم 5

التمرين 01

- $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+3}{5-u_n} \end{cases}$: $\mathbb{N}$ ب : هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$
- ① / تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = -1 + \frac{8}{5-u_n}$
- ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$
- ② أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة .
- ③ / برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 < \frac{4}{5}(u_n - 1)$
- ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n - 1 < \left(\frac{4}{5}\right)^n$ ثم استنتج نهاية (u_n) .
- ④ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n-1}{3-u_n}$
- أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
- ب/ أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n . ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- ⑤ / أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{2024}{u_0-3} + \frac{2024}{u_1-3} + \dots + \frac{2024}{u_n-3}$
- ب/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

بدلا من إضاعة المزيد من الوقت في جمع الأوراق المتناثرة ، قم بإغلاق النافذة

التمرين 02

- يحتوي كيس على ثلاث كرات تحمل الرقم 1 و ثلاث كرات تحمل الرقم 2 وكرة تحمل الرقم 3
- كل الكرات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس .
- I- نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من هذا الكيس .
- ① ما هو احتمال الحدث A : "الحصول على كرتين من نفس الرقم" .
- ② ما هو احتمال الحدث B : "الحصول على كرتين تحملان عددين جداؤهما زوجي" .
- ③ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب العدد $\cos\left(\frac{\pi}{\alpha\beta}\right)$ بحيث α و β يمثلان الرقمين
- الظاهرين على الكرتين المسحوبتين .
- أ/ عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عين قانون احتماله .
- ب/ أحسب العدد $E(2007X + 1993)$
- II- n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$ ، نسحب من الكيس n كرة على التوالي مع الإرجاع .
- ① أحسب P_n احتمال الحصول على كرة واحدة على الأقل تحمل الرقم 1 .
- ② عين أصغر عدد طبيعي n ، بحيث $P_n \geq 0.99$.

التمرين 03

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{u}, \vec{v})$. A, B, C, D نقاط لواحقها على

الترتيب : $z_A = 1, z_B = 5 - 2i, z_C = 3 + 4i, z_D = -3 + 2i$.

① بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $(z_A + z_C)^{8n} = (z_B + z_D)^{20n}$.

② بين أن : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

③ لتكن I منتصف $[BC]$ ، اكتب معادلة الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC .

④ لتكن E نظيرة C بالنسبة لـ B ، بين أن لاحقة E هي : $z_E = 7 - 8i$.

⑤ عين مركز وزاوية الدوران r الذي يحول B إلى C ويحول C إلى D .

البار بأمه لا يضيع ولا يخيب ولا يخسر . اللهم أحفظ أمهاتنا

التمرين 04

I- في الشكل المقابل ، المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد ، (γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto x^2 \ln(x^2)$ ، و (τ)

التمثيل البياني للدالة $x \mapsto 1 + x^2$ ، و α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (τ) .

① بقراءة بيانية حدد الوضع النسبي بين (γ) و (τ) على $]0; +\infty[$

② الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = 1 + x - x \ln x$.

أ/ استنتج إشارة $g(x^2)$ على $]0; +\infty[$.

ب/ تحقق أن $1,89 < \alpha < 1,9$.

ج/ بين أن : $\ln \alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right)$.

II- الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

① أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

② أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال : $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$.

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

③ أثبت أن : $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

④ أنشئ (C_f) .

⑤ m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة : $mx^2 + m + \ln x = 0$.

⑥ أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; 1[$: $\ln x < f(x) < \frac{1}{2} \ln x$.

ب/ λ عدد حقيقي من المجال $]0; 1[$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن : $\int_{\lambda}^1 \ln x dx = \lambda(1 - \ln \lambda) - 1$.

ج/ $A(\lambda)$ هي مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادليهما :

$x = \lambda$ و $x = 1$.

بين أن : $\frac{1 - \lambda(1 - \ln \lambda)}{2} < A(\lambda) < 1 - \lambda(1 - \ln \lambda)$.

الحل المفصل لإختبار رقم 05

التمرين 01

① أ/ التحقق أنه : $u_{n+1} = -1 + \frac{8}{5-u_n}$

$$-1 + \frac{8}{5-u_n} = \frac{-1(5-u_n) + 8}{5-u_n} = \frac{-5+u_n+8}{5-u_n} = \frac{u_n+3}{5-u_n} = u_{n+1}$$

ب/ البرهان بالتراجع أن : $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$

نسمي الخاصية $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2} \dots P(n)$

لدينا $u_0 = 2$ ، ومنه $1 < u_0 \leq \frac{5}{2}$ ومنه $P(0)$ صحيحة

نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n كيفي

ونبرهن $P(n+1)$ أي نبرهن أن $1 \leq u_{n+1} \leq \frac{5}{2}$ ؟؟

لدينا : $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$ أي $-\frac{5}{2} \leq -u_n \leq -1$

أي : $4 \leq 5 - u_n \leq \frac{5}{2}$ أي $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{5-u_n} \leq \frac{2}{5}$

أي : $2 \leq \frac{8}{5-u_n} \leq \frac{16}{5}$ ، ومنه $\frac{5}{2} \leq -1 + \frac{8}{5-u_n} \leq \frac{11}{5}$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع

نستنتج أن : $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$

② دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس إشارة الفرق :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 3}{5 - u_n} - u_n = \frac{u_n + 3 - 5u_n + u_n^2}{5 - u_n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - 4u_n + 3}{5 - u_n} = \frac{(u_n - 1)(u_n - 3)}{5 - u_n}$$

لدينا : $4 \leq 5 - u_n \leq \frac{5}{2}$ ، و $0 \leq u_n - 1 \leq \frac{1}{2}$

و $-\frac{1}{2} \leq u_n - 3 \leq -2$

ومنه أن $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه (u_n) متناقصة تماما .

❖ استنتاج أنها متقاربة

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل

بالعدد 1 فهي متقاربة .

③ أ/ البرهان أنه : $u_{n+1} - 1 < \frac{4}{5}(u_n - 1)$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n + 3}{5 - u_n} - 1 = \frac{u_n + 3 - 5 + u_n}{5 - u_n} = \frac{2(u_n - 1)}{5 - u_n}$$

لدينا : $4 \leq 5 - u_n \leq \frac{5}{2}$ ، ومنه $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{5 - u_n} \leq \frac{2}{5}$

بالضرب في $2(u_n - 1)$ نجد $\frac{2(u_n - 1)}{5 - u_n} \leq \frac{4}{5}(u_n - 1)$

وبما أن $u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n - 1)}{5 - u_n}$ فإن

$$u_{n+1} - 1 < \frac{4}{5}(u_n - 1)$$

② أ/ استنتاج أن : $0 \leq u_n - 1 < \left(\frac{4}{5}\right)^n$

لدينا : $0 \leq u_n - 1 \leq \frac{1}{2}$ (1)

❖ يبقى لنا أن نثبت أن $u_n - 1 < \left(\frac{4}{5}\right)^n$

لدينا مما سبق : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{4}{5}(u_n - 1)$

$$u_1 - 1 \leq \frac{4}{5}(u_0 - 1)$$

$$u_2 - 1 \leq \frac{4}{5}(u_1 - 1)$$

.

