

المتتاليات العددية

Les suites numériques

تعريف

نسمي متتالية عددية كل دالة عددية معرفة على $\mathbb{N}$ أو على مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من أو تساوي العدد الطبيعي n_0 .

■ يرمز لها بـ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ أو $(u_n)_{n \geq n_0}$ أو بصيغة مبسطة أكثر (u_n) .

إتجاه التغير

- المتتالية (u_n) متزايدة إذا كان $u_{n+1} \geq u_n$;
- المتتالية (u_n) متزايدة تماما إذا كان $u_{n+1} > u_n$;
- المتتالية (u_n) متناقصة إذا كان $u_{n+1} \leq u_n$;
- المتتالية (u_n) متناقصة تماما إذا كان $u_{n+1} < u_n$;
- المتتالية (u_n) ثابتة إذا كان $u_{n+1} = u_n$;
- إذا كانت المتتالية متزايدة أو متناقصة ، نقول أنها رتيبة.

تقارب متتالية

نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو ℓ . $\ell \in \mathbb{R}$ إذا كانت:

- متزايدة ومحدودة من الأعلى $u_n \leq \ell$;
- متناقصة ومحدودة من الأسفل $u_n \geq \ell$;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

◀ **ملاحظة:** في حالة: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$ نقول أن (u_n) متباعدة نحو $\pm\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 ; k \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty ; k \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n ; q \leq -1 \text{ غير موجودة}$$

و q^n متباعدة

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 ; -1 < q < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty ; q > 1$$

المتتالية الهندسية
Suite géométrique

المتتالية الحسابية
Suite arithmétique

تعريف
Définition

$$u_{n+1} = u_n \times q.$$

أساس المتتالية: $q \in \mathbb{R}$

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

أساس المتتالية: $r \in \mathbb{R}$

عبارة الحد العام
Expression du terme général

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

الحد الأول: u_p

$$u_n = u_p + (n-p) \times r.$$

الحد الأول: u_p

مجموع الحدود
Somme de termes

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

$$\sum_{k=p}^n u_k = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

الوسط الحسابي

c, b, a ثلاث حدود متعاقبة:

$$b^2 = a \times c$$

c, b, a ثلاث حدود متعاقبة:

$$2b = a + c$$

إتجاه التغير
Sens de variation

في حالة $u_p > 0$:

u_n : $q > 1$ متزايدة تماما
 u_n : $0 < q < 1$ متناقصة تماما

في حالة $u_p < 0$:

u_n : $q > 1$ متناقصة تماما
 u_n : $0 < q < 1$ متزايدة تماما

في حالة $q = 0$ أو $q = 1$:

المتتالية ثابتة

عندما $q < 0$:

المتتالية متناوبة
(إذن هي ليست رتيبة)

u_n : $r > 0$ متزايدة تماما
 u_n : $r < 0$ متناقصة تماما
 u_n : $r = 0$ ثابتة

إحداهما متزايدة ✓
الأخرى متناقصة ✓
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ ✓

المتاليتان المتجاورتان :

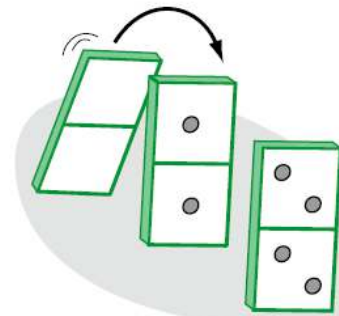
■ المتاليتان المتجاورتان متقاربتان نحو نفس العدد.

لتكن $\mathcal{P}_n$ خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n .
 للبرهان على أن $\mathcal{P}_n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$,
 يكفي أن نثبت أن:
 1 الخاصية صحيحة من أجل القيمة n_0 ;
 2 نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي
 ونبرهن صحتها من أجل $k+1$ ($k \geq n_0$).

البرهان بالتراجع

فكرة البرهان بالتراجع

■ لتتخيل أنه لدينا عدد معين من الدومينو مصطفين
 واحد تلو الآخر، لإسقاطهم لابه من توفر شرطين:
 يجب إسقاط دومينو كما أن سقوطه لابه أن يؤدي
 إلى سقوط الدومينو التالي. عند توفر هاتين
 الشرطين، نتقبل بهيها أن بقية الدومينو الموجودة
 بعد الدومينو الأول سوف تسقط.



■ لتتخيل أنه لدينا سلم، إذا علمنا كيف نصعد الدرجة الأولى و إذا علمنا
 كيفية الصعود من أي درجة إلى الدرجة الموالية، نتقبل بهيها بأنه
 يمكننا الوصول إلى أي درجة موجودة بعد الدرجة الأولى التي صعدناها.
 هذه هي الفكرة التي سوف نضعها على شكل دستور.

