



Maths

4AM



الرابعة متوسط

رياضيات

هديتي الأستاذ:

بوراس يعقوب

لتحضير شهادة التعليم المتوسط



خاصية فيثاغورس

(في المثلث القائم)

❖ خاصية فيثاغورس :

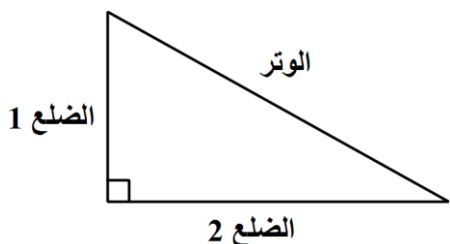
في المثلث القائم: مربع الوتر = مجموع مربع الضلعين القائمين

$$\text{أي: } (\text{الوتر})^2 = (\text{الضلع } 1)^2 + (\text{الضلع } 2)^2$$

ملاحظة:

الوتر هو أطول ضلع و يقابل الزاوية القائمة

استنتاجات:

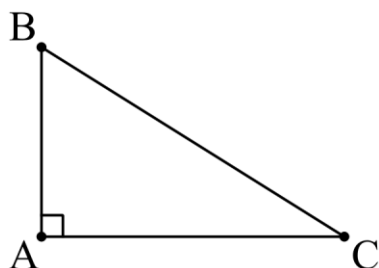


$$(\text{الوتر})^2 = (\text{الضلع } 1)^2 + (\text{الضلع } 2)^2$$

$$(\text{الضلع } 2)^2 = (\text{الوتر})^2 - (\text{الضلع } 1)^2$$

مثال: مثلث قائم في A

نقول: بما أن ABC مثلث قائم في A فإنه حسب خاصية فيثاغورس لدينا:



$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$

إذن نستنتج أن:

$$(AB)^2 = (BC)^2 - (AC)^2$$

$$\text{و } (AC)^2 = (BC)^2 - (AB)^2$$

❖ إثبات أن المثلث قائم: (الخاصية العكسية لفيتاغورس)

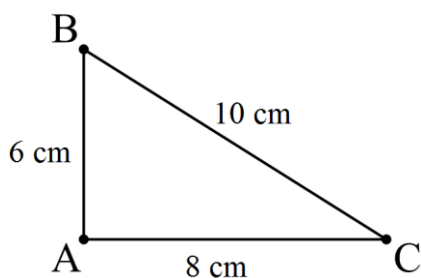
① نحسب مربع الوتر: $(BC)^2 = (10)^2 = 100$

② نحسب مجموع مربع الضلعين الآخرين:

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (6)^2 + (8)^2$$

$$(AB)^2 + (AC)^2 = 36 + 64$$

$$(AB)^2 + (AC)^2 = 100$$

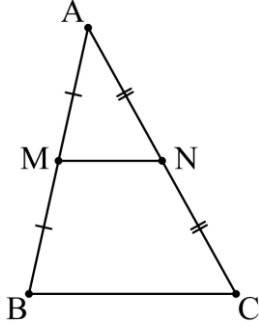


③ ثم نقول: بما أن $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$ فإن المثلث ABC قائم في A حسب

الخاصية العكسية لفيتاغورس

خاصية منتصف الضلعين

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفين ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصفه



مثال: ABC مثلث كيفي

• M منتصف $[AB]$

• N منتصف $[AC]$

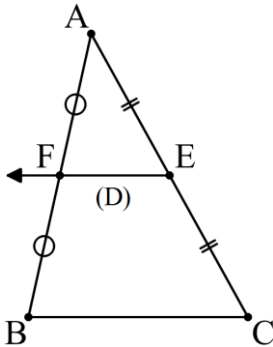
و منه حسب خاصية منتصف الضلعين فإن:

$$(MN) \parallel (BC) \quad ①$$

$$BC = 2MN \quad \text{أي} \quad MN = \frac{BC}{2} \quad ②$$

إثبات المنتصف: (المبرهنة العكسية لمنتصف الضلعين)

المستقيم المرسوم من منتصف ضلع في مثلث موازيًا أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث



مثال: ABC مثلث كيفي

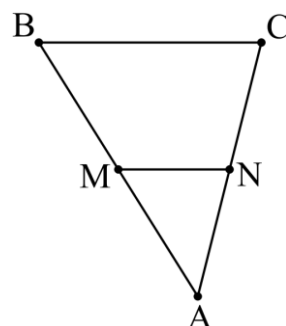
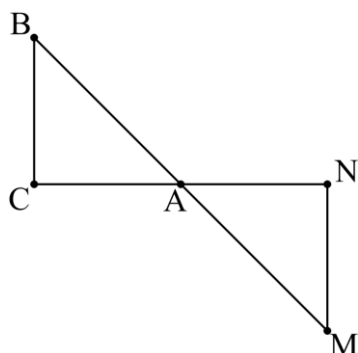
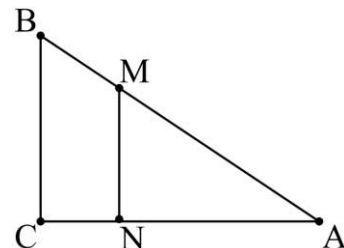
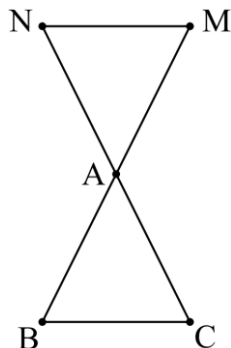
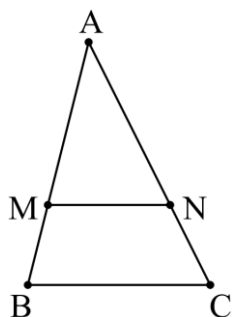
• E منتصف $[AC]$

• (D) يشمل E و يوازي (BC)

و منه حسب المبرهنة العكسية لمنتصف الضلعين فإن (D) ينصف $[AB]$

خاصية طالس

في كل من الأشكال التالية لدينا $(MN) \parallel (BC)$ مما يعني إمكانية تطبيق خاصية طالس:



مبرهنة طالس: (المباشرة)

بما أن $(MN) \parallel (BC)$ فحسب خاصية طالس لدينا: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

إثبات التوازي: (المبرهنة العكسية لطالس)

حسب المعطيات نختار كسرين: $\frac{AM}{AB}$ و $\frac{MN}{BC}$

① نقول لنقارن الكسرين $\frac{AM}{AB}$ و $\frac{MN}{BC}$

② نحسب الكسر $\frac{AM}{AB}$ كم يساوي

③ نحسب الكسر $\frac{MN}{BC}$ كم يساوي

④ نقول بما أن $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ والنقط A, M, B و A, N, C بنفس الترتيب على استقامة

واحدة فإن: $(MN) \parallel (BC)$ حسب الخاصية العكسية لطالس

الحساب الحرفي

النشر:



• المتطابقات الشهيرة للنشر

- $(a + b)^2 = (a)^2 + (b)^2 + 2(a)(b)$
- $(a - b)^2 = (a)^2 + (b)^2 - 2(a)(b)$
- $(a - b)(a + b) = (a)^2 - (b)^2$