.

$$u_n - 1 \leq \frac{4}{5}(u_{n-1} - 1)$$

بضرب أطراف المتباينة طرفا لطرف نجد :

$$u_n - 1 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n (u_0 - 1)$$

$$u_n - 1 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

ومنه نستنتج أن $0 \leq u_n - 1 < \left(\frac{4}{5}\right)^n$

❖ استنتاج نهاية (u_n)

لدينا : $-\frac{4}{5} < \frac{4}{5} < 1$ ، إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$

ومنه حسب مبرهنة الحصر $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 1 = 0$

ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

④ أ/ إثبات أن المتتالية (v_n) هندسية

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{3 - u_{n+1}} = \frac{\frac{u_n + 3}{5 - u_n} - 1}{3 - \frac{u_n + 3}{5 - u_n}} = \frac{\frac{u_n + 3 - 5 + u_n}{5 - u_n}}{\frac{15 - 3u_n - u_n - 3}{5 - u_n}} = \frac{2(u_n - 1)}{-4u_n + 12}$$

$$v_{n+1} = \frac{2u_n - 2}{-4u_n + 12} = \frac{2}{4} \left(\frac{u_n - 1}{3 - u_n} \right) = \frac{1}{2} v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{3 - u_0} = \frac{2 - 1}{3 - 2} = 1$$

ب/ كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (v_n)

لدينا : $v_n = v_0 \times q^n$ ، ومنه $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

❖ استنتاج عبارة (u_n) بدلالة n

لدينا : $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$ ، ومنه $3v_n - v_n u_n = u_n - 1$

$X = x_i$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{21}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$

ب/ حساب العدد $E(2007X + 1993)$

$$E(X) = -\frac{3}{21} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{21} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3}{21} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{21} = 0.15$$

$$E(2007X + 1993) = 2007E(X) + 1993$$

$$E(2007X + 1993) = 2007 \times 0.15 + 1993$$

$$E(2007X + 1993) = 2294.05$$

II- ① حساب P_n

لدينا $\bar{P}_n$: "عدم سحب أي كرية تحمل الرقم 1"

$$P_n = 1 - \bar{P}_n = 1 - \frac{4^n}{7^n} = 1 - \left(\frac{4}{7}\right)^n$$

② عين أصغر عدد طبيعي n ، بحيث $P_n \geq 0.99$

$$P_n \geq 0.99 \text{ يكافئ } 1 - \left(\frac{4}{7}\right)^n \geq 0.99$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^n \leq 0.01 \text{ يكافئ } -\left(\frac{4}{7}\right)^n \geq -0.01$$

$$\text{يكافئ } n \ln\left(\frac{4}{7}\right) \leq \ln(0.01) \text{ أي } n \geq \frac{\ln(0.01)}{\ln\left(\frac{4}{7}\right)}$$

أي $n \geq 8.22$ ومنه أصغر عدد طبيعي n ، بحيث

$$P_n \geq 0.99 \text{ هو } n = 9$$

التمرين 03

① تبين أن: $(Z_A + Z_C)^{8n} = (Z_B + Z_D)^{20n}$

لدينا من جهة $Z_A + Z_C = 4 + 4i$ ، ومنه

$$\begin{aligned} (Z_A + Z_C)^{8n} &= (4 + 4i)^{8n} = 4^{8n}(1 + i)^{8n} \\ &= 4^{8n}[(1 + i)^2]^{4n} = 4^{8n}(2i)^{4n} = 4^{8n}[(2i)^2]^{2n} \\ &= 4^{8n}[-4]^{2n} = 4^{8n}[4]^{2n} = 4^{10n} \end{aligned}$$

ومن جهة أخرى $Z_B + Z_D = 2$ ، ومنه

$$(Z_B + Z_D)^{20n} = (2)^{20n} = [(2)^2]^{10n} = 4^{10n}$$

ومنه: $(Z_A + Z_C)^{8n} = (Z_B + Z_D)^{20n}$

② تبين أن: $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{2 + 4i}{4 - 2i} \times \frac{4 + 2i}{4 + 2i} = \frac{8 + 4i + 16i - 8}{4^2 + 2^2} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

❖ استنتاج طبيعة المثلث ABC

لدينا: $AC = AB$ أي $\left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = \frac{AC}{AB} = 1$

لدينا: $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ أي $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

أي $u_n(v_n + 1) = 3v_n + 1$ أي $v_n u_n + u_n = 3v_n + 1$

أي $u_n = \frac{3v_n + 1}{v_n + 1}$ ومنه $u_n = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2} + 1}$

❖ حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

لدينا: $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < 1$ ، إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

⑤ أ/ حساب: $S_n = \frac{2024}{u_0 - 3} + \frac{2024}{u_1 - 3} + \dots + \frac{2024}{u_n - 3}$

لدينا $u_n = \frac{3v_n + 1}{v_n + 1}$ ومنه $u_n - 3 = \frac{3v_n + 1}{v_n + 1} - 3$

$$\frac{1}{u_n - 3} = -\frac{v_n + 1}{2} \text{ ومنه } u_n - 3 = \frac{-2}{v_n + 1}$$

ومنه بالتعويض $\frac{2024}{u_n - 3} = -1012v_n - 1012$

$$S_n = (-1012v_0 - 1012) + \dots + (-1012v_n - 1012)$$

$$S_n = -1012(v_0 + v_1 + \dots + v_n) - 1012(n + 1)$$

$$S_n = -1012v_0 \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right) - 1012(n + 1)$$

$$S_n = 2024 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} - 1 \right) - 1012(n + 1)$$

ب/ تبين أنه $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

لدينا: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

$$P_n = v_0 \times (v_0 \times q) \times (v_0 \times q^2) \dots \times (v_0 \times q^n)$$

$$P_n = (v_0 \times v_0 \times \dots \times v_0) \times (q \times q^2 \times \dots \times q^n)$$

$$P_n = v_0^{n+1} \times q^{1+2+\dots+n} = v_0^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$P_n = (1)^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

التمرين 02

❖ عدد الإمكانيات: $C_7^2 = 21$

① حساب $P(A)$: $P(A) = \frac{C_3^2 + C_3^2}{C_7^2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

② حساب $P(B)$: $P(B) = \frac{C_3^1 C_4^1 + C_3^2}{C_7^2} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$

③ أ/ قيم X هي: $\left\{-1; 0; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

❖ تعيين قانون احتماله

$$P(X = 0) = \frac{C_3^1 C_3^1}{C_7^2} = \frac{9}{21}, P(X = -1) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21}$$

$$P\left(X = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21}, P\left(X = \frac{1}{2}\right) = \frac{C_3^1 C_4^1}{C_7^2} = \frac{3}{21}$$

$$P\left(X = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{C_3^1 C_4^1}{C_7^2} = \frac{3}{21}$$

③ اكتب معادلة الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC .

بما أن ABC قائم في A فإن مركز الدائرة هو منتصف الوتر [BC] ، أي مركز الدائرة (γ) هو النقطة I ، أي

$$z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{5 - 2i + 3 + 4i}{2} = 4 + i$$

نصف القطر هو $r = \frac{BC}{2} = \frac{|z_C - z_B|}{2}$ ، ومنه

$$r = \frac{|-2+6i|}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2+6^2}}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$$

❖ معلومة: معادلة الدائرة من الشكل :

$$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r^2$$

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{10})^2$$

④ لتكن E نظيرة C بالنسبة لـ B ، بين أن: $z_E = 7 - 8i$

E نظيرة C بالنسبة لـ B معناه $z_B = \frac{z_C + z_E}{2}$ ومنه

$$z_E = 2(5 - 2i) - 3 - 4i$$

ومنه $z_E = 7 - 8i$ ، وهو المطلوب .

⑤ عين مركز وزاوية الدوران r الذي يحول B إلى C

ويحول C إلى D .

لدينا : $\begin{cases} z_C = az_B + b \\ z_D = az_C + b \end{cases}$ ومنه بالطرح نجد :

$$a = \frac{z_D - z_C}{z_C - z_B} \text{ أي } z_D - z_C = a(z_C - z_B)$$

$$a = \frac{-6 - 2i}{-2 + 6i} \times \frac{-2 - 6i}{-2 - 6i} = \frac{12 + 36i + 4i - 12}{(-2)^2 + 6^2} = i$$

بالتعويض نجد : $b = z_C - az_B$ ، ومنه

$$b = 1 - i \text{ ، أي } b = 3 + 4i - i(5 - 2i)$$

$$\text{لدينا : } z_W = \frac{b}{1-a} = \frac{1-i}{1-i} = 1$$

ومنه مركز الدوران r هو النقطة A ذات اللاحقة

$$z_A = 1 \text{ وزاوية الدوران } r \text{ هي } \frac{\pi}{2} \text{ أي } ar g(i)$$

التمرين 04

① بقراءة بيانية حدد الوضع النسبي بين (γ) و (τ) .

