

الحل المفصل لسلسلة الدوال الأسية

الرياضيات ليست إبرة تحقن في جسمك في بداية السنة لتصبح ممتازا فيها

الرياضيات = حبها + التركيز + المرافقة اليومية

التمرين 01

1. الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

① أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

② أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

③ حدد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

④ بين أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x) + f(x) = 2$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

⑤ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه يساوي 1 ، يطلب كتابة معادلة له .

⑥ عين إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل ، ثم ارسم كلا من (T) و (C_f) .

⑦ ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(3 - m)e^x = m + 1$.

حل تمرين 01

① حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3e^x - 1}{e^x + 1} \right] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3e^x - 1}{e^x + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x(3 - \frac{1}{e^x})}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} \right] = 3$$

② دراسة اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها . الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{3e^x(e^x + 1) - e^x(3e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{3e^{2x} + 3e^x - 3e^{2x} + e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $4e^x > 0$ و $(e^x + 1)^2 > 0$ فإن : $f'(x) > 0$.

ومنه نستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1	3

③ تحديد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ، ومنه نستنتج أن $y = -1$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $-\infty$.
 لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ ، ومنه نستنتج أن $y = 3$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

④ تبين أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x) + f(x) = 2$

$$f(-x) = \frac{3e^{-x}-1}{e^{-x}+1} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{3-e^x}{1+e^x} \quad \text{أولا نحسب } f(-x) :$$

بالتعويض نجد :

$$f(-x) + f(x) = \frac{3-e^x}{1+e^x} + \frac{3e^x-1}{e^x+1} = \frac{3-e^x+3e^x-1}{e^x+1} = \frac{2e^x+2}{e^x+1} = \frac{2(e^x+1)}{e^x+1} = 2$$

تفسير النتيجة هندسيا .

لدينا من جهة : $f(-x) + f(x) = 2$

ومن جهة أخرى : $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 2\alpha = 0 \\ 2\beta = 2 \end{cases} \text{ بالمطابقة نجد :}$$

ومنه نستنتج أن النقطة $w(0; 1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

⑤ تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه يساوي 1 ، يطلب كتابة معادلة له .

للبحث عن x_0 نحل المعادلة $f'(x_0) = 1$ ، ومنه $\frac{4e^{x_0}}{(e^{x_0}+1)^2} = 1$ أي $4e^{x_0} = (e^{x_0}+1)^2$
 أي $4e^{x_0} = e^{2x_0} + 2e^{x_0} + 1$ أي $e^{2x_0} - 2e^{x_0} + 1 = 0$ أي $(e^{x_0} - 1)^2 = 0$ ومنه $e^{x_0} - 1 = 0$.
 ومنه $e^{x_0} = 1$ ، ومنه $e^{x_0} = e^0$ ، ومنه $x_0 = 0$.

وبالتالي (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$(T): y = x + 1$$

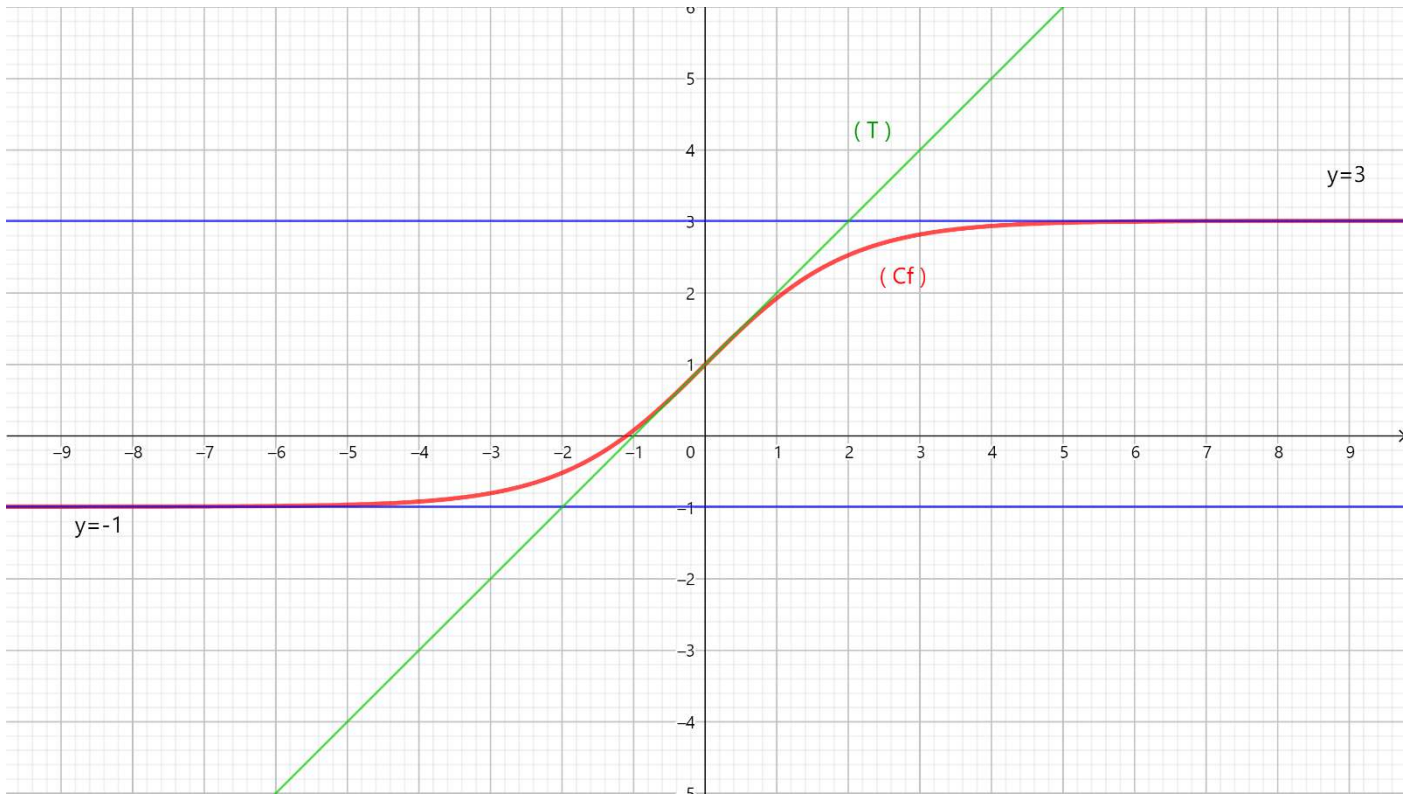
⑥ تعيين إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل .

لإيجاد نقاط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل نحل المعادلة : $f(x) = 0$.

$$\frac{3e