• النشر عند وجود عامل مشترك

- $k(a + b) = (k \times a) + (k \times b)$
- $k(a - b) = (k \times a) - (k \times b)$
- $(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$
- $(a - b)(c + d) = a(c + d) - b(c + d)$
- $(a + b)(c - d) = a(c - d) + b(c - d)$
- $(a - b)(c - d) = a(c - d) - b(c - d)$

التحليل:



• المتطابقات الشهيرة للتحليل

- $(a)^2 + (b)^2 + 2(a)(b) = (a + b)^2$
- $(a)^2 + (b)^2 - 2(a)(b) = (a - b)^2$
- $(a)^2 - (b)^2 = (a - b)(a + b)$

• التحليل باستعمال العامل المشترك

- $ka + kb = k(a + b)$
- $(a + b)(c + d) + (a + b)(e + f) = (a + b)[(c + d) + (e + f)]$
- $(a + b)(c + d) - (a + b)(e + f) = (a + b)[(c + d) - (e + f)]$
- * $(a + b)(c + d) + (a + b) = (a + b)[(c + d) + 1]$
- * $(a + b)(c + d) - (a + b) = (a + b)[(c + d) - 1]$
- * $(a + b) + (a + b)(e + f) = (a + b)[1 + (e + f)]$
- * $(a + b) - (a + b)(e + f) = (a + b)[1 - (e + f)]$

النسب المثلثية في المثلث القائم

$$\sin x = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

;

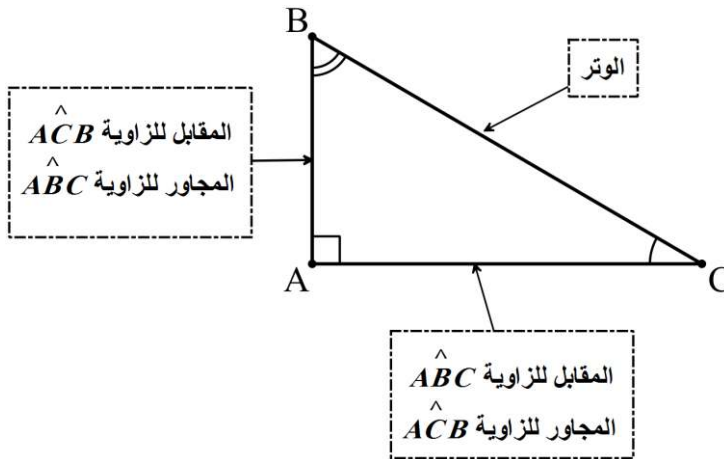
$$\cos x = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

;

$$\tan x = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

❖ حساب $\sin, \cos, \tan$ زاوية حادة:

مثال:



$$AB = 3 \text{ cm}$$

$$AC = 4 \text{ cm}$$

$$BC = 5 \text{ cm}$$

$$\sin \hat{ACB} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\cos \hat{ACB} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\tan \hat{ACB} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\sin \hat{ABC} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\cos \hat{ABC} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\tan \hat{ABC} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3} = 1,33$$

❖ العلاقات بين النسب المثلثية:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

;

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

نتائج:

$$\cos x = \frac{\sin x}{\tan x}$$

;

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\sin x = \tan x \times \cos x$$

;

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

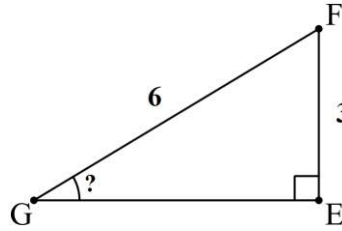
✓ ملاحظة 1: قيمة $\sin$ وقيمة $\cos$ دائما أصغر من 1 وأكبر من 0

✓ ملاحظة 2: قيم $\sin, \cos, \tan$ دائما موجبة (في زوايا مثلث قائم)

جب : $\sin$
تجب : $\cos$
ظل : $\tan$
زاوية : x

حساب قياس زاوية باستعمال نسب مثلثية

مثال 1:



$$EF = 3 \text{ cm}$$

$$FG = 6 \text{ cm}$$

$$\widehat{EGF} = ?$$

الحل:

* لحساب قياس الزاوية $\widehat{EGF}$ لدينا فقط طول الضلع المقابل لها EF و الوتر FG ومنه نستعمل $\sin \widehat{EGF}$

$$\sin \widehat{EGF} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin \widehat{EGF} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{EF}{FG} = \frac{3}{6} = 0,5$$

* باستخدام الآلة الحاسبة ذات الحجم الصغير (أحادية الشاشة):

(1) نضبط الآلة الحاسبة على DEG بلمسة DR

(2) نكتب من اليسار إلى اليمين: 0 . 5 2ndf sin

تظهر النتيجة: 3 و منه قياس الزاوية $\widehat{EGF} = 30^\circ$

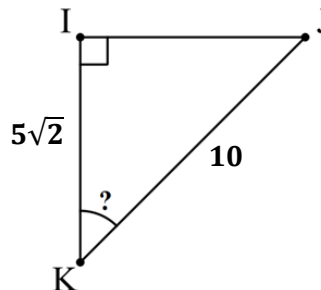
* باستخدام الآلة الحاسبة ذات الحجم الكبير (ثنائية الشاشة):

(1) نضبط الآلة الحاسبة على DEG بالضغط مرتين على MOD ثم على الرقم 1

(2) نضغط من اليسار إلى اليمين: SHIF sin 0 . 5 =

تظهر النتيجة: 3 و منه قياس الزاوية $\widehat{EGF} = 30^\circ$

مثال 2:



$$IK = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$JK = 10 \text{ cm}$$

$$\widehat{IKJ} = ?$$

الحل:

* لحساب قياس الزاوية $\widehat{IKJ}$ لدينا فقط طول الضلع المجاور لها IK و الوتر JK ومنه نستعمل $\cos \widehat{IKJ}$

$$\cos \widehat{IKJ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

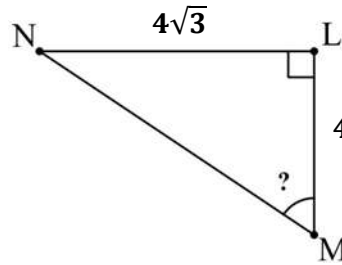
$$\cos \widehat{IKJ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{IK}{JK} = \frac{5\sqrt{2}}{10} \approx 0,71$$

* باستخدام الآلة الحاسبة ذات الحجم الصغير (أحادية الشاشة):

- (1) نضبط الآلة الحاسبة على DEG بلمسة **DR**
- (2) نكتب من اليسار إلى اليمين: **0** **.** **7** **1** **2ndf** **co**
- تظهر النتيجة: **44,76** و منه قيس الزاوية $\widehat{IKJ} \approx 45^\circ$

* باستخدام الآلة الحاسبة ذات الحجم الكبير (ثنائية الشاشة):

- (1) نضبط الآلة الحاسبة على DEG بالضغط مرتين على **MOD** ثم على الرقم **1**
- (2) نضغط من اليسار إلى اليمين: **SHIFT** **cos** **0** **.** **7** **1** **=**
- تظهر النتيجة: **44,76** و منه قيس الزاوية $\widehat{IKJ} \approx 45^\circ$



مثال 3:

$$\begin{aligned} LM &= 4 \text{ cm} \\ LN &= 4\sqrt{3} \text{ cm} \\ \widehat{LMN} &= ? \end{aligned}$$

الحل:

* لحساب قيس الزاوية $\widehat{LMN}$ لدينا فقط طول الضلع المقابل لها LN و المجاور لها LM ومنه نستعمل

$$\tan \widehat{LMN} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \quad \text{لأن } \tan \widehat{LMN}$$

$$\tan \widehat{LMN} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{LN}{LM} = \frac{4\sqrt{3}}{4} \approx 1,73$$

* باستخدام الآلة الحاسبة ذات الحجم الصغير (أحادية الشاشة):

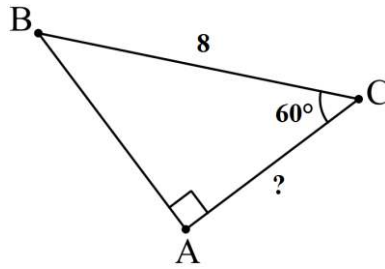
- (1) نضبط الآلة الحاسبة على DEG بلمسة **DR**
- (2) نكتب من اليسار إلى اليمين: **1** **.** **7** **3** **2ndf** **tan**
- تظهر النتيجة: **59,97** و منه قيس الزاوية $\widehat{LMN} \approx 60^\circ$

* باستخدام الآلة الحاسبة ذات الحجم الكبير (ثنائية الشاشة):

- (1) نضبط الآلة الحاسبة على DEG بالضغط مرتين على **MOD** ثم على الرقم **1**
- (2) نضغط من اليسار إلى اليمين: **SHIFT** **tan** **1** **.** **7** **3** **=**
- تظهر النتيجة: **59,97** و منه قيس الزاوية $\widehat{LMN} \approx 60^\circ$

حساب طول باستعمال نسب مثلثية

مثال 1:



$$\widehat{ACB} = 60^\circ$$

$$BC = 8 \text{ cm}$$

$$AC = ?$$

الحل:

* من المعطيات لدينا قيس الزاوية $\widehat{ACB}$ وطول الوتر BC ونبحث عن المجاور AC إذن نستعمل $\cos \widehat{ACB}$

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}$$

نعوض:

$$\cos 60^\circ = \frac{AC}{8}$$

نحسب $\cos 60^\circ$ بالآلة الحاسبة كما في الوثيقة ثم نعوض:

$$0,5 = \frac{AC}{8}$$

ثم نرتب هذه النتيجة في جدول الرابع المتناسب:

0,5	AC
1	8

$$AC = \frac{0,5 \times 8}{1} \text{ ومنه}$$

$$AC = 4 \text{ cm}$$

* باستخدام الآلة الحاسبة ذات الحجم الصغير (أحادية الشاشة):

(1) نضبط الآلة الحاسبة على DEG بلمسة DRG

(2) نكتب من اليسار إلى اليمين: 6 0 cos

تظهر النتيجة: 0,5

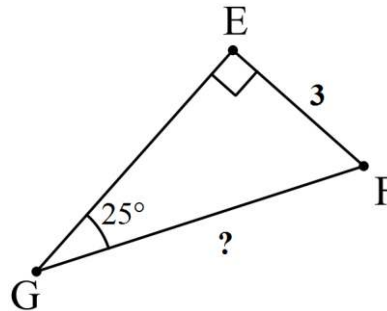
* باستخدام الآلة الحاسبة ذات الحجم الكبير (ثنائية الشاشة):

(1) نضبط الآلة الحاسبة على DEG بالضغط مرتين على MODE ثم على الرقم 1

(2) نضغط من اليسار إلى اليمين: cos 6 0 =

تظهر النتيجة: 0,5

مثال 2:



$$\widehat{EGF} = 25^\circ$$

$$EF = 3 \text{ cm}$$

$$GF = ?$$

الحل:

* من المعطيات لدينا قيس الزاوية $\widehat{EGF}$ وطول الضلع المقابل لها EF ونبحث عن الوتر GF إذن نستعمل

$$\sin \widehat{EGF} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \text{ لأن } \sin \widehat{EGF}$$

$$\sin \widehat{EGF} = \frac{EF}{GF}$$

نعوض:

$$\sin 25^\circ = \frac{3}{GF}$$

* باستخدام الآلة الحاسبة ذات الحجم الصغير (أحادية الشاشة):

(1) نضبط الآلة الحاسبة على DEG بلمسة DRG

(2) نكتب من اليسار إلى اليمين: 2 5 sin

تظهر النتيجة: 0,422618261

* باستخدام الآلة الحاسبة ذات الحجم الكبير (ثنائية الشاشة):

(1) نضبط الآلة الحاسبة على DEG بالضغط مرتين على MODE ثم على الرقم 1

(2) نضغط من اليسار إلى اليمين: sin 2 5 =

تظهر النتيجة: 0,422618261

نحسب $\sin 25^\circ$ بالآلة الحاسبة كما في الوثيقة ثم نعوض:

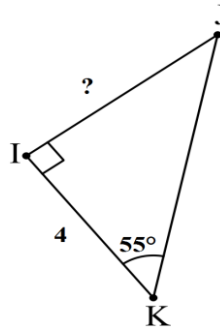
$$0,42 = \frac{3}{GF}$$

ثم نرتب هذه النتيجة في جدول الرابع المتناسب:

0,42	3
1	GF

$$GF = \frac{3 \times 1}{0,42}$$

$$GF \approx 7 \text{ cm}$$



مثال 3:

$$\widehat{IKJ} = 60^\circ$$

$$IK = 4 \text{ cm}$$

$$IJ = ?$$

الحل:

* من المعطيات لدينا قيس الزاوية $\widehat{IKJ}$ وطول الضلع المجاور لها IK و نبحث عن المقابل IJ إذن نستعمل

$$\tan \widehat{IKJ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \text{ لأن } \tan \widehat{IKJ}$$

$$\tan \widehat{IKJ} = \frac{IJ}{IK}$$

نعوض:

$$\tan 55^\circ = \frac{IJ}{4}$$

* باستخدام الآلة الحاسبة ذات الحجم الصغير (أحادية الشاشة):

(1) نضبط الآلة الحاسبة على DEG بلمسة DRG

(2) نكتب من اليسار إلى اليمين: 5 5 tan

تظهر النتيجة: 1,428148007 $\approx 1,43$

* باستخدام الآلة الحاسبة ذات الحجم الكبير (ثنائية الشاشة):

(1) نضبط الآلة الحاسبة على DEG بالضغط مرتين على MODE ثم على الرقم 1

(2) نضغط من اليسار إلى اليمين: tan 5 5 =

تظهر النتيجة: 1,428148007 $\approx 1,43$

نحسب $\tan 55^\circ$ بالآلة الحاسبة كما في الوثيقة ثم نعوض:

$$1,43 = \frac{IJ}{4}$$

ثم نرتب هذه النتيجة في جدول الرابع المتناسب:

1,43	IJ
1	4

$$IJ = \frac{1,43 \times 4}{1}$$

$$IJ \approx 6 \text{ cm}$$

الأشعة والانسحاب

- الشعاعان المتعاكسان:
- لهما نفس الطول
 - لهما نفس المنحى (متوازيان)
 - متعاكسان في الإتجاه

- الشعاعان المتساويان:
- لهما نفس الطول
 - لهما نفس المنحى (متوازيان)
 - لهما نفس الإتجاه

$\overrightarrow{BA}$ هو معاكس الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ونكتب $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