لما يكون $x \in]0; \alpha[$ فإن (τ) يقع فوق (γ) .

لما يكون $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن (τ) يقع تحت (γ) .

لما يكون $x = \alpha$ فإن (τ) يقطع (γ) في $(\alpha; \alpha^2 + 1)$.

② أ/ استنتاج إشارة $g(x^2)$ على $]0; +\infty[$.

لدينا : $g(x^2) = 1 + x^2 - x^2 \ln(x^2)$

ومنه إشارة $g(x^2)$ تعتمد على الوضع النسبي بين (γ) و (τ)

x	0	α	+ ∞
g(x ²)		+	-

ب/ التحقق أن $1,89 < \alpha < 1,9$.

لدينا : $g(1,9^2) = -0,02$ و $g(1,89^2) = 0,02$

ومنه $g(1,89^2) \times g(1,9^2) < 0$

ومنه : $1,89 < \alpha < 1,9$

ج/ تبين أن : $\ln \alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)$.

مما سبق وجدنا أن لما $x = \alpha$ فإن (τ) يقطع (γ)

ومنه $\ln(\alpha^2) = \frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}$ أي $1 + \alpha^2 = \alpha^2 \ln(\alpha^2)$

ومنه $2 \ln \alpha = 1 + \frac{1}{\alpha^2}$ أي $\ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2} + 1$

ومنه $\ln \alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)$

① حساب : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ وفسر النتائج

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln x}{1 + x^2} \right) = -\infty$$

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{1 + x^2} \right) = 0$$

$y = 0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

② أ/ تبين أن : $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x \ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2 \ln x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1+x^2-2x^2 \ln x}{x(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-x^2 \ln x^2}{x(1+x^2)^2} = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x^2)$. لأن $x(1+x^2)^2 > 0$

x	0	α	+ ∞
f'(x)		+	-

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; \alpha[$

ومتناقصة تماما على المجال $]\alpha; +\infty[$

x	0	α	+ ∞
f'(x)		+	-
f(x)	-∞	f(α)	0

ب/ تبیین أن : $\int_{\lambda}^1 \ln x dx = \lambda(1 - \ln \lambda) - 1$

$u(x) = \ln x$	$u'(x) = \frac{1}{x}$
$v(x) = x$	$v'(x) = 1$

$$\int_{\lambda}^1 \ln x dx = [x \ln x]_{\lambda}^1 - \int_{\lambda}^1 1 dx = [x \ln x]_{\lambda}^1 - [x]_{\lambda}^1$$

$$= -\lambda \ln \lambda - (1 - \lambda) = \lambda(1 - \ln \lambda) - 1$$

ج/ تبیین أن : $\frac{1-\lambda(1-\ln \lambda)}{2} < A(\lambda) < 1 - \lambda(1 - \ln \lambda)$

لدينا : من أجل كل x من $]0; 1[$ فإن (C_f) يقع

تحت محور الفواصل ومنه $A(\lambda) = \int_{\lambda}^1 -f(x) dx$

لدينا $\ln x < f(x) < \frac{1}{2} \ln x$

يكافئ $-\frac{1}{2} \ln x < -f(x) < -\ln x$

يكافئ $\int_{\lambda}^1 -\frac{1}{2} \ln x dx < \int_{\lambda}^1 -f(x) dx < \int_{\lambda}^1 -\ln x dx$

يكافئ $-\frac{1}{2} \int_{\lambda}^1 \ln x dx < \int_{\lambda}^1 -f(x) dx < -\int_{\lambda}^1 \ln x dx$

أي $-\frac{1}{2}(\lambda(1 - \ln \lambda) - 1) < A(\lambda) < -(\lambda(1 - \ln \lambda) - 1)$

يكافئ $\frac{1-\lambda(1-\ln \lambda)}{2} < A(\lambda) < 1 - \lambda(1 - \ln \lambda)$

وهو المطلوب .

③ إثبات أن : $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

لدينا : $f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{1+\alpha^2} = \frac{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\alpha^2})}{1+\alpha^2} = \frac{1+\frac{1}{\alpha^2}}{2(1+\alpha^2)} =$

$$= \frac{\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}}{2(1+\alpha^2)} = \frac{1+\alpha^2}{\alpha^2} \times \frac{1}{2(1+\alpha^2)} = \frac{1}{2\alpha^2}$$

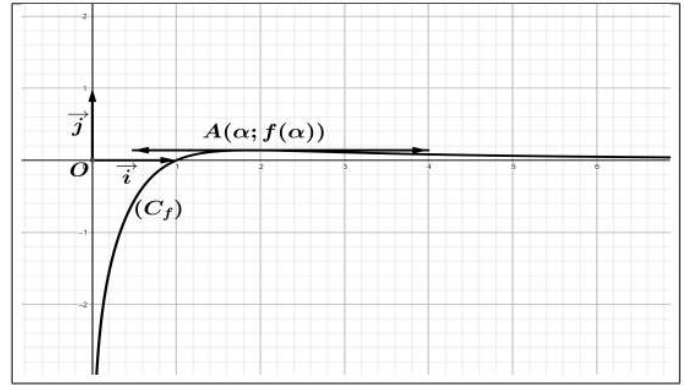
لدينا : $1,89 < \alpha < 1,9$ ، أي $(1,89)^2 < \alpha^2 < (1,9)^2$

يكافئ $2(1,89)^2 < 2\alpha^2 < 2(1,9)^2$

يكافئ $\frac{1}{2(1,9)^2} < \frac{1}{2\alpha^2} < \frac{1}{2(1,89)^2}$

يكافئ $0,138 < f(\alpha) < 0,139$

④ أنشئ (C_f) .



⑤ ناقش بياننا : $mx^2 + m + \ln x = 0$

لدينا $mx^2 + m + \ln x = 0$ يكافئ $m(x^2 + 1) = -\ln x$

يكافئ $\frac{\ln x}{1+x^2} = -m$ يكافئ $f(x) = -m$

ومنه حلول المعادلة بياننا هي فواصل نقاط تقاطع (C_f)

مع المستقيمات ذات المعادلة $y = -m$

لما $-m < 0$ أي $m > 0$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

لما $-m < f(\alpha) < -m < 0$ أي $f(\alpha) < -m < 0$ المعادلة

تقبل حلان متميزان .

لما $-m = f(\alpha)$ أي $m = -f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

لما $-m > f(\alpha)$ أي $m < -f(\alpha)$ المعادلة لا تقبل حلول

⑥ أ/ تبیین أنه : $\ln x < f(x) < \frac{1}{2} \ln x$.

لدينا : $0 < x < 1$ يكافئ $0 < x^2 < 1$

يكافئ $\frac{1}{2} < \frac{1}{1+x^2} < 1$ ، يكافئ $1 < 1+x^2 < 2$

ومن أجل كل x من المجال $]0; 1[$ فإن $\ln x < 0$

ومنه $\ln x < f(x) < \frac{1}{2} \ln x$ أي $\ln x < \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{2} \ln x$

الإختبار التجريبي رقم 6

التمرين 01

• $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 2n + 5) \end{cases}$: $n \in \mathbb{N}$ هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

① أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2n + 5$.

ب/ بين أن $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(2n + 5 - u_n)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

② نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 2(u_n - 2n - 1)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب/ أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) .

③ (w_n) المتتالية المعرفة بـ $w_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $w_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}w_n + \frac{1}{n+1}$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 2n + 1$ ، ثم بين أن (w_n) متتالية حسابية .

