

التمرين 1:

- لتكن (E) مجموعة الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ حيث: $11x + 3y = 65$
- [1] عين الثنائية $(x_0; y_0)$ من (E) والتي تحقق $2x_0^2 - 3y_0 = 11$
- [2] حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $11x + 3y = 65$
- [3] عين الثنائيات $(x; y)$ من (E) حيث $x > -5$ و $y > -5$

التمرين 2:

- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة: $8x - 6y = 22$ (1)
- [1] بين أن المعادلة (1) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- [2] عين حلاً خاصاً $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) والذي يحقق $x_0 - y_0 = 3$
- [2] حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (1)
- نعتبر a و b عدداً طبيعيين حيث $(a; b)$ حلاً للمعادلة (1)
- نضع $\text{pgcd}(a; b) = d$
- [1] عين القيم الممكنة لـ d
- [2] عين الثنائيات $(a; b)$ التي تحقق المعادلة (1) و $\text{pgcd}(a; b) = 11$

التمرين 3:

- [1] حل العدد 320 إلى جداء عوامله الأولية ثم عين قواسمه الطبيعية.
- [2] x و y عدداً طبيعيين أوليان فيما بينهما. أثبت أن xy و $(x + y)$ أوليان فيما بينهما.
- [3] a و b عدداً طبيعيين غير معدومين بحيث: $7(a + b)^2 = 320m$ حيث $m = \text{PPCM}(a; b)$ عين القيم الممكنة للعددين a و b

التمرين 4:

- [1] حل المعادلة: $6x + 2y - 18 = 0$ (1) ذات المجهولين الصحيحين x و y
- [2] ماهي كل الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة السابقة حيث x و y طبيعيين معاً؟
- [3] نفرض الآن أن y طبيعي، ولا يهمنا x . بين أن: $2011^y - 1 \equiv 0[7]$
- [3] α, β, γ أعداد طبيعية غير معدومة، حيث يكتب y في النظام ذي الأساس 5 هكذا: $4\alpha 0$ وفي النظام ذي الأساس 4 هكذا: $1\alpha\beta\alpha$ أكتب كل القيم الممكنة لـ y في النظام العشري.

التمرين 5:

- نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $11x - 5y = 2$
- [1] أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلاً للمعادلة (E) فإن: $y \equiv 4[7]$

التمرين 6:

- نعتبر المعادلة (1) $3x - 4y + 5 = 0$ حيث x و y مجهولان طبيعيين
- [1] عين تبعاً لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 7^n على 5.
- [2] بين أنه مهما كان n من N فإن: $(7^{2010} + 2010 + 1)$ يقبل القسمة على 5.
- [3] من أجل $y = 2$ ، استنتج حلاً خاصاً لـ (1)، ثم جد جميع حلولها في $(x; y)$ في N^2
- [4] إذا كان $(x; y)$ حلاً لـ (1)، ماهو باقي قسمة العدد 7^{x+3} على 5

التمرين 7:

- تذكير: من أجل كل عددين a و b نقول أن a يوافق b بتدريد 7 ونكتب $a \equiv b[7]$ إذا وجد عدد صحيح k حيث $a = b + 7k$
- [1] سؤال من الدرس:
- أ) لتكن a, b, c, d أعداد صحيحة. أثبت أنه إذا كان: $a \equiv b[7]$ و $c \equiv d[7]$ فإن $ac \equiv bd[7]$
- ب) استنتج أنه من أجل كل عددين صحيحين غير معدومين a و b : إذا $a \equiv b[7]$ فإنه من أجل عدد طبيعي n : $a^n \equiv b^n[7]$
- [2] من أجل $a = 2$ ثم من أجل $a = 3$ أوجد عدد طبيعي n غير معدوم يحقق: $a^n \equiv 1[7]$
- أ) لكن a عدد طبيعي لا يقبل القسمة على 7 أثبت أن $a^6 \equiv 1[7]$
- ب) حدد أصغر عدد طبيعي غير معدوم k يحقق $a^k \equiv 1[7]$ من أجل $2 \leq a \leq 6$
- ج) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$ بين أن: $A_{2011} \equiv 6[7]$

التمرين 11:

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{Z}$ بـ: $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$

[1] ♦ أحسب U_2 و U_3 .

[2] ♦ برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن:

$$U_{n+1} = 4U_n + 1$$

♦ تحقق أن: U_n عدد طبيعي، ثم استنتج أن: U_{n+1} و U_n أوليان فيما بينهما.

[3] ♦ (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $V_n = U_n + \frac{1}{3}$

أ) ♦ بين أن المتتالية (V_n) هندسية، عين أساسها وحدها الأول.

ب) ♦ أكتب V_n ثم U_n بدلالة n .