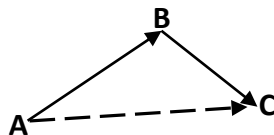
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ (مجموع شعاعان متعاكسان $\vec{0}$)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ معناه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس الاحداثيات

مجموع شعاعين:

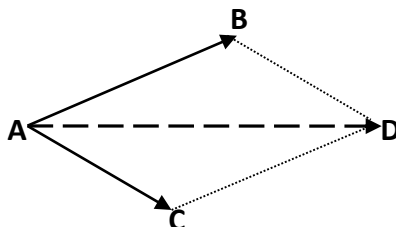
(1) نهاية الشعاع الأول هي بداية الشعاع الثاني: (علاقة شال)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



(2) بداية الشعاع الأول هي بداية الشعاع الثاني:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$



الدالة الخطية و الدالة التآلفية

الخاصية	العبرة العامة	
تمر من المبدأ	$f(x) = ax$	الدالة الخطية
لا تمر من المبدأ (تمر من b على محور الترتيب)	$f(x) = ax + b$	الدالة التآلفية
توازي محور الفواصل	$f(x) = b$	الدالة الثابتة

حساب معامل التناسب a :

• دالة خطية: $a = \frac{f(x)}{x}$

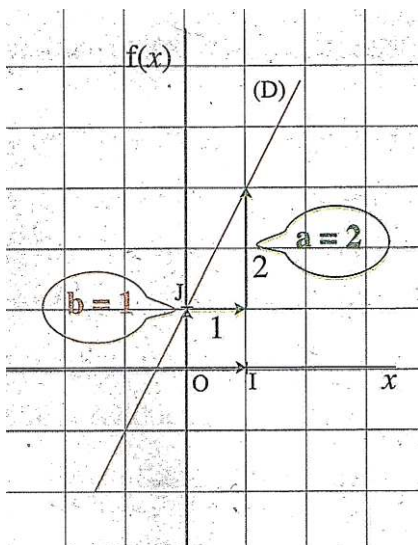
• دالة تآلفية: $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, مع $x_2 \neq x_1$

احداثيي نقطة M من دالة:

فاصلة = سابقة
↓
 $f(x) = y$ أو
↑
صورة = ترتيب

ترتيب فاصلة ترتيب فاصلة
↓ ↓
 $M(x; y)$ أو $M(x; f(x))$
↑ ↑
سابقة صورة سابقة صورة

ايجاد العبرة الجبرية لدالة بيانيًا:



(الشكل 1)

التمثيل البياني للدالة $f(x)$ هو المستقيم (D)
معادلته هي: $y = 2x + 1$

مثال: (الشكل 1)

- لا تمر من المبدأ إذن دالة تآلفية
ومنه: $f(x) = ax + b$

- الترتيب إلى المبدأ هو المعامل b
إذن $b = 1$

- نتقدم بوحدة إلى اليمين انطلاقًا من b ثم
نصعد أو نهبط لنصل إلى المستقيم (D)
 - إذا نصعد ف a موجب
 - إذا نهبط ف a سالب

إذن $a = 2$

ومنه: $f(x) = 2x + 1$

* يسمى a أيضا معامل التوجيه

المعالم

$$A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$$

حساب إحداثيي الشعاع $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

حساب إحداثيي M منتصف القطعة $[AB]$:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

حساب الطول AB : (المسافة بين نقطتين A و B)

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

العلاقة بين شعاعين:

$$\overrightarrow{AB}(x; y), \overrightarrow{CD}(x'; y')$$

• تساوي شعاعين:

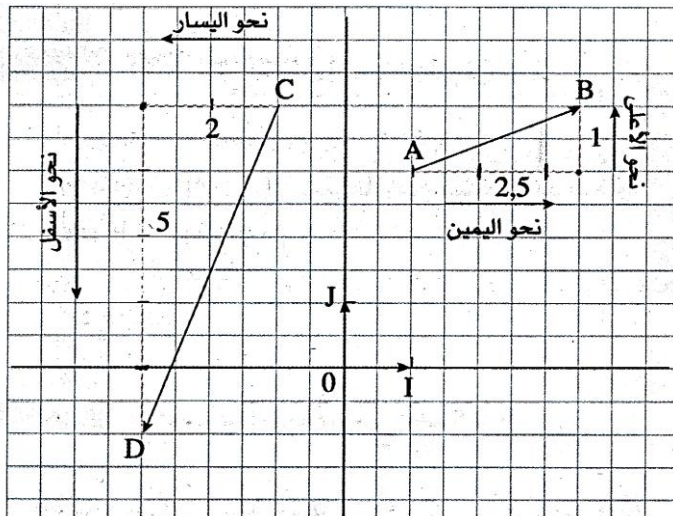
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

• مجموع شعاعين:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (x + x'; y + y')$$

إحداثيي شعاع بيانيا:

مثال: (الشكل 2)



(الشكل 2)

الإحداثية الأولى لـ $\overrightarrow{AB}$ هو 2,5.

الإحداثية الثانية لـ $\overrightarrow{AB}$ هو 1.

ونكتب $\overrightarrow{AB}(2,5; 1)$.

الإحداثية الأولى لـ $\overrightarrow{CD}$ هو -2.

الإحداثية الثانية لـ $\overrightarrow{CD}$ هو -5.

ونكتب $\overrightarrow{CD}(-2; -5)$.

y : الثمن أو الوزن أو الحجم أو الطول... الجديد
 x : الثمن أو الوزن أو الحجم أو الطول... القديم
 $f(x)$: عبارة الدالة
 a : معامل الزيادة أو معامل التخفيض
 p : نسبة الزيادة أو نسبة التخفيض

الزيادة

• بعد الزيادة: $y = \left(1 + \frac{p}{100}\right) x$

• قبل الزيادة: $x = \frac{y}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$

• معامل الزيادة (a) :

$a = \frac{y}{x} = \frac{\text{السعر الجديد}}{\text{السعر القديم}}$ أو $a = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

• الدالة المعبرة عن الزيادة:

$f(x) = a x$ أو $f(x) = \frac{\text{السعر الجديد}}{\text{السعر القديم}} x$

• نسبة الزيادة (p) :

$p = (a - 1) \times 100$

• قيمة الزيادة (مقدار الاضافة):
 y : مقدار الزيادة

$y = \frac{p}{100} x$

• الدالة المعبرة عن مقدار الزيادة:

$f(x) = \frac{p}{100} x$

التخفيض

• بعد التخفيض: $y = \left(1 - \frac{p}{100}\right) x$

• قبل التخفيض: $x = \frac{y}{\left(1 - \frac{p}{100}\right)}$

• معامل التخفيض (a) :

$a = \frac{y}{x} = \frac{\text{السعر الجديد}}{\text{السعر القديم}}$ أو $a = \left(1 - \frac{p}{100}\right)$

• الدالة المعبرة عن التخفيض:

$f(x) = a x$ أو $f(x) = \frac{\text{السعر الجديد}}{\text{السعر القديم}} x$

• نسبة التخفيض (p) :

$p = (1 - a) \times 100$

• قيمة التخفيض (مقدار الأخذ):
 y : مقدار التخفيض

$y = \frac{p}{100} x$

• الدالة المعبرة عن مقدار التخفيض:

$f(x) = \frac{p}{100} x$

المقادير المركبة

$$m_v = \frac{m}{v} \quad \text{أي} \quad \frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}} = \text{الكتلة الحجمية} \quad \diamond$$