④ تحقق أن $u_n = \frac{1}{2}v_n + w_n$ ، ثم احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

يبدو أن البشرية ، لم تعد بحاجة إلى الشيطان

التمرين 02

يلعب طفل بـ 15 كرية ، منها 10 كريات حمراء و 5 كريات زرقاء ، يضع 7 كريات حمراء و 3 كريات

زرقاء في العلبة M ويضع الباقي في العلبة N .

① في أول لعبة يختار 3 كريات عشوائيا وفي آن واحد من العلبة M وينظر كم كرية حمراء ظهرت .

ليكن X المتغير العشوائي المتعلق بعدد الكرات الحمراء المسحوبة .

عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عين قانون احتماله ، ثم أحسب العدد $E(1446 - 2025X)$.

② وفي ثاني لعبة يختار الطفل إحدى اللعب ويسحب منها كرة واحدة .

أ/ مثل هذه الوضعية بشجرة الإحتمالات .

ب/ احسب $P(A)$ احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء .

ج / علما أن الطفل سحب كرة حمراء ، ما احتمال أن تكون من العلبة M ؟

التمرين 03

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B و C نقاط لواحقها :

$$z_C = 4i , z_B = 6 + 2i , z_A = 2$$

① أ/ بين أن : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\frac{\pi}{2}i}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

- ب/ أكتب كل من $(z_B - 4)$ و $(z_C - 4)$ على الشكل الأسّي .
- ج/ n عدد طبيعي ، بين أن $(z_B - 4)^n \times (z_C - 4)^n = 2^{4n} \times e^{n\pi i}$ ، ثم عين قيم العدد الطبيعي n الذي من أجله يكون $(z_B - 4)^n \times (z_C - 4)^n$ عدد حقيقيا موجبا .
- ② لتكن النقطتان D و E تحققان : $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ و $2\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$.
- أ/ ماذا تمثل النقطة D بالنسبة لـ B و C ؟ و ماذا تمثل النقطة E بالنسبة لـ A و B و C ؟
- ب/ بين أن لاحقة النقطة D هي $z_D = 3 + 3i$ ، ولاحقة النقطة E هي $z_E = -1 + i$.
- ج/ عين (τ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

التمرين 04

- I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.
- ① أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- ب/ أدرس إتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- ② أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]0; 1[$.
- ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
- II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x + \frac{1}{x})$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- ① أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .
- ② أ/ بين أنه من أجل كل $x \neq 0$ فإن $g(x)$ و $f'(x)$ لهما نفس الإشارة .
- ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .
- ③ لتكن النقطتين $I(-1; -\frac{1}{3})$ و $J(1; 1)$ ، بين أن المستقيم (IJ) هو مماس للمنحنى (C_f) في النقطة J .
- ④ أ/ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة I .
- ب/ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T) .
- ⑤ أنشئ كل من المنحنى (C_f) و المماس (T) ، (نأخذ $f(\alpha) = 0.8$) .
- ⑥ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $x^3 + x^2 - 3mx + 1 = 0$.
- ⑦ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $h(x) = f(-|x|)$ ، (C_h) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- أ/ بين أن الدالة h زوجية .
- ب/ أشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) إنطلاقا من (C_f) ، ثم أنشئه .

أي درس ترفض تعلمه ، سوف يتكرر حتى تتعلمه

الحل المفصل لإختبار رقم 06

التمرين 01

① أ/ البرهان بالتراجع أن : $u_n < 2n + 5$

نسمي الخاصية $P(n) : u_n < 2n + 5$.
لدينا $u_0 = 4$ ، ومنه $u_0 \leq 5$ ومنه $P(0)$ صحيحة
نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n كيفي
ونبرهن $P(n+1)$ أي نبرهن أن $u_{n+1} < 2n + 7$ ؟؟
لدينا : $u_n < 2n + 5$ أي $u_n + 2n < 4n + 5$
أي : $u_n + 2n + 5 < 4n + 10$
أي : $\frac{1}{2}(u_n + 2n + 5) < 2n + 5 < 2n + 7$
ومنه بالتعدي $u_{n+1} < 2n + 7$
ومنه $P(n+1)$ صحيحة ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع
نستنتج أن : $u_n < 2n + 5$.

ب/ تبين أن $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(2n + 5 - u_n)$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + 2n + 5) - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + 2n + 5 - 2u_n)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(2n + 5 - u_n)$$

❖ استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

بما أن $u_n < 2n + 5$ فإن $2n + 5 - u_n > 0$ إذن $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما .

② أ/ إثبات أن المتتالية (v_n) هندسية .

$$v_{n+1} = 2(u_{n+1} - 2(n+1) - 1)$$

$$v_{n+1} = 2(u_{n+1} - 2n - 3)$$

$$v_{n+1} = 2\left[\frac{1}{2}(u_n + 2n + 5) - 2n - 3\right]$$

$$v_{n+1} = 2\left[\frac{1}{2}(u_n + 2n + 5 - 4n - 6)\right]$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}[2(u_n - 2n - 1)] = \frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$
حدها الأول $v_0 = 2(u_0 - 2(0) - 1) = 6$

ب/ كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (v_n)

لدينا $v_n = v_0 \times q^n$ ، ومنه $v_n = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n$

③ البرهان بالتراجع أنه : $w_n = 2n + 1$

نسمي الخاصية $P(n) : w_n = 2n + 1$.
لدينا $w_0 = 1$ ، و $w_0 = 2(0) + 1$ ومنه $P(0)$ صحيحة
نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n كيفي
ونبرهن $P(n+1)$ أي نبرهن أن $w_{n+1} = 2n + 3$ ؟؟
لدينا : $w_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}w_n + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}(2n+1) + \frac{1}{n+1}$
 $w_{n+1} = \frac{2n^2 + 5n + 3}{n+1} = \frac{(n+1)(2n+3)}{n+1}$
ومنه $w_{n+1} = 2n + 3$ ، ومنه $P(n+1)$ صحيحة
ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع نستنتج أن : $w_n = 2n + 1$

❖ تبين أن (w_n) متتالية حسابية .

$$w_{n+1} - w_n = 2n + 3 - (2n + 1) = 2 = r$$

ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$.

④ التحقق أن $u_n = \frac{1}{2}v_n + w_n$

لدينا $v_n = 2u_n - 2w_n$ أي $v_n = 2(u_n - w_n)$
أي $2u_n = v_n + 2w_n$ ومنه $u_n = \frac{1}{2}v_n + w_n$.

❖ حساب : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

لدينا $u_n = \frac{1}{2}v_n + w_n$ ومنه بالتعويض نجد

$$S_n = \frac{1}{2}v_0 + w_0 + \dots + \frac{1}{2}v_n + w_n$$

$$S_n = \frac{1}{2}(v_0 + \dots + v_n) + w_0 + \dots + w_n$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(6\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right]\right) + \frac{n+1}{2}(w_0 + w_n) :$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(6\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right]\right) + \frac{n+1}{2}(3 + 2n + 1) :$$

$$S_n = 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + (n+1)^2 :$$

التمرين 02

① عين قيم المتغير العشوائي X ، وقانون إحصائه

لدينا $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

$$P(X = 1) = \frac{C_7^1 C_3^2}{C_{10}^3} = \frac{21}{120} , P(X = 0) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{35}{120} , P(X = 2) = \frac{C_7^2 C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{63}{120}$$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$

ومنه $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ، ومنه $(z_B - 4) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

لدينا : $(z_C - 4) = -4 + 4i$ ،

ومنه $|z_C - 4| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

نضع $\arg(z_C - 4) = \theta'$ ، ومنه $\begin{cases} \cos\theta' = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta' = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ، ومنه $\theta' = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ أي $\theta' = \pi - \frac{\pi}{4}$ ، ومنه $(z_C - 4) = 4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

ج/ تبين أن $(z_B - 4)^n \times (z_C - 4)^n = 2^{4n} \times e^{n\pi i}$

$(z_B - 4)^n \times (z_C - 4)^n = (2\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}} \times (4\sqrt{2})^n e^{i\frac{3n\pi}{4}}$
 $= (2^n \times \sqrt{2}^n \times 4^n \times \sqrt{2}^n) \times e^{i(\frac{n\pi}{4} + \frac{3n\pi}{4})}$
 $= (2^n \times \sqrt{2}^n \times 2^{2n} \times \sqrt{2}^n) \times e^{in\pi}$
 $= (2^{3n} \times \sqrt{2}^{2n}) \times e^{in\pi} = (2^{3n} \times 2^n) \times e^{in\pi}$
 $= (z_B - 4)^n \times (z_C - 4)^n = 2^{4n} \times e^{n\pi i}$

❖ عين قيم العدد الطبيعي n الذي من أجله يكون $(z_B - 4)^n \times (z_C - 4)^n$ عدد حقيقيا موجبا .