[4] ♦ أ) أحسب $PGCD((4^6 - 1); (4^5 - 1))$

ب) ♦ عين من أجل كل عدد طبيعي n :

$$PGCD((4^{n+1} - 1); (4^n - 1))$$

[5] ♦ أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد

$$4^n \text{ على } 7.$$

ب) ♦ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{3n}$$

ج) ♦ عين قيم العدد الطبيعي n حيث العدد $9S_n + 8n$ يقبل القسمة على 7

التمرين 12:

α و β عددان طبيعيين أوليان في ما بينهما.

[1] ♦ عين α و β علما أن: $\alpha(\alpha^2 - 19) = 35\beta$ و $\alpha > \beta$

[2] ♦ لتكن المتتالية الهندسية (U_n) التي حددها الأول U_0 وأساسها q حيث

$$U_0 < q \text{ و } U_0 \text{ عددان أوليان فيما بينهما}$$

أ) ♦ أوجد U_0 و q حيث يكون: $35U_0^2 + 19U_1 - U_0q^3 = 0$

نفرض في مايلي: $U_0 = 6$ و $q = 7$

[3] ♦ أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

ب) ♦ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية العدد

$$S_n \equiv 0[30] \text{ حيث: } 7^n \text{ على } 5.$$

التمرين 13:

في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ نعتبر المعادلة $6x - 9y + 15 = 0$ (1)

[1] ♦ هل تقبل (1) حلا في $\mathbb{Z}^2$ ؟

[2] ♦ لاحظ أن: $-2 - 3 = -5$ ، واستنتج حلا خاصا لـ (1)

[3] ♦ حل (1) في $\mathbb{Z}^2$.

[4] ♦ لتكن ($x; y$) حلول (1) الطبيعية، ونضع:

$$L = 1432^x - 2 \times 2011^{3y}$$

♦ ادرس باقي قسمة كل من 2^n , 4^n على 7 حسب قيم العدد

الطبيعي n ، ثم بين أن $L \equiv 0[7]$

التمرين 8:

[1] ♦ أ) عين الثنائيات ($x; y$) من الأعداد الصحيحة حلول المعادلة $(E): 8x - 5y = 3$.

ب) ♦ ليكن m عدد صحيح بحيث يوجد عددان صحيحان ($p; q$) يحققان:

$$m = 5q + 4 \text{ و } m = 8p + 1$$

- بين أن الثنائية ($p; q$) حل للمعادلة (E) واستنتج أن $m \equiv 9[40]$

ج) ♦ عين أصغر عدد صحيح m أكبر من 200

[2] ♦ ليكن n عدد طبيعي

أ) ♦ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي k لدينا $2^{3k} \equiv 1[7]$

ب) ♦ ماهو باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2016} على 7.

[3] ♦ ليكن a و b عددان طبيعيين كلاهما أصغر من 9 مع $a \neq 0$

$$N = a \times 10^3 + b \text{ حيث } N$$

نذكر أن N يكتب في النظام العشري: $N = \overline{a00b}^{10}$

[4] ♦ نريد تعيين الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7

- تحقق أن $-1[7] \equiv 10^3$ ثم استنتج كل الأعداد المطلوبة N

التمرين 9:

[1] ♦ جد جميع الثنائيات المرتبة ($x; y$) من الأعداد الطبيعية حيث

$$x^3 - y^3 = 631.$$

[2] ♦ أ) ♦ ماهو باقي القسمة الإقليدية للعدد 111 على 7

ب) ♦ عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية

$$\text{للعدد } 10^n \text{ على } 7$$

[3] ♦ α عدد طبيعي يكتب في النظام العشري كما يلي:

$$\alpha = \frac{999888777666555444333222111}{111}$$

أ) ♦ بين أن α يكتب بدلالة العدد 111.

ب) ♦ ماهو باقي قسمة العدد α على 7

التمرين 10:

[1] ♦ أدرس حسب قيم n الطبيعية بواقي قسمة العدد: 3^n على 10.

[2] ♦ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$2013^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv 0[10]$$

[3] ♦ عين الأعداد الطبيعية n حيث: $7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv 0[10]$

$$\text{و } 10 < n \leq 25$$

[4] ♦ ليكن العدد A مكتوب $\overline{xx02102}$ في النظام ذي الأساس 3

ومكتوب $\overline{y67y}$ في النظام ذي الأساس 9

أ) ♦ عين x و y

ب) ♦ أكتب A في النظام العشري

ج) ♦ أكتب A في النظام ذي الأساس 7

التمرين 14:

- [2] ♦ عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $19^{6n+3} - 5^{6n+4} + 4n^2 + 1$ قابلاً للقسمة على العدد 7.
- [3] ♦ N عدد طبيعي يكتب $1xx0$ في النظام ذي الأساس 5 حيث x عدد طبيعي.
- (أ) ♠ عيّن قيم x حتى يكون العدد N قابلاً للقسمة على 35.
- (ب) ♠ أكتب N في النظام العشري