ملاحظة 1:



يجب أن تكون إما:

$$\left[\begin{array}{l} \text{وحدة الكتلة ب: } g \\ \text{و وحدة الحجم ب: } cm^3 \end{array} \right] \quad \text{لتصبح وحدة الكتلة الحجمية ب } g/cm^3$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{وحدة الكتلة ب: } Kg \\ \text{و وحدة الحجم ب: } m^3 \end{array} \right] \quad \text{أو} \quad \text{لتصبح وحدة الكتلة الحجمية ب } Kg/m^3$$

$$V = \frac{d}{t} \quad \text{أي} \quad \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \text{السرعة المتوسطة} \quad \diamond$$

ملاحظة 2:



يجب أن تكون إما:

$$\left[\begin{array}{l} \text{وحدة المسافة ب: } m \\ \text{و وحدة الزمن ب: } s \end{array} \right] \quad \text{لتصبح وحدة السرعة المتوسطة ب } m/s$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{وحدة المسافة ب: } Km \\ \text{و وحدة الزمن ب: } h \end{array} \right] \quad \text{أو} \quad \text{لتصبح وحدة السرعة المتوسطة ب } Km/h$$

$$E = p \times t \quad \text{أي} \quad \text{الاستطاعة الكهربائية} \times \text{الزمن} = \text{الطاقة الكهربائية} \quad \diamond$$

ملاحظة 3:



يجب أن تكون إما:

$$\left[\begin{array}{l} \text{وحدة الاستطاعة الكهربائية ب: } w \\ \text{و وحدة الزمن ب: } h \end{array} \right] \quad \text{لتصبح وحدة الطاقة الكهربائية ب } wh$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{وحدة الاستطاعة الكهربائية ب: } Kw \\ \text{و وحدة الزمن ب: } h \end{array} \right] \quad \text{أو} \quad \text{لتصبح وحدة الطاقة الكهربائية ب } Kwh$$

$1Kg = 1000 g$	$1m = 60 s$
$1Km = 1000 m$	$1h = 60 m$
$1Kwh = 1000 wh$	$1h = 3600 s$
$1m^3 = 1000 l$	
$1l = 1Kg = 1000 g$	

الإحصاء (1)

❖ **قيم:**

- التكرار (عدد التلاميذ، الأشخاص...)
 - التكرار النسبي (التواتر) = $\frac{\text{التكرار}}{\text{مجموع التكرارات}}$
 - التكرار المجمع الصاعد = تكرار القيمة + تكرار القيم التي قبلها (نبدأ من اليسار)
 - التواتر المجمع الصاعد (التكرار النسبي المجمع الصاعد) = $\frac{\text{التكرار المجمع الصاعد}}{\text{مجموع التكرارات}}$
 - التكرار المجمع النازل = تكرار القيمة + تكرار القيم التي قبلها (نبدأ من اليمين)
 - التواتر المجمع النازل (التكرار النسبي المجمع النازل) = $\frac{\text{التكرار المجمع النازل}}{\text{مجموع التكرارات}}$
- في الجدول

- الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$
- الوسط الحسابي المتوازن = $\frac{\text{مجموع جداءات القيم بتكراراتها}}{\text{مجموع التكرارات}}$
- المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة
- المنوال هي القيمة الموافقة لأكبر تكرار

• الوسيط:

✓ إذا كان المجموع فردياً: (نرتب السلسلة ترتيباً تصاعدياً مع تكرار القيم)

$$\text{رتبة الوسيط} = \frac{1 + \text{مجموع التكرارات}}{2}$$

✓ إذا كان المجموع زوجياً: (نرتب السلسلة ترتيباً تصاعدياً مع تكرار القيم)

$$\text{رتبة الوسيطين} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{2}$$

$$\text{الوسيط} = \text{مركز الوسيطين} = \frac{\text{الوسيط} + 1 + \text{الوسيط}}{2}$$

- الوسط الحسابي: نرمز له بالرمز $\bar{X}$ أو M
- الوسط الحسابي المتوازن: نرمز له بالرمز $\bar{X}$ أو M
- المنوال: نرمز له بالرمز Mod
- الوسيط: نرمز له بالرمز Med

الإحصاء (2)

❖ فئات:

- مراكز الفئات
 - التكرار (عدد التلاميذ، الأشخاص...)
 - التكرار النسبي (التواتر) = $\frac{\text{التكرار}}{\text{مجموع التكرارات}}$
 - التكرار المجمع الصاعد = تكرار القيمة + تكرار القيم التي قبلها (نبدأ من اليسار)
 - التواتر المجمع الصاعد (التكرار النسبي المجمع الصاعد) = $\frac{\text{التكرار المجمع الصاعد}}{\text{مجموع التكرارات}}$
 - التكرار المجمع النازل = تكرار القيمة + تكرار القيم التي قبلها (نبدأ من اليمين)
 - التواتر المجمع النازل (التكرار النسبي المجمع النازل) = $\frac{\text{التكرار المجمع النازل}}{\text{مجموع التكرارات}}$
- في الجدول

- الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع مراكز الفئات}}{\text{عدد الفئات}}$
- الوسط الحسابي المتوازن = $\frac{\text{مجموع جداءات مراكز الفئات بتكراراتها}}{\text{مجموع التكرارات}}$
- الفئة المنوالية هي الفئة الموافقة لأكبر تكرار
- الفئة الوسيطة:

✓ إذا كان المجموع فردياً:

$$\text{رتبة الوسيط} = \frac{1 + \text{مجموع التكرارات}}{2}$$

✓ إذا كان المجموع زوجياً:

$$\text{رتبة الوسيط} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{2}$$

- الفئة الوسيطة هي الفئة الأولى التي تكرارها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي رتبة الوسيط

الإحصاء مراجعة شاملة

مثال توضيحي 1: (الإحصاء قيم)

لدينا نقاط مادة الرياضيات لتلاميذ السنة الرابعة متوسط موزعة كالآتي:

15, 12, 18, 18, 10, 13, 12, 18, 10, 13, 12, 12, 13, 15, 18, 18, 15, 12, 15

- (1) ما هو عدد التلاميذ؟
- (2) ضع في جدول العلامات ثم أحسب:
 - (a) التكرار
 - (b) التواتر (التكرار النسبي)
 - (c) التكرار المجمع الصاعد
 - (d) التواتر المجمع الصاعد
 - (e) التكرار المجمع النازل
 - (f) التواتر المجمع النازل
- (3) أحسب الوسط الحسابي
- (4) أحسب الوسط الحسابي المتوازن
- (5) أحسب المدى
- (6) ما هو منوال هذه السلسلة؟
- (7) أحسب وسيط هذه السلسلة

مثال توضيحي 2: (الإحصاء فئات)

لدى مريم مجموعة من الكتب صفحاتها كالتالي:

152, 203, 269, 300, 190, 214, 480, 350, 171, 220, 406, 147, 444, 233, 425, 499, 463, 338, 176, 400, 287, 101, 155, 184, 110

أرادت ترتيبها في رفوف حسب عدد الصفحات

- (1) ما هو عدد الكتب؟
- (2) أنقل ثم أتمم الجدول
- (3) أحسب الوسط الحسابي
- (4) أحسب الوسط الحسابي المتوازن
- (5) ما هي الفئة المنوالية؟
- (6) ما هي الفئة الوسيطة؟

