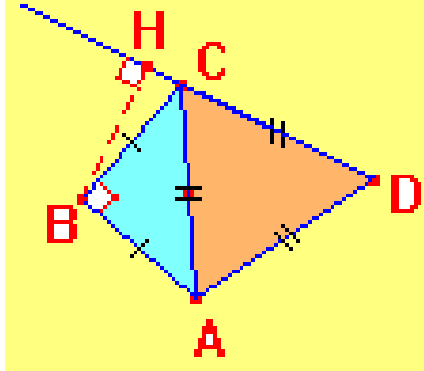


تمارين حول الجداء السلمي والتحاكي

التمرين الأول

ABC مثلث متساوي الساقين وقائم في B و ACD مثلث متقايس الأضلاع. علما أن $AC = 6$



(1) احسب الجداءات السلمية التالية :

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

(2) احسب DH حيث H هو المسقط العمودي لـ B على المستقيم (DC) .

(3) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$ واستنتج قيمة $\cos DCB$

حل التمرين الأول

(1) حساب الجداءات السلمية التالية : $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 3\sqrt{2} \times 6 \times \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2} \times 6 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 18$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = -CA \times CD \times \cos(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CD}) = -6 \times 6 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -6 \times 6 \times \frac{1}{2} = -18$$

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = DC \times DB \times \cos(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DB}) = 3 \times (3 + 3\sqrt{3}) \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \times (3 + 3\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3} + 27}{2}$$

حيث $BD = 3\sqrt{3} + 3$ و $BC = 3\sqrt{2}$

(2) حساب DH حيث H هو المسقط العمودي لـ B على المستقيم (DC) .

$$\text{لدينا } \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DH} = DC \times DH = 6 \times DH \text{ ومن جهة } \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = \frac{9\sqrt{3} + 27}{2} \text{ و } 6 \times DH = \frac{9\sqrt{3} + 27}{2} \text{ ومنه } DH = \frac{9\sqrt{3} + 27}{12}$$

(3) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$ واستنتج قيمة $\cos DCB$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CH} = -CD \times CH = -6 \times \left(\frac{9\sqrt{3} + 27}{12} - 6\right) = -\frac{9\sqrt{3} + 27}{2} + 36$$

$$\text{ومن جهة } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = CD \times CB \times \cos DCB \text{ ومنه } \cos DCB = \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}}{CD \times CB} = \frac{-\frac{9\sqrt{3} + 27}{2} + 36}{6 \times 3\sqrt{2}} = \frac{-\frac{9\sqrt{3} + 27}{2} + 36}{18\sqrt{2}}$$

التمرين الثاني

الجزء الأول: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; i, j)$ ، ABC مثلث، G مركز ثقله حيث $A(1; -2)$ ، $B(4; -1)$ ، $C(4; 4)$ ، $G\left(3; \frac{1}{3}\right)$

1. عين إحداثيات النقط I ، J و k منتصفات القطع $[AB]$ ، $[BC]$ و $[AC]$ على الترتيب.

2. عين معادلة المحور (D_1) المتعلق بالضلع $[AB]$ ، (محور القطعة المستقيمة $[AB]$). ثم معادلة المحور (D_2) المتعلق بالضلع $[BC]$.

3. عين معادلة الإرتفاع (D_3) المتعلق بالضلع $[BC]$.

4. عين معادلة المستقيم (D_4) العمودي على المستقيم (D_1) ويشمل النقطة $C(4; 4)$

5. عين معادلة المستقيم (D_5) الموازي للمستقيم (D_1) ويشمل النقطة $B(4; -1)$

6. عين إحداثيي نقطة تقاطع (D_1) و (D_2) ، ماذا يمكن القول عن هذه النقطة بالنسبة للمثلث ABC ؟

7. لتكن (C) الدائرة ذات المعادلة $x^2 + y^2 - 3x - 3y - 8 = 0$

✓ عين إحداثيي المركز ونصف قطر الدائرة (C) ، ماذا تلاحظ ؟

- ✓ عين معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث ABC وتأكد أنها الدائرة (C).
- ✓ عين معادلة المستقيم (D_6) مماس الدائرة (C) في النقطة $A(I; -2)$.
8. عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 2$.
9. لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $MA^2 = 4MB^2$.
- ✓ تحقق أن مجموعة النقط (E) تكافئ $(\overline{MA} - 2\overline{MB})(\overline{MA} + 2\overline{MB}) = 0$ ، ثم عين طبيعة المجموعة (E) .
- الجزء الثاني: ليكن h_1 التحاكي الذي مركزه G ويحول النقطة C إلى النقطة I