التمرين 18:

- [1] ♦ عيّن الأعداد الصحيحة x التي تحقق: $x^2 - x + 6 \equiv 0[9]$
- [2] ♦ (أ) ♠ أدرس تبعاً لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الاقليدية للعدد $7^{2n} \equiv 4^n[9]$ ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $7^{2n} \equiv 4^n[9]$
- (ب) ♠ استنتج تبعاً لقيم n باقي القسمة الاقليدية لـ 4^n على 9
- [3] ♦ (أ) ♠ ماهو باقي قسمة العدد $25^{2018} + 5^{2017}$ على 9
- (ب) ♠ عيّن الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد: $7^{2n} - 7^n + 6$ مضاعف للعدد 9
- [4] ♦ عيّن الثنائيات (x, y) من الأعداد الطبيعية بحيث: $7^x + 4^x \equiv 2[9]$

التمرين 19:

- ♠ n عدد طبيعي وليكن العدد $\alpha(n)$ حيث: $\alpha(n) = 9^n + 13^n$
- [1] ♦ أوجد بواقي قسمة العددين 9^n و 13^n على 7. ثم استنتج بواقي قسمة العددين $\alpha(2008)$ و $\alpha(1429)$ على 7
- [2] ♦ حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $219x - 146y = 73$
- [3] ♦ حل في $\mathbb{Z}$ الجملة التالية $\begin{cases} x \equiv 0[3] \\ x \equiv 1[2] \end{cases}$
- [4] ♦ عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $\alpha(n)$ مضاعف لـ 7

التمرين 20:

- [1] ♦ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة العدد 2^n على 5
- [2] ♦ عيّن باقي القسمة الاقليدية للعدد $2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1}$ على 5.
- [3] ♦ بين أن العدد 131 أولي
- [4] ♦ عيّن الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $\begin{cases} 3m + 7d = 2^n - 48 \\ ab = 5m \end{cases}$
- حيث $d = PGCD(a, b)$ و $m = PPCM(a, b)$
- [5] ♦ عيّن قيم n بحيث يكون: $7 < n < 15$ $\alpha(n)$ ثم استنتج الثنائيات (a, b) .

- [1] ♦ تحقق أن $5^6 \equiv 1[7]$ واستنتج أن $5^{2016} \equiv 1[7]$
- [2] ♦ من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n$
- (أ) ♠ بين أنه من أجل n من $\mathbb{N}$ فإن: $4S_n = 5^{n+1} - 1$ استنتج أن S_n و 5^n أوليان فيما بينهما.
- (ب) ♠ ليكن العدد الصحيح a ، بين أن $4S_n \equiv a[7]$ إذا وفقط كان $S_n \equiv 2a[7]$
- (ج) ♠ بين أن $4S_{2015} \equiv 0[7]$ واستنتج باقي قسمة S_{2015} على 7
- (د) ♠ عيّن أصغر عدد طبيعي غير معدوم n بحيث يكون 7 قاسم لـ S_n
- [3] ♦ ليكن العدد الطبيعي n عدد طبيعي غير معدوم، نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $5^n x + S_n y = 1$ تحقق أن $(5; -4)$ حل للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

التمرين 15:

- [I] ♦ نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة: $2019x - 1440y = 3177 \dots$ (E)
- [1] ♦ (أ) ♠ بين أن المعادلة (E) تقبل حلاً في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- (ب) ♠ بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة: $673x - 480y = 1059$
- [2] ♦ (أ) ♠ جد حلاً خاصاً $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) حيث $x_0 \geq 0$ مع $x_0^2 + 480y_0 = 969$
- (ب) ♠ حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E)
- [3] ♦ عيّن قيم العدد الصحيح λ التي تحقق الجملة (S) حيث: $(S) \dots \begin{cases} \lambda \equiv -59[673] \\ \lambda \equiv 1000[480] \end{cases}$

التمرين 16:

- ♦ نعتبر المعادلة (1) $4x - 13y = 7$ حيث x و y عدداً صحيحان
- [1] ♦ عيّن الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق $x_0 - y_0 = 4$
- [2] ♦ حل المعادلة (1)
- [3] ♦ ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين x و y .
- (أ) ♠ ماهي القيم الممكنة للعدد d إذا كان $(x; y)$ حلاً للمعادلة (1)
- (ب) ♠ عيّن الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (1) بحيث يكون $d = 7$.
- (ج) ♠ عيّن الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (1) التي تحقق $\begin{cases} d = 7 \\ x + y < 400 \end{cases}$

التمرين 17:

- [1] ♦ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد: 5^n على 7.