إذا كان $n\pi = 2k\pi$ أي $n = 2k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

② أ/ ماذا تمثل النقطة D بالنسبة لـ B و C ؟ وماذا

تمثل النقطة E بالنسبة لـ A و B و C ؟

❖ تمثل النقطة D منتصف القطعة $[BC]$.

❖ تمثل النقطة E مرجع الجملة المثقلة :

$\{(A, 2); (B, -1); (C, 1)\}$

ب/ تبين أن $z_D = 3 + 3i$ و $z_E = -1 + i$.

$z_D = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{6 + 6i}{2} = 3 + 3i$

$z_E = \frac{2z_A - z_B + z_C}{2 - 1 + 1} = -1 + i$

ج/ عين (τ) مجموعة النقط M من المستوي التي

تحقق : $\|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MB} + \vec{MC}\|$.

لدينا E مرجع الجملة $\{(A, 2); (B, -1); (C, 1)\}$ ،

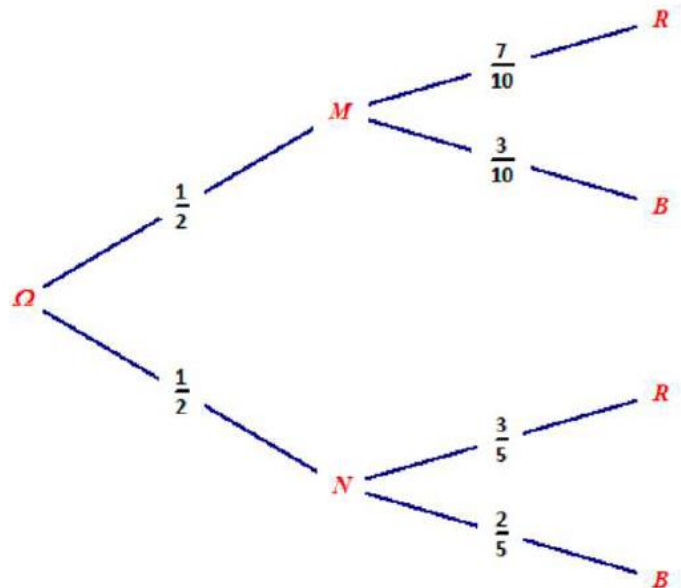
ومنه $2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = 2\vec{ME}$ ،

و D منتصف القطعة $[BC]$ أي $\vec{MB} + \vec{MC} = 2\vec{MD}$ ،

ومنه $\|2\vec{ME}\| = \|2\vec{MD}\|$ أي $ME = MD$ ،

ومنه نستنتج أن (τ) هي محور القطعة $[ED]$.

② أ/ مثل هذه الوضعية بشجرة الاحتمالات .



ب/ حساب $P(A)$.

$P(A) = P(M \cap R) + P(N \cap R)$

$P(A) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{7}{10}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}\right) = \frac{13}{20}$

ج / علما أن الطفل سحب كرة حمراء ، ما

إحتمال أن تكون من العلبة M ؟

$P_R(M) = \frac{P(M \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{7}{10}}{\frac{13}{20}} = \frac{7}{13}$

التمرين 03

① أ/ تبين أن : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2 + 4i}{4 + 2i} = \frac{i(4 + 2i)}{4 + 2i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

❖ استنتاج طبيعة المثلث ABC .

لدينا : $\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = \frac{AC}{AB} = 1$ ، ومنه $AC = AB$ ،

ولدينا : $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ ، ومنه $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$ ،

ومنه نستنتج أن ABC قائم في A ومتساوي الساقين .

ب/ كتابة $(z_B - 4)$ و $(z_C - 4)$ على الشكل الأسّي .

لدينا : $(z_B - 4) = 2 + 2i$ ،

ومنه $|z_B - 4| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ،

نضع $\arg(z_B - 4) = \theta$ ، ومنه $\begin{cases} \cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} \right) = -\infty \end{cases} \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty \end{cases} \text{ لأن}$$

② / بين أنه من أجل كل $x \neq 0$ فإن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(2x + 1 - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2} \right)$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{3x^2}$$

بما أن $3x^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

③ لتكن النقطتين $I(-1; -\frac{1}{3})$ و $J(1; 1)$ ، بين أن

المستقيم (IJ) هو مماس للمنحنى (C_f) في النقطة J .

لدينا من جهة : نعلم أن معادلة المستقيم (IJ)

$$y = ax + b \text{ تكتب من الشكل}$$

تعيين a (معامل توجيه المستقيم) :

$$a = \frac{y_J - y_I}{x_J - x_I} = \frac{1 - (-\frac{1}{3})}{1 - (-1)} = \frac{2}{3}$$

وبالتالي معادلة المستقيم (IJ) هي $y = \frac{2}{3}x + b$

تعيين b : بما أن $J \in (IJ)$ فإن $1 = \frac{2}{3} \times 1 + b$

ومن $b = \frac{1}{3}$ ، ومنه نستنتج أن معادلة المستقيم (IJ) هي :

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

ومن جهة أخرى : نعين معادلة مماس للمنحنى (C_f) في

النقطة J أي : عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = \frac{2}{3}(x - 1) + 1 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

① / حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة g

$$g'(x) = 6x^2 + 2x$$

$$g'(x) = 0 \text{ يكافئ } 6x^2 + 2x = 0$$

$$2x(3x + 1) = 0 \text{ ، ومنه إما } x = 0 \text{ أو } x = -\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	+

ومنه نستنتج أن g متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; -\frac{1}{3}]$ و $[\frac{1}{3}; +\infty[$

و $[0; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\frac{1}{3}; 0]$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	+
$g(x)$	$-\infty$	-0.96	-1	$+\infty$

② / بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

الدالة g معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على $[0; 1]$ ولدينا

$$g(0) = -1 \text{ و } g(1) = 2 \text{ ومنه } g(0) \times g(1) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x) = 0$ تقبل

حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]0; 1[$.

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

① حساب نهايات الدالة f عند أطراف D_f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0 \end{cases} \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0 \end{cases} \text{ لأن}$$

④ أ/ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة I .

$$(T): y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$$

$$(T): y = -\frac{2}{3}x - 1$$

ب/ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (T)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$\begin{aligned} f(x) - y &= \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) \\ &= \frac{x^3 + x^2 + 1}{3x} + \frac{2x + 3}{3} = \frac{x^3 + x^2 + 1 + 2x^2 + 3x}{3x} \\ &= \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{3x} \end{aligned}$$

نلاحظ أن -1 جذر للبسط ، ومنه

$$f(x) - y = \frac{x^3 + 3x^2 + x + 1}{3x} = \frac{(x+1)(x+1)^2}{3x}$$

بما أن $(x+1)^2 > 0$ فإن إشارة الفرق من إشارة $3x$ و $x+1$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$
$3x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$	$+$

ومنه من أجل كل $x \in]-\infty; -1[$ فإن المنحنى

(C_f) يقع فوق المماس (T)

من أجل كل $x \in]-1; 0[$ فإن المنحنى (C_f) يقع

تحت المماس (T)