1. عين نسبة التحاكي h_1

2. استنتج نسبة التحاكي h_2 الذي يحول النقطة I إلى النقطة C

3. عين معادلة المستقيم (D_1') صورة المستقيم (D_1) بالتحاكي h_2

4. عين (Γ') مجموعة النقط M من المستوي صورة المجموعة (Γ) بالتحاكي h_2

حل التمرين الثاني

الجزء الأول: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; i, j)$ ، مثلث ABC ، G مركز ثقله حيث $A(I; -2)$ ، $B(4; -1)$ ، $C(4; 4)$ ، $G(3; \frac{1}{3})$

1. تعين إحداثيات النقط I ، J و K منتصفات القطع $[AB]$ ، $[BC]$ و $[AC]$ على الترتيب.

$$I \text{ منتصف } [AB] \text{ أي } I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \text{ ومنه } I\left(\frac{5}{2}; \frac{-3}{2}\right) \text{ و } J \text{ منتصف } [BC] \text{ أي } J\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right) \text{ ومنه } J\left(4; \frac{3}{2}\right)$$

$$K \text{ منتصف } [AC] \text{ أي } K\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right) \text{ ومنه } K\left(\frac{5}{2}; 1\right)$$

2. تعين معادلة المحور (D_1) المتعلق بالضلع $[AB]$ ، (محور القطعة المستقيمة $[AB]$).

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ شعاع ناظمي لـ } (D_1) \text{ أي } (D_1): 3x + y + c = 0 \text{ و } I\left(\frac{5}{2}; \frac{-3}{2}\right) \in (D_1) \text{ أي إحداثيات النقطة } I \text{ تحقق معادلة } (D_1) \text{ ومنه } 3\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2} + c = 0 \text{ ومنه } c = -6$$

$$(D_1): 3x + y - 6 = 0 \text{ أي } c = -6$$

3. تعين معادلة المحور (D_2) المتعلق بالضلع $[BC]$.

$$\overline{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ شعاع ناظمي لـ } (D_2) \text{ أي } (D_2): 0x + 5y + c = 0 \text{ أي } (D_2): 5y + c = 0 \text{ و } J\left(4; \frac{3}{2}\right) \in (D_2) \text{ أي إحداثيات النقطة } J \text{ تحقق معادلة } (D_2) \text{ ومنه } 5\left(\frac{3}{2}\right) + c = 0 \text{ ومنه } c = -\frac{15}{2}$$

$$(D_2): 2y - 3 = 0 \text{ ومنه } (D_2): 5y - \frac{15}{2} = 0 \text{ أي } c = -\frac{15}{2}$$

4. تعين معادلة الإرتفاع (D_3) المتعلق بالضلع $[BC]$.

$$\overline{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ شعاع ناظمي لـ } (D_3) \text{ أي } (D_3): 0x + 5y + c = 0 \text{ أي } (D_3): 5y + c = 0 \text{ و } A(I; -2) \in (D_3) \text{ أي إحداثيات النقطة } A \text{ تحقق معادلة } (D_3) \text{ ومنه } 5(-2) + c = 0 \text{ ومنه } c = 10$$

$$(D_3): y + 2 = 0 \text{ ومنه } (D_3): 5y + 10 = 0 \text{ أي } c = 10$$

5. عين معادلة المستقيم (D_4) العمودي على المستقيم (D_1) ويشمل النقطة $C(4; 4)$

$$\overline{CD} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ هو شعاع توجيه للمستقيم } (D_1) \text{ هو شعاع ناظمي للمستقيم } (D_4) \text{ أي } (D_4): -x + 3y + c = 0 \text{ و } C(4; 4) \in (D_4) \text{ أي إحداثيات النقطة } C \text{ تحقق معادلة } (D_4) \text{ ومنه } -4 + 3(4) + c = 0 \text{ ومنه } c = -8$$

$$(D_4): -x + 3y - 8 = 0 \text{ أي } c = -8$$

6. عين معادلة المستقيم (D_5) الموازي للمستقيم (D_1) ويشمل النقطة $B(4; -1)$

$$\overline{BD} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ هو شعاع ناظمي للمستقيم } (D_1) \text{ هو كذلك شعاع ناظمي للمستقيم } (D_5) \text{ أي } (D_5): 3x + y + c = 0 \text{ و } B(4; -1) \in (D_5) \text{ أي إحداثيات النقطة } B \text{ تحقق معادلة } (D_5) \text{ ومنه } 3(4) - 1 + c = 0 \text{ ومنه } c = -11$$

$$(D_5): 3x + y - 11 = 0 \text{ أي } c = -11$$

7. تعين إحداثيي نقطة تقاطع (D_1) و (D_2) ، ماذا يمكن القول عن هذه النقطة بالنسبة للمثلث ABC ؟