عدد الصفحات	$100 \leq x < 200$	$200 \leq x < 300$	$300 \leq x < 400$	$400 \leq x < 500$	المجموع
مراكز الفئات					
التكرار (عدد الكتب)					
التكرار النسبي (التواتر)					
التكرار المجمع الصاعد					
التواتر المجمع الصاعد					
التكرار المجمع النازل					
التواتر المجمع النازل					

حل المثال التوضيحي 1:

(1) عدد التلاميذ = 20

(2)

• التكرار والتكرار النسبي (التواتر)

العلامات	10	12	13	15	18	المجموع
التكرار	2	5	3	4	6	20
التكرار النسبي (التواتر)	$\frac{2}{20} = 0,1$	$\frac{5}{20} = 0,25$	$\frac{3}{20} = 0,15$	$\frac{4}{20} = 0,2$	$\frac{6}{20} = 0,3$	1

• التكرار المجمع الصاعد و التواتر المجمع الصاعد

العلامات	10	12	13	15	18	المجموع
التكرار	2	5	3	4	6	20
التكرار المجمع الصاعد	2	7	10	14	20	
التواتر المجمع الصاعد	$\frac{2}{20} = 0,1$	$\frac{7}{20} = 0,35$	$\frac{10}{20} = 0,5$	$\frac{14}{20} = 0,7$	$\frac{20}{20} = 1$	

• التكرار المجمع النازل و التواتر المجمع النازل

العلامات	10	12	13	15	18	المجموع
التكرار	2	5	3	4	6	20
التكرار المجمع النازل	20	18	13	10	6	
التواتر المجمع النازل	$\frac{20}{20} = 1$	$\frac{18}{20} = 0,9$	$\frac{13}{20} = 0,65$	$\frac{10}{20} = 0,5$	$\frac{6}{20} = 0,3$	

$$(3) \text{ الوسط الحسابي } = \frac{68}{5} = \frac{10+12+13+15+18}{5} = 13,6$$

$$(4) \text{ الوسط الحسابي المتوازن } = \frac{287}{20} = \frac{(10 \times 2) + (12 \times 5) + (13 \times 3) + (15 \times 4) + (18 \times 6)}{20} = 14,35$$

$$(5) \text{ المدى } = 18 - 10 = 8$$

(6) منوال هذه السلسلة هو 18 لأنها القيمة الموافقة لأكبر تكرار

(7) الوسيط:

✓ المجموع زوجي $\Rightarrow$ وسيطين نأخذ مركزهما

$$✓ \text{ رتبة الوسيطين } = \frac{20}{2} = 10$$

✓ نرتب السلسلة ترتيباً تصاعدياً

10, 10, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 15, 15, 15, 15, 18, 18, 18, 18, 18

10 قيم

10 قيم

$$✓ \text{ الوسيط } = \frac{13+15}{2} = 14$$

حل المثال التوضيحي 2:

(1) عدد الكتب = 25

(2) إتمام الجدول:

عدد الصفحات	$100 \leq x < 200$	$200 \leq x < 300$	$300 \leq x < 400$	$400 \leq x$	المجموع
مراكز الفئات	$\frac{100+200}{2} = 150$	$\frac{200+300}{2} = 250$	$\frac{300+400}{2} = 350$	$\frac{400+500}{2} = 450$	
التكرار (عدد الكتب)	9	6	3	7	25
التكرار النسبي (التواتر)	$\frac{9}{25} = 0,36$	$\frac{6}{25} = 0,24$	$\frac{3}{25} = 0,12$	$\frac{7}{25} = 0,28$	1
التكرار المجمع الصاعد	9	15	18	25	
التواتر المجمع الصاعد	$\frac{9}{25} = 0,36$	$\frac{15}{25} = 0,6$	$\frac{18}{25} = 0,72$	$\frac{25}{25} = 1$	
التكرار المجمع النازل	25	16	10	7	
التواتر المجمع النازل	$\frac{25}{25} = 1$	$\frac{16}{25} = 0,64$	$\frac{10}{25} = 0,4$	$\frac{7}{25} = 0,28$	

$$(3) \text{ الوسط الحسابي } = \frac{1200}{4} = \frac{150+250+350+450}{4} = 300$$

$$(4) \text{ الوسط الحسابي المتوازن } = \frac{7050}{25} = \frac{(150 \times 9) + (250 \times 6) + (350 \times 3) + (450 \times 7)}{9+6+3+7} = 282$$

(5) الفئة المنوالية هي الفئة $100 \leq x < 200$ لأنها الفئة الموافقة لأكبر تكرار

(6) الفئة الوسيطة:

$$\checkmark \text{ المجموع فردي } \Leftarrow \text{رتبة الوسيط} = \frac{25+1}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

✓ في التكرار المجمع الصاعد رتبة الكتاب 13 تقع في الفئة $200 \leq x < 300$

● و منه الفئة الوسيطة هي: $200 \leq x < 300$

الدوران

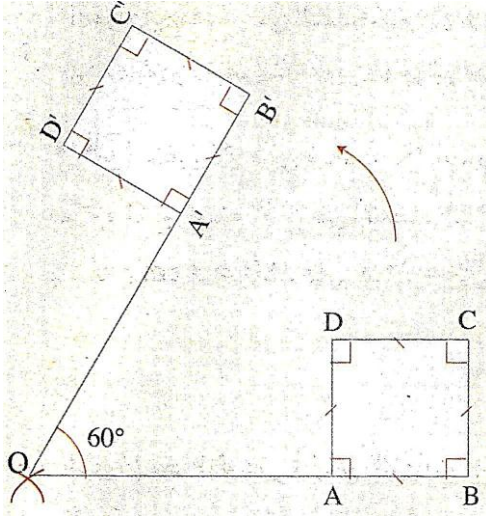
الدوران هو طريقة تمكننا من تدوير نقطة أو قطعة مستقيمة أو شكل هندسي بزواية ما وفق مركز معين و اتجاه محدد

❖ يمكن إنشاء صورة أي شكل بالدوران إذا توفرت 4 معطيات:

- ① الشكل
- ② مركز الدوران
- ③ زاوية الدوران
- ④ اتجاه الدوران

❖ اتجاه الدوران نوعان
الاتجاه الموجب (+) عكس حركة عقارب الساعة
الاتجاه السالب (-) نفس حركة عقارب الساعة

✓ ملاحظة: إذا لم يعطى الإتجاه نأخذ الاتجاه الموجب (+)



❖ خواص الدوران:

- 1) يحافظ على المسافات
- 2) يحافظ على أقياس الزوايا
- 3) يحافظ على استقامية النقاط
- 4) يحافظ على طبيعة الأشكال

❖ تحويل أي شكل هندسي بالدوران هو شكل هندسي يقايسه

أمثلة:

- صورة قطعة مستقيمة بالدوران هي قطعة مستقيمة تقايسها
- صورة زاوية بالدوران هي زاوية تقايسها
- صورة مثلث بالدوران هو مثلث يقايسه
- صورة دائرة بالدوران هي دائرة تقايسها
- صورة مربع بالدوران هو مربع يقايسه

الزاوية المركزية والزاوية المحيطية في دائرة

مفاهيم أساسية:

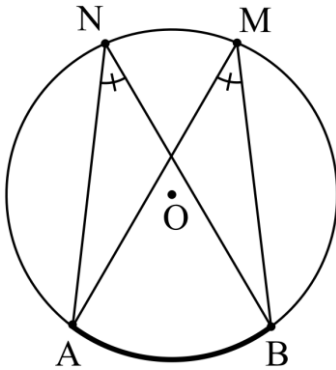
- * القطر في دائرة: هو ضلع يقطع الدائرة في نقطتين ويشمل المركز
- * الوتر في دائرة: هو ضلع يقطع الدائرة في نقطتين ولا يشمل المركز
- * القوس في دائرة: هو جزء من محيط دائرة يحصره وتر أو قطر

تعريف:

- الزاوية المحيطية: هي زاوية رأسها نقطة من دائرة و ضلعاها إما وترين لهذه الدائرة أو وتر وقطر
- الزاوية المركزية: هي زاوية رأسها مركز الدائرة و ضلعاها نصفي قطر للدائرة

القاعدة 1:

❖ الزاويتان المحيطيتان اللتان تحصران نفس القوس متقايستان



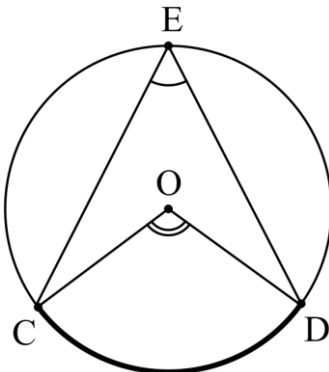
مثال 1:

الزاويتان المحيطيتان $\widehat{ANB}$ و $\widehat{AMB}$ متقايستان لأنهما تحصران نفس القوس $\widehat{AB}$

القاعدة 2:

إذا كانت زاوية مركزية و زاوية محيطية تحصران نفس القوس فإن:

- ❖ الزاوية المركزية = ضعف الزاوية المحيطية
- ❖ الزاوية المحيطية = نصف الزاوية المركزية

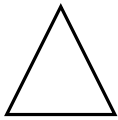
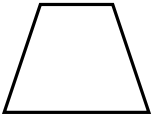
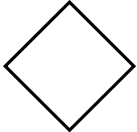
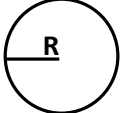


مثال 2:

الزاوية المركزية $\widehat{COD}$ و الزاوية المحيطية $\widehat{CED}$ تحصران نفس القوس $\widehat{CD}$ إذن:

$$\widehat{CED} = \frac{1}{2} \widehat{COD} \quad \text{و} \quad \widehat{COD} = 2 \widehat{CED}$$

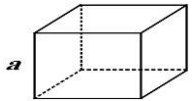
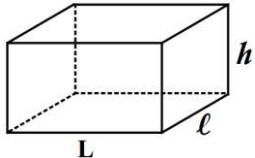
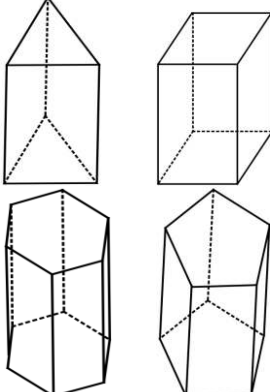
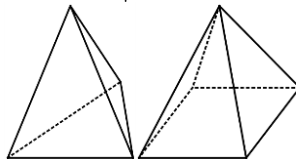
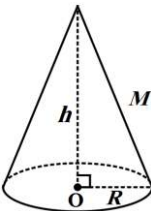
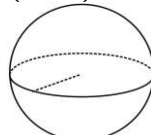
المحيط والمساحة

المساحة S	المحيط P	الشكل
الضلع $\times$ الضلع أو $\frac{\text{جاء القطرين}}{2}$	مجموع الأضلاع أو $4 \times \text{الضلع}$	المربع 
الطول $\times$ العرض	مجموع الأضلاع أو $2 \times (\text{الطول} + \text{العرض})$	المستطيل 
$\frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$	مجموع أضلاعه	المثلث 
$\frac{(\text{القاعدة الصغرى} + \text{القاعدة الكبرى}) \times \text{الارتفاع}}{2}$	مجموع أضلاعه	شبه منحرف 
القاعدة $\times$ الارتفاع	مجموع الأضلاع أو مجموع ضلعي متتاليين $\times 2$	متوازي الأضلاع 
$\frac{\text{جاء القطرين}}{2}$ أو القاعدة $\times$ الارتفاع	مجموع الأضلاع أو $4 \times \text{الضلع}$	المعين 
$\pi = 3, 14$ نصف القطر: R $\pi \times R^2$	$\pi = 3, 14$ نصف القطر: R القطر: D أو: $\pi \times R \times 2$ $\pi \times D$	الدائرة 

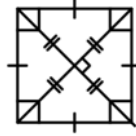
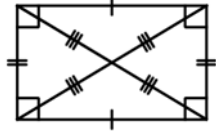
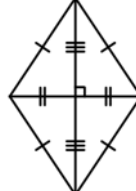
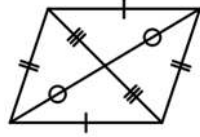
S_B : مساحة القاعدة
 P : المحيط
 P_B : محيط القاعدة
 V : الحجم
 B : القاعدة الكبرى
 b : القاعدة الكبرى

a : الضلع
 l : العرض
 L : الطول
 h : الارتفاع
 D : القطر
 R : نصف القطر
 S أو A : المساحة

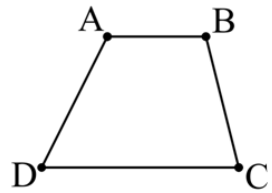
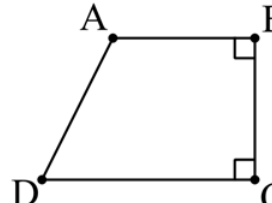
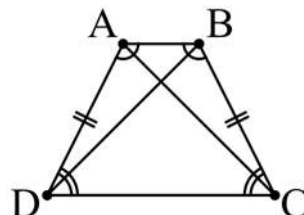
الحجم، المساحة الجانبية والمساحة الكلية

الشكل	الحجم (السعة)	المساحة الجانبية	المساحة الكلية
المكعب 	$(\text{الضلع})^3 = \text{الضلع} \times \text{الضلع} \times \text{الضلع}$ $V = a \times a \times a = a^3$	مساحة وجه $\times 4$ $S = 4a^2$	مساحة وجه $\times 6$ $S = 6a^2$
متوازي المستطيلات 	مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع $V = S_B \times h$ أو الطول $\times$ العرض $\times$ الارتفاع $V = L \times l \times h$	محيط القاعدة $\times$ الارتفاع $S = P_B \times h$ أو $S = 2(L + l) \times h$	المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين $S = 2[(L + l) \times h + L \times l]$
الموشور القائم 	مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع $V = S_B \times h$	محيط القاعدة $\times$ الارتفاع $S = P_B \times h$	المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين
الأسطوانة الدورانية 	مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع $V = S_B \times h$ أو $V = \pi \times R^2 \times h$	محيط القاعدة $\times$ الارتفاع $S = P_B \times h$ أو $S = 2\pi R \times h$	المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين $S = 2\pi R(h + R)$
الهرم 	$\frac{\text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{3}$ $V = \frac{S_B \times h}{3}$	نصف محيط القاعدة $\times$ الارتفاع الجانبي	المساحة الجانبية + مساحة القاعدة
المخروط 	$\frac{\text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{3}$ $V = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3}$ أو $V = \frac{S_B \times h}{3}$	طول مولد المخروط: M نصف محيط القاعدة $\times$ طول مولده أو $S = \pi \times R \times M$	المساحة الجانبية + مساحة القاعدة $S = \pi R(R + M)$
الكرة (الجلة) 	نصف القطر: R $V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$	نصف القطر: R $S = 4 \times \pi \times R^2$	$\pi = 3, 14$

