

الفرض المبروس الثاني في مادة الرياضيات

التمرين 01 : (07 نقاط)

نعتبر كثير حدود f للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = 2x^2 - x - 1$.

- (1) عين جذور $f(x)$ ثم اكتب تحليلاً لـ $f(x)$.
- (2) استنتج حلول المعادلة : $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$
- (3) استنتج حلول المتراجحة : $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 < 0$

التمرين 02 : (13 نقطة)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x) = e^x - x - 1$$

ادرس اتجاه تغير الدالة g مستنتجا إشارتها ، ثم علل أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$e^x - x > 0$$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) احسب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$ ثم فسر النتائج هندسياً.
- (2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم أعط جدول تغيراتها.
- (3) عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.
- (4) ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (T) ، ماذا نسمي النقطة التي فاصلتها 0 ؟
- (5) ارسم (T) و (C_f) في المعلم السابق.

بالتوفيق

عرضي حل للنظر في الثاني

في النهاية

في

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x (1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}))$$

الاشتقاق: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = e^x - 1$

$$e^x - 1 = 0$$

$$e^x = e^0 \rightarrow x = 0$$

$$e^x - 1 > 0$$

$$e^x > e^0 \rightarrow x > 0$$

$$e^x - 1 < 0 \rightarrow e^x < e^0 \rightarrow x < 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		-	+

التي تتغير في

في النهاية

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		-		+	
$g(x)$	$+\infty$				$+\infty$

$$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$$

استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		+		+	

التحليل أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$e^x - x > 0$$

لدينا $g(x) > 0$ معناه: $e^x - x - 1 > 0$

$$e^x - x > 1$$

$$e^x - x > 0$$

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x} \quad D_f = \mathbb{R}$$

حساب النهايات:

التمرين 01: (7 نقاط)

$$f(x) = 2x^2 - x - 1$$

(1) - تحديد جذور $f(x)$:
بما أن $2 - 1 - 1 = 0$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$$

تحليل $f(x)$:

$$f(x) = 2(x + \frac{1}{2})(x - 1)$$

$$f(x) = (2x + 1)(x - 1)$$

(2) - استنتاج حلول المعادلة: $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$

$2(\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ في $D =]0, +\infty[$
نضع $y = \ln x$ تصبح المعادلة:

$$2y^2 - y - 1 = 0$$

ومنه:

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln x = 1 \\ \ln x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e \\ x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$$

$$S = \{e; \frac{1}{\sqrt{e}}\}$$

(3) - استنتاج حلول المعادلة:

$$2(\ln x)^2 - \ln x - 1 < 0$$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	e	$+\infty$
$2(\ln x)^2 - \ln x - 1$	+	-	+	

$$S =]\frac{1}{\sqrt{e}}; e[$$

التمرين 02: (13 نقاط)

$$g(x) = e^x - x - 1 \quad D_g = \mathbb{R}$$

(I) - دراسة تغير الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x - 1) = +\infty$$

$$f'(1) = \frac{1}{e-1}$$

(3) - معادلة التماس (T) لـ f عند النقطة التي قاطعتها:

$$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$f'(0) = \frac{(1-0)e^0}{(e^0-0)^2} = 1$$

$$f(0) = 0$$

$$(T): y = x$$

(4) - دراسة f و (T) :

لدراسة إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{x}{e^x - x} - x = \frac{x - x(e^x - x)}{e^x - x}$$

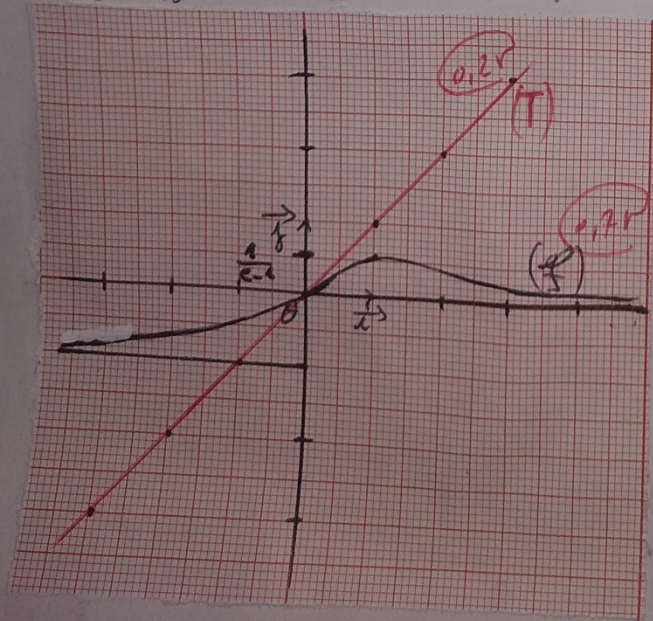
$$f(x) - y = \frac{x - x e^x + x^2}{e^x - x} = \frac{-x(-1 + e^x - x)}{e^x - x}$$

$$f(x) - y = \frac{-x \cdot g(x)}{e^x - x} \quad \text{حيث } g(x) = -1 + e^x - x$$

لدينا: $e^x - x > 0$ وهذه إشارة الفرق من إشارة $-x \cdot g(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	+	0	-
$g(x)$	+	0	+
$f(x) - y$	+	0	-
الوضع التقريبي	$(f) < (T)$	$(f) = (T)$	$(f) > (T)$

محل النقطة (0,0) نقطة انعطاف لـ (f) .



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x(1)}{x(e^x - 1)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x(1)}{x(e^x - 1)} \right)$$

$$= 0$$

التفسير الهندسي:

$y = -1$ مستقيم مقارب أفقي في $x \rightarrow -\infty$

$y = 0$ مستقيم مقارب أفقي في $x \rightarrow +\infty$

(2) - دراسة اتجاه تغير الدالة f :

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{(e^x - x) - (e^x - 1)x}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x - x - x e^x + x}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}$$

$$e^x > 0, (e^x - x)^2 > 0$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-x$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-

$$1-x=0 \rightarrow x=1$$

التفسير: f لها قيمة قصوى عند $x=1$

بعد زيل التغير است: f متناقص

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f_1(x)$	+	0	-
$f_2(x)$	$\nearrow \frac{1}{e-1}$		$\searrow 0$