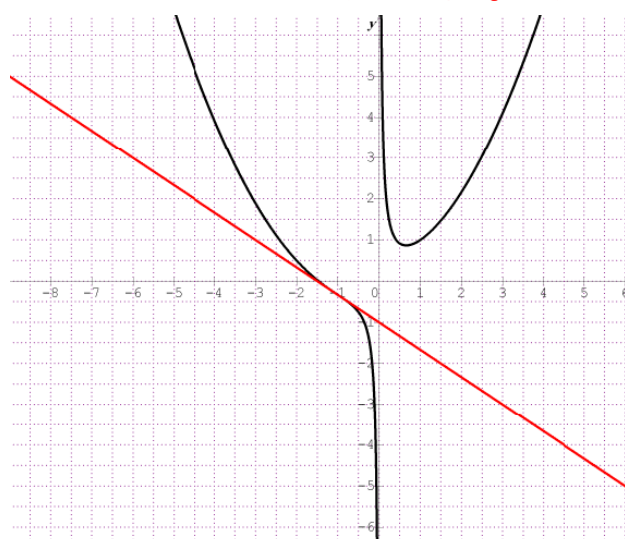
من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن المنحنى (C_f) يقع

فوق المماس (T)

المنحنى (C_f) يخترق المماس (T) في النقطة

$$I\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$$

⑤ أنشئ كل من المنحنى (C_f) و المماس (T)



⑥ ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول

$$x^3 + x^2 - 3mx + 1 = 0 \text{ المعادلة}$$

$$x^3 + x^2 - 3mx + 1 = 0$$

$$x^3 + x^2 + 1 = 3mx$$

$$x^2 + x + \frac{1}{x} = 3m$$

$$\frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right) = m$$

$$f(x) = m$$

حلول المعادلة بياناً هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f)

مع المستقيم ذا المعادلة $y = m$

لما $m \in]-\infty; f(\alpha)[$ ، يوجد حل وحيد

لما $m = f(\alpha)$ ، يوجد حلان أحدهما مضاعف

لما $m \in]f(\alpha); +\infty[$ ، يوجد ثلاث حلول

⑦ أ/ تبين أن الدالة h زوجية .

من أجل كل $x \in D_h$ ، لدينا $-x \in D_h$

$x \in D_h$ ، أي $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ معناه $x \neq 0$

ومنه $-x \neq 0$ ، ومنه $-x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ، ومنه $-x \in D_h$

$$h(-x) = f(-|-x|) = f(-|x|) = h(x)$$

ومنه نستنتج أن الدالة h زوجية

ب/ شرح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقاً من (C_f)

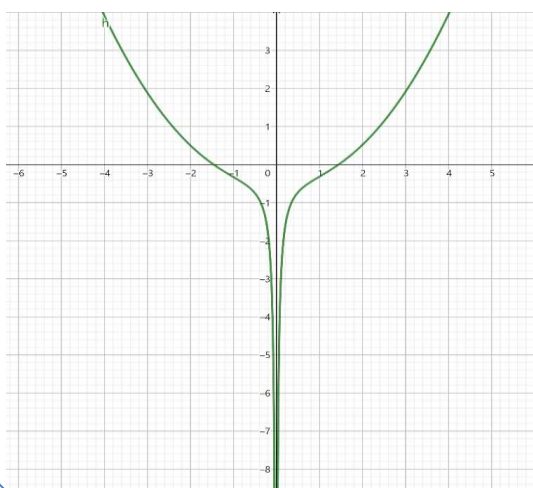
أولاً يجب كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$h(x) = \begin{cases} f(-x) & ; x > 0 \\ f(x) & ; x < 0 \end{cases}$$

نلاحظ أنه لما يكون $x < 0$ فإن $h(x) = f(x)$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f)

وبما أن h زوجية نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب



الإختبار التجريبي رقم 7

التمرين 01

• (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = \frac{7}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{8}$

① أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{3}{4}$

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

② نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(u_n - \frac{\alpha}{4}\right)$

أ/ عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

ب/ من أجل $\alpha = 3$ ، أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) .

③ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = t_n + \frac{3}{4}$ حيث (t_n) متتالية هندسية ، ثم إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

④ عبر عن P_n بدلالة n حيث : $P_n = u_0v_0 + u_1v_1 + \dots + u_nv_n$

للتغلب قصص بطولية لكن كلها مع الدجاج .

التمرين 02

لتكن المجموعة $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

① ماهو عدد الأعداد المكونة من أربع أرقام مختلفة التي يمكن تشكيلها بإستعمال أرقام المجموعة أعلاه؟

② ماهو عدد الأعداد المشار إليها في السؤال الأول والتي هي زوجية ؟

③ ماهو عدد الأعداد المشار إليها في السؤال الأول والتي هي فردية ؟

④ ماهو عدد الأعداد المشار إليها في السؤال الأول والتي هي من مضاعفات 5 ؟

التمرين 03

I- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 2z + 4 = 0$ ، ثم إستنتج حلول المعادلة :

$$\cdot (\bar{z} + 2 + 2\sqrt{3}i)^2 - 2\bar{z} - 4\sqrt{3}i = 0 \text{ حيث } \bar{z} \text{ مرافق العدد } z$$

II- z_0 و z_1 عددان مركبان حيث : $z_0 = 1 + i$ و $z_0 \times z_1 = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{19\pi}{12})}$

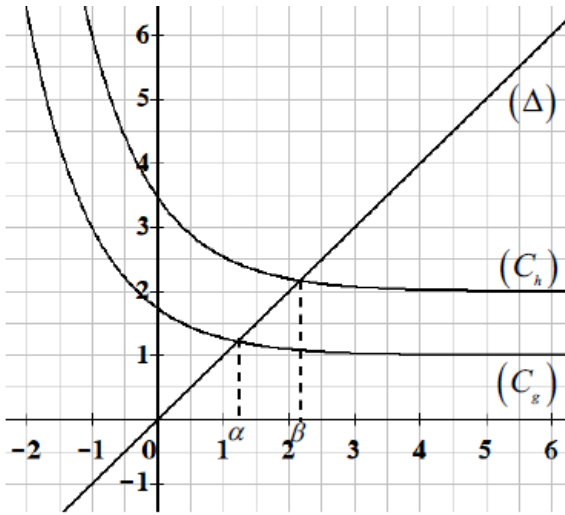
① عين طويلة وعمدة لكل من z_0 و z_1 ، ثم أكتب $z_0 \times z_1$ على الشكل الجبري .

② استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)$

③ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(z_0 \times z_1)^n$ حقيقيا .

④ عين (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\arg\left(\frac{z-z_0}{z-z_1}\right) = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

مع $z \neq z_0$ و $z \neq z_1$



I- (C_g) و (C_h) التمثيلان البيانيان للدالتين g و h المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + 2e^{-x-1}$ و $h(x) = 2g(x)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل المقابل .

① بقراءة بيانية حدد وضعية كل من (C_g) و (C_h) بالنسبة إلى (Δ)
 ② إستنتج إشارة كل من $[g(x) - x]$ و $[x - h(x)]$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

③ تحقق أن $1,2 < \alpha < 1,3$ و $2,1 < \beta < 2,2$.

II- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^{-x} \left(x - \frac{1}{e^{x+1}} + e^{x-1} \right)$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

① أ/ أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب/ أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

② أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $\frac{f(x)}{x} = e^{-x} + 2e^{-1} \left(\frac{e^{-2x}-1}{-2x} \right)$ ،

ب/ أحسب : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$. ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة هندسيا .

ج/ اكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند المبدأ .

③ أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = [g(x) - x]e^{-x}$ ،

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

④ أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x) = [x - h(x)]e^{-x}$ ،

ب/ بين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف w يطلب تعيين إحداثياتها .

⑤ أنشئ (C_f) و (T) نأخذ $f(\alpha) = 0,9$ و $f(\beta) = 0,6$.

⑥ عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = (1 + 2m)x$ حلين أحدهما معدوم و الآخر موجب تماما .