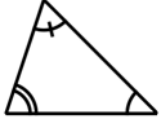
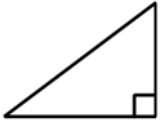
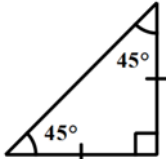
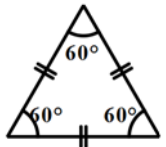
خواص الأشكال الهندسية

الشكل	خواصه
المربع 	- متوازي الأضلاع (كل ضلعان متقابلان متوازيان) - كل أضلاعه متقايسة - له أربع زوايا قائمة - قطراه متساويان - قطراه متعامدان - قطراه متناصفان - كل قطر ينصف الزاويتين المتعلق بهما
المستطيل 	- متوازي الأضلاع (كل ضلعان متقابلان متوازيان) - كل ضلعان متقابلان متقايسان - له أربع زوايا قائمة - قطراه متساويان - قطراه متناصفان
المعين 	- متوازي الأضلاع (كل ضلعان متقابلان متوازيان) - كل أضلاعه متقايسة - كل زاويتين متقابلتين متقايسيتين - قطراه متعامدان - قطراه متناصفان - كل قطر ينصف الزاويتين المتعلق بهما
متوازي الأضلاع 	- متوازي الأضلاع (كل ضلعان متقابلان متوازيان) - كل ضلعان متقابلان متقايسان - كل زاويتين متقابلتين متقايسيتين - قطراه متناصفان

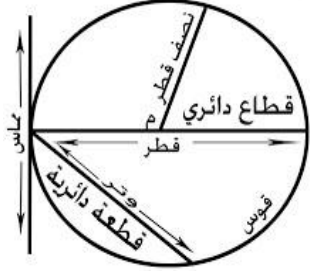
متوازيات الأضلاع

الشكل	خواصه
شبه منحرف 	- القاعدتين متوازيتين غير متساويتين - الساقان غير متوازيان و غير متساويان - مجموع زواياه 360° $\widehat{CDA} + \widehat{DAB} = 180^\circ$ $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 180^\circ$
شبه منحرف القائم 	- القاعدتين متوازيتين غير متساويتين - الساقان غير متوازيان و غير متساويان - له زاويتان قائمتان - مجموع زواياه 360° $\widehat{CDA} + \widehat{DAB} = 180^\circ$ $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 180^\circ$
شبه منحرف متساوي الساقين 	- القاعدتين متوازيتين غير متساويتين - الساقان متساويان غير متوازيان - قطراه متقايسان - زاويتي القاعدة الكبرى متقايسيتين - زاويتي القاعدة الصغرى متقايسيتين - مجموع زواياه 360° $\widehat{CDA} + \widehat{DAB} = 180^\circ$ $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 180^\circ$

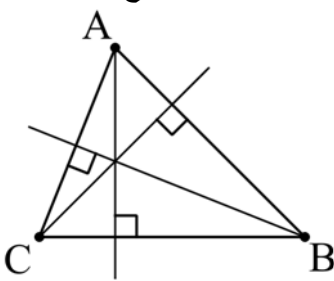
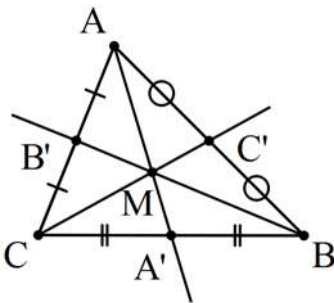
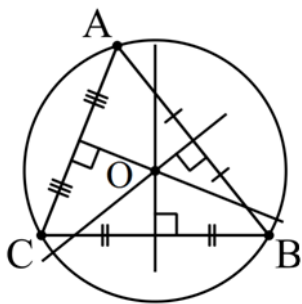
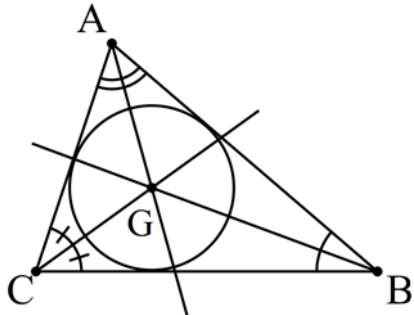
الشبه منحرف

الشكل	خواصه
المثلث الكيفي 	• مجموع زواياه الداخلية $= 180^\circ$ • مجموع زواياه الخارجية $= 360^\circ$
المثلث القائم 	• مجموع زواياه $= 180^\circ$ • له ضلعان متعامدان • لديه زاوية قائمة $= 90^\circ$ • مربع الوتر = مجموع مربع الضلعان القائمان (الوتر هو أكبر ضلع و يقابل الزاوية القائمة)
المثلث متساوي الساقين 	• مجموع زواياه $= 180^\circ$ • له ضلعان متقايسان • زاويتا القاعدة متقايستان • الارتفاع المتعلق بالقاعدة هو منصف زاوية الرأس و يقطع القاعدة في المنتصف
المثلث القائم و متساوي الساقين 	• مجموع زواياه $= 180^\circ$ • له ضلعان متعامدان و متقايسان • لديه زاوية قائمة $= 90^\circ$ • زاويتا القاعدة متقايستان $= 45^\circ$ • مربع الوتر = مجموع مربع الضلعان القائمان • الارتفاع المتعلق بالوتر هو منصف الزاوية القائمة و يقطع الوتر في المنتصف
المثلث متقايس الأضلاع 	• مجموع زواياه $= 180^\circ$ • كل أضلاعه متقايسة • كل زواياه متقايسة $= 60^\circ$ • كل الارتفاعات تنصف الزاوية المنطلقة منها و تقطع الضلع المقابل لها في المنتصف

المثلثات

الشكل	خواصه
الدائرة 	• الدائرة تشكل زاوية قدرها 360° • إذا كان AB قطر للدائرة و M نقطة من محيط الدائرة فإن ABM مثلث قائم في M (مهما كان موضع M) • جميع أقطارها متساوية • جميع أنصاف أقطارها متساوية

المستقيـمات الخاصة في مثلث

المستقيم	خواصه
الإرتفاع 	الإرتفاع في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث و يعامد الضلع المقابل.
المتوسط 	- المتوسط في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث و منتصف الضلع المقابل. - نقطة تقاطع متوسطات مثلث هي مركز ثقل المثلث $MA = 2MA' \quad MB = 2MB' \quad MC = 2MC' ;$
المحور 	- المحور في مثلث هو المستقيم الذي يعامد أضلاعه في المنتصف و ليس شرط أن يشمل الرأس المقابل - نقطة تقاطع محاور مثلث هي مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث (التي تشمل رؤوسه) $OA = OB = OC$
المنصف 	- المنصف في مثلث هو منصف إحدى زواياه - نقطة تقاطع منصفات مثلث هي مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث (التي تمس أضلاعه)