نحل جملة معادلتين $\begin{cases} (D_1): 3x + y - 6 = 0 \dots\dots\dots (1) \\ (D_2): 2y - 3 = 0 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$ من (2) نجد $y = \frac{3}{2}$ بالتعويض في (1) نجد $x = \frac{3}{2}$ ومنه $\Omega\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ هي نقطة تقاطع (D_1) و (D_2) .

يمكن القول عن هذه النقطة بالنسبة للمثلث ABC هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

8. لتكن (C) الدائرة ذات المعادلة $x^2 + y^2 - 3x - 3y - 8 = 0$

✓ عين إحداثي المركز ونصف قطر الدائرة (C)، ماذا تلاحظ ؟

$x^2 + y^2 - 3x - 3y - 8 = 0$ معناه $x^2 - 3x + y^2 - 3y - 8 = 0$ معناه $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 8 = 0$ معناه $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$ ومنه

(C) دائرة مركزها $\Omega\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ ونصف قطرها $r = \frac{5}{\sqrt{2}}$ ومنه

نلاحظ أن مركز الدائرة (C) هو نفسه مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

✓ تعين معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث ABC وتأكد أنها الدائرة (C).

مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هي $\Omega\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ ونصف قطرها $r = \frac{5}{\sqrt{2}}$ $r = \Omega A = \sqrt{(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$ ومنه معادلة الدائرة المحيطة

بالمثلث ABC هي $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$ وهي نفسها معادلة لدائرة (C).

✓ عين معادلة المستقيم (D_6) مماس الدائرة (C) في النقطة $A(1; -2)$.

$\overline{AO}$ شعاع ناظمي للمستقيم (D_6) ، كذلك $2\overline{AO}\left(\frac{1}{7}\right)$ شعاع ناظمي للمستقيم (D_6) أي $(D_6): x + 7y + c = 0$ و $A(1; -2) \in (D_6)$ أي إحداثيات

النقطة A تحقق معادلة (D_6) ومنه $1 + 7(-2) + c = 0$ ومنه $c = 13$ أي $(D_6): x + 7y + 13 = 0$

9. تعين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 2$

لتكن $M(x; y)$ نقطة من المستوي لدينا $\overline{MA}\left(\frac{1-x}{-1-y}\right)$ و $\overline{MB}\left(\frac{4-x}{-2-y}\right)$ أي $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 2$ يكافئ $(4-x)(1-x) + (-1-y)(-2-y) = 2$ يكافئ

$x^2 - 5x + 4 + y^2 + 3y + 2 = 2$ يكافئ $x^2 - 5x + 4 + y^2 + 3y = 0$ يكافئ $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 = 0$ يكافئ

$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{18}{4}$ ومنه (Γ) هي دائرة مركزها $I\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ ونصف قطرها $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

10. لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $MA^2 = 4MB^2$

✓ التحقق أن مجموعة النقط (E) تكافئ $(\overline{MA} - 2\overline{MB})(\overline{MA} + 2\overline{MB}) = 0$

$MA^2 = 4MB^2$ يكافئ $\overline{MA}^2 = 4\overline{MB}^2$ يكافئ $\overline{MA}^2 - 4\overline{MB}^2 = 0$ يكافئ $(\overline{MA} - 2\overline{MB})(\overline{MA} + 2\overline{MB}) = 0$

• تعين طبيعة المجموعة (E):

$(\overline{MA} - 2\overline{MB})(\overline{MA} + 2\overline{MB}) = 0$ تكافئ $(-MG_1)(3MG_2) = 0$ يكافئ $\overline{MG_1} \cdot \overline{MG_2} = 0$ ومنه المجموعة (E) هي دائرة فطرها $[G_1G_2]$

حيث G_1 مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; -2)\}$ و G_2 مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; 2)\}$