الحسد مميت ، الحسد يضيع فرحة ويضيع صحة ، ويضيع راحة البال
 اللهم اكفنا شر كل حاسد

الحل المفصل لإختبار رقم 07

التمرين 01

① أ/ البرهان بالتراجع أن : $u_n > \frac{3}{4}$.

نسمي الخاصية $P(n) : u_n > \frac{3}{4}$.

لدينا $u_0 = \frac{7}{4}$ ، ومنه $u_0 > \frac{3}{4}$ ومنه $P(0)$ صحيحة .

نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n كيفي

ونبرهن $P(n+1)$ أي نبرهن أن $u_{n+1} > \frac{3}{4}$ ؟؟

لدينا : $u_n > \frac{3}{4}$ أي $\frac{1}{2}u_n > \frac{3}{8}$ ، أي $\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{8} > \frac{3}{4}$ ،

ومنه $u_{n+1} > \frac{3}{4}$.

ومنه $P(n+1)$ صحيحة ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع

نستنتج أن : $u_n > \frac{3}{4}$.

ب/ دراسة اتجاه تغير المتتالية .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{8} - u_n = \frac{3 - 4u_n}{8}$$

لدينا : $u_n > \frac{3}{4}$ ، أي $-4u_n < -3$ ،

أي $-4u_n + 3 < 0$ ، ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$ ،

ومنه نستنتج أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

❖ استنتاج أنها متقاربة .

بما أن (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد $\frac{3}{4}$

فهي متقاربة .

② أ/ تعيين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون

(v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$.

$$v_{n+1} = \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(u_{n+1} - \frac{\alpha}{4}\right)$$

$$= \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{8} - \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{2}{3} \times \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{8} - \frac{2\alpha}{8}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \times \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{3-2\alpha}{4}\right) = \frac{1}{3} \times \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(u_n + \frac{3-2\alpha}{4}\right)$$

$$\frac{3-2\alpha}{4} = -\frac{\alpha}{4} \text{ معناه } \frac{1}{3} \text{ أساسها } (v_n)$$

أي $3 - 2\alpha = -\alpha$ ، ومنه $\alpha = 3$ ،

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ $q = \frac{1}{3}$

$$v_0 = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(u_0 - \frac{3}{4}\right) = 3 \left(\frac{7}{4} - \frac{3}{4}\right) = 3$$

ب/ من أجل $\alpha = 3$ ، أكتب عبارة (v_n) .

لدينا $v_n = v_0 \times q^n$ ، ومنه $v_n = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$$v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ أي}$$

③ تبين أنه : $u_n = t_n + \frac{3}{4}$.

$$v_n = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(u_n - \frac{3}{4}\right)$$

بالضرب في $\frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ ، نجد $\frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^n v_n = u_n - \frac{3}{4}$ ،

ومنه : $u_n = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^n v_n + \frac{3}{4}$.

ومنه : $u_n = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^n \times 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{4}$.

ومنه : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{4}$ ، ومنه $t_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

❖ إستنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

④ التعبير عن P_n بدلالة n حيث :

$$P_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

$$\text{لدينا : } u_n v_n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{4}\right) \left(3 \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 3 \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{9}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

بوضع $w_n = 3 \left(\frac{1}{6}\right)^n$ و $k_n = \frac{9}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ يكون لدينا :

$$u_n v_n = w_n + k_n$$

ومنه بالتعويض نجد :

$$P_n = w_0 + k_0 + w_1 + k_1 + \dots + w_n + k_n$$

$$P_n = (w_0 + w_1 + \dots + w_n) + (k_0 + k_1 + \dots + k_n)$$

$$P_n = w_0 \left[\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{6} - 1} \right] + k_0 \left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1} \right]$$

$$P_n = 3 \left[\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{5}{6}} \right] + \frac{9}{4} \left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{2}{3}} \right]$$

$$P_n = \frac{-18}{5} \left[\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} - 1 \right] - \frac{27}{8} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1 \right]$$

$$P_n = \frac{18}{5} \left[1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} \right] + \frac{27}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right]$$

التمرين 02

① ماهو عدد الأعداد المكونة من أربع أرقام مختلفة

التي يمكن تشكيلها بإستعمال أرقام المجموعة أعلاه؟

7	6	5	4
---	---	---	---

أي : $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

يمكن أيضا حسابها كمايلي $A_7^4 = 840$

② ماهو عدد الأعداد المشار إليها في السؤال لأول والتي هي زوجية ؟

لدينا المجموعة S تحتوي على 3 أرقام زوجية ونعلم أن الرقم الزوجي رقم أحاده زوجي ومنه :

4	5	6	3
---	---	---	---

أي : $3 \times 6 \times 5 \times 4 = 360$

يمكن أيضا حسابها كمايلي $A_3^1 \times A_6^3 = 360$

③ ماهو عدد الأعداد المشار إليها في السؤال لأول والتي هي فردية ؟

لدينا المجموعة S تحتوي على 4 أرقام فردية ونعلم أن الرقم الفردي رقم أحاده فردي ومنه :

4	5	6	4
---	---	---	---

أي : $4 \times 6 \times 5 \times 4 = 480$

يمكن أيضا حسابها كمايلي $A_4^1 \times A_6^3 = 480$

④ ماهو عدد الأعداد المشار إليها في السؤال لأول والتي هي من مضاعفات 5 ؟

نعلم أن مضاعفات العدد 5 هي الأعداد التي أحادها 5

4	5	6	1
---	---	---	---

ومنه : $1 \times 6 \times 5 \times 4 = 120$

يمكن أيضا حسابها كمايلي $A_1^1 \times A_6^3 = 120$

التمرين 03

I- حل في C المعادلة $z^2 - 2z + 4 = 0$

لدينا : $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(4) = -12 = 12i^2$

للمعادلة حلان مركبان هما :

$$z_2 = \frac{2-2\sqrt{3}i}{2} = 1 - \sqrt{3}i, \quad z_1 = \frac{2+2\sqrt{3}i}{2} = 1 + \sqrt{3}i$$

❖ إستنتج حلول : $(\bar{z} + 2 + 2\sqrt{3}i)^2 - 2\bar{z} - 4\sqrt{3}i = 0$

$$(\bar{z} + 2 + 2\sqrt{3}i)^2 - 2\bar{z} - 4\sqrt{3}i - 4 + 4 = 0$$

$$(\bar{z} + 2 + 2\sqrt{3}i)^2 - 2(\bar{z} + 2 + 2\sqrt{3}i) + 4 = 0$$

بالمطابقة مع المعادلة الأولى نجد :

$$\begin{cases} z = -1 + \sqrt{3}i \\ z = -1 + 3i\sqrt{3} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \bar{z} + 2 + 2\sqrt{3}i = 1 + \sqrt{3}i \\ \bar{z} + 2 + 2\sqrt{3}i = 1 - \sqrt{3}i \end{cases}$$

II- $z_0 \times z_1 = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{19\pi}{12})}$ و $z_0 = 1 + i$

① تعيين طويلة وعمدة لكل من z_1 و z_0

لدينا : $|z_0| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ نضع } \arg(z_0) = \theta \text{ ومنه } \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

ومنه $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$

لدينا : $z_0 \times z_1 = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{19\pi}{12})}$ ومنه $z_1 = \frac{2\sqrt{2}e^{i(\frac{19\pi}{12})}}{\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}}$

أي : $z_1 = 2e^{i(\frac{19\pi}{12} - \frac{\pi}{4})}$ أي $z_1 = 2e^{i(\frac{4\pi}{3})}$

ومنه $|z_1| = 2$ و $\arg(z_1) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

❖ أكتب $z_0 \times z_1$ على الشكل الجبري .