الجزء الثاني: ليكن h_I التحاكي الذي مركزه G ويحول النقطة C إلى النقطة I

1. تعين نسبة التحاكي h_I :

h_I التحاكي الذي مركزه G ويحول النقطة C إلى النقطة I أي $h_I(C) = I$ معناه $\overline{GI} = k\overline{GC}$ أي $\overline{GI}\left(\frac{-1}{6}\right)$ و $\overline{GC}\left(\frac{11}{3}\right)$ أي $\begin{cases} -\frac{1}{2} = k \\ -\frac{11}{6} = k\frac{11}{3} \end{cases}$ ومنه

$k = -\frac{1}{2}$ أي نسبة التحاكي h_I هي $k = -\frac{1}{2}$

2. استنتاج نسبة التحاكي h_2 الذي مركزه G يحول النقطة I إلى النقطة C:

لدينا $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$ أي $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GI}$ أي نسبة التحاكي h_2 الذي مركزه G يحول النقطة I إلى النقطة C هي $k = -2$.

3. تعين معادلة المستقيم (D_1') صورة المستقيم (D_1) بالتحاكي h_2 :

صورة المستقيم (D_1) بالتحاكي h_2 هو مستقيم (D_1') حيث (D_1') يوازي (D_1) أي $(D_1'): 3x + y + c' = 0$

وبما أن $I \in (D_1)$ و $h_2(I) = C$ فإن $C \in (D_1')$ أي إحداثيات النقطة C تحقق معادلة المستقيم (D_1') أي $3(4) + 4 + c' = 0$ أي $c' = -16$ ومنه

$$(D_1'): 3x + y - 16 = 0$$

4. تعين (Γ') مجموعة النقط M من المستوي صورة المجموعة (Γ) بالتحاكي h_2

صورة الدائرة (Γ) مركزها $I\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ ونصف قطرها $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ هي (Γ') دائرة نصف قطرها r' حيث $r' = r \times k = r \times \frac{3\sqrt{2}}{2}$ و مركزها C لأن $h_2(I) = C$

التمرين الثالث

IAB مثلث ، C و D نقطتين بحيث $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$ نعتبر التحاكي h الذي مركزه I ويحول C إلى A

1. حدد نسبة التحاكي h ثم حدد صورة النقطة D بالتحاكي h

2. حدد نسبة التحاكي h' الذي مركزه A يحول C إلى I

3. المستقيم المار من النقطة D والموازي للمستقيم (BC) يقطع (IA) في النقطة E ، بين أن $h(E) = C$

4. حدد صورة المستقيم (ED) والمثلث ECD بالتحاكي h

حل التمرين الثالث

IAB مثلث ، C و D نقطتين بحيث $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$ نعتبر التحاكي h الذي مركزه I ويحول C إلى A

1. نحدد نسبة التحاكي h :

لدينا $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ يكافئ $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IC}$ ومنه يوجد تحاكي h مركزه I ويحول C إلى A بنسبته $k = 3$

2. نحدد صورة النقطة D بالتحاكي h

لدينا $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$ يكافئ $\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{ID}$ إذن صورة النقطة D بالتحاكي h هي النقطة B

3. نحدد نسبة التحاكي h' الذي مركزه A يحول C إلى I :

لدينا $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ يكافئ $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IC}$ باستعمال علاقة شال نجد $\overrightarrow{IA} = 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC})$ يكافئ $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AC}$ يكافئ $2\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AC}$ يكافئ

$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ ومنه نسبة التحاكي h' الذي مركزه A يحول C إلى I هي $\frac{3}{2}$

4. المستقيم المار من النقطة D والموازي للمستقيم (BC) يقطع (IA) في النقطة E ، تبين أن $h(E) = C$

لدينا المستقيم المار من النقطة D والموازي للمستقيم (BC) يقطع (IA) في النقطة E إذن حسب مبرهنة طاليس $\frac{IB}{ID} = \frac{IC}{IE} = 3$ ومنه $IC = 3IE$ وبما أن

$(IE) \parallel (IC)$ و الشعاعان $\overrightarrow{IC}$ و $\overrightarrow{IE}$ في نفس الإتجاه أي $\overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IE}$ ومنه $h(E) = C$

5. حدد صورة المستقيم (ED) والمثلث ECD بالتحاكي h :

صورة المستقيم (ED) بالتحاكي h هو مستقيم يوازي (ED) ويشمل النقطة C لأن $h(E) = C$ ومنه $h((ED)) = (CB)$

لدينا $\begin{cases} h(E) = C \\ h(C) = A \\ h(D) = B \end{cases}$ ومنه صورة المثلث ECD بالتحاكي h هو المثلث CAB