لدينا : $z_1 = 2e^{i(\frac{4\pi}{3})} = 2 \left[\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right]$

$$z_1 = 2 \left[\frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = -1 - \sqrt{3}i$$

ومنه $z_0 \times z_1 = (1 + i) \times (-1 - \sqrt{3}i)$

أي $z_0 \times z_1 = (\sqrt{3} - 1) + i(-\sqrt{3} - 1)$

② استنتاج $\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)$

لدينا : $z_0 \times z_1 = 2\sqrt{2} \left[\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right]$

ولدينا من جهة أخرى : $z_0 \times z_1 = (\sqrt{3} - 1) + i(-\sqrt{3} - 1)$

$$\begin{cases} \cos \frac{19\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{19\pi}{12} = \frac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases} \text{ ومنه } \sin \frac{19\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

③ تعيين قيم n حتى يكون $(z_0 \times z_1)^n$ حقيقيا

$\frac{n19\pi}{12} = k\pi$ ، ومنه $\frac{n19}{12} = k$ ، أي $n19 = 12k$

ومنه $n = \frac{12k}{19}$ ، حيث k من مضاعفات 19 .

④ عين $(\gamma) : \arg\left(\frac{z-z_0}{z-z_1}\right) = 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$

بوضع $z_1 = z_B$ و $z_0 = z_A$

لدينا $\arg\left(\frac{z-z_0}{z-z_1}\right) = 2k\pi$ معناه $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 2k\pi$

ومنه (γ) هي المستقيم (AB) بإستثناء [AB] .

① وضعية (C_g) بالنسبة إلى (Δ) .

لما يكون $x \in]-\infty; \alpha[$ فإن (C_g) يقع فوق (Δ) .

لما يكون $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن (C_g) يقع تحت (Δ) .

لما يكون $x = \alpha$ فإن (C_g) يقطع (Δ) في $(\alpha; \alpha)$.

❖ وضعية (C_h) بالنسبة إلى (Δ) .

لما يكون $x \in]-\infty; \beta[$ فإن (C_h) يقع تحت (Δ) .

لما يكون $x \in]\beta; +\infty[$ فإن (C_h) يقع فوق (Δ) .

لما يكون $x = \beta$ فإن (C_h) يقطع (Δ) في $(\beta; \beta)$.

② إستنتاج إشارة $[g(x) - x]$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x) - x$	+	$\emptyset$	-

❖ إستنتاج إشارة $[x - h(x)]$.

x	$-\infty$	β	$+\infty$
$x - h(x)$	-	$\emptyset$	+

③ التحقق أن $1,2 < \alpha < 1,3$ و $2,1 < \beta < 2,2$

لدينا : أي $\begin{cases} g(1,2) - 1,2 = 0,02 \\ g(1,3) - 1,3 = -0,09 \end{cases}$

$$[g(1,2) - 1,2] \times [g(1,3) - 1,3] < 0$$

ومنه : $1,2 < \alpha < 1,3$

لدينا : أي $\begin{cases} 2,1 - h(2,1) = -0,08 \\ 2,2 - h(2,2) = 0,03 \end{cases}$

$$[2,1 - h(2,1)] \times [2,2 - h(2,2)] < 0$$

ومنه : $2,1 < \beta < 2,2$

$$f(x) = e^{-x} \left(x - \frac{1}{e^{x+1}} + e^{x-1} \right) \quad \text{II}$$

① أ/ حساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} - \frac{e^{-x}}{e^{x+1}} + e^{-1} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^{2x+1}} + e^{-1} \right] = e^{-1}$$

ومنه $y = e^{-1}$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ حساب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} (x - e^{-x-1} + e^{x-1}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^{-x-1}) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = 0$$

$$\textcircled{2} \text{ أ/ تحقق أن } \frac{f(x)}{x} = e^{-x} + 2e^{-1} \left(\frac{e^{-2x}-1}{-2x} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{e^{-x} \left(x - \frac{1}{e^{x+1}} + e^{x-1} \right)}{x} = \\ &= \frac{xe^{-x} - \frac{1}{e^{2x+1}} + e^{-1}}{x} = e^{-x} + \frac{-\frac{1}{e^{2x+1}} + e^{-1}}{x} = \\ &= e^{-x} + \frac{-\frac{e^{-1}}{e^{2x}} + e^{-1}}{x} = e^{-x} + \frac{e^{-1} \left(-\frac{1}{e^{2x}} + 1 \right)}{x} = \\ &= e^{-x} + \frac{e^{-1} \left(\frac{-1+e^{2x}}{e^{2x}} \right)}{x} = e^{-x} + \frac{2e^{-1} \left(\frac{-1+e^{2x}}{e^{2x}} \right)}{2x} = \\ &= e^{-x} + 2e^{-1} \left[\frac{\left(\frac{-1+e^{2x}}{e^{2x}} \right)}{2x} \right] = e^{-x} + 2e^{-1} \left(\frac{-e^{-2x}+1}{2x} \right) \\ &= e^{-x} + 2e^{-1} \left(\frac{e^{-2x}-1}{-2x} \right) = \frac{f(x)}{x} \end{aligned}$$

ب/ حساب : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[e^{-x} + 2e^{-1} \left(\frac{e^{-2x}-1}{-2x} \right) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-2x}-1}{-x} \right) = 1 \text{ ونعلم أن } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x-1}{x} \right) = 1$$

$$\text{ومنه } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + 2e^{-1}$$

❖ ماذا تستنتج ؟

نستنتج أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0 .

❖ فسر النتيجة هندسيا : (C_f) يقبل مماسا عند مبدأ

المعلم معامل توجيهه $1 + 2e^{-1}$.

ج/ اكتب معادلة لـ (T) المماس عند المبدأ .

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$(T): y = (1 + 2e^{-1})x$$

③ أ/ تبين أنه : $f'(x) = [g(x) - x]e^{-x}$

$$f'(x) = -e^{-x} \left(x - \frac{1}{e^{x+1}} + e^{x-1} \right) + \left(1 + \frac{e^{x+1}}{(e^{x+1})^2} + e^{x-1} \right) e^{-x}$$

$$f'(x) = -e^{-x} \left(x - \frac{1}{e^{x+1}} + e^{x-1} \right) + e^{-x} \left(1 + \frac{1}{e^{x+1}} + e^{x-1} \right)$$

$$f'(x) = e^{-x} \left[-x + \frac{1}{e^{x+1}} - e^{x-1} + 1 + \frac{1}{e^{x+1}} + e^{x-1} \right]$$

$$f'(x) = e^{-x} \left[-x + \frac{2}{e^{x+1}} + 1 \right] = e^{-x} [-x + 1 + 2e^{-x-1}]$$

$$f'(x) = [g(x) - x]e^{-x}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f

من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن $e^{-x} > 0$ ، ومنه

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x) - x$.

⑥ عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = (1 + 2m)x$ حلين أحدهما معدوم والآخر موجب تماما .

$$(1 + 2m) \in]0; 1 + 2e^{-1}[$$

$$(2m) \in]-1; 2e^{-1}[$$

$$m \in \left] -\frac{1}{2}; e^{-1} \right[$$

أي

أي

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$

ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	e^{-1}

④ / تبين أنه : $f''(x) = [x - h(x)]e^{-x}$

$$f''(x) = (-2e^{-x-1} - 1)e^{-x} - e^{-x}(2e^{-x-1} + 1 - x)$$

$$f''(x) = e^{-x}[-2e^{-x-1} - 1 - 2e^{-x-1} - 1 + x]$$

$$f''(x) = e^{-x}[-4e^{-x-1} - 2 + x]$$

$$f''(x) = e^{-x}[x - 2(1 + 2e^{-x-1})] = [x - h(x)]e^{-x}$$

ب/ تبين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف w

من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن $e^{-x} > 0$ ، ومنه

إشارة $f''(x)$ من إشارة $[x - h(x)]$

x	$-\infty$	β	$+\infty$
$x - h(x)$	-	0	+

بما أن $f''(x)$ إنعدمت عند $x = \beta$ وغيرت من إشارتها

فإن النقطة $w(\beta; f(\beta))$ هي نقطة إنعطاف لـ (C_f) .

⑤ أنشئ (C_f) و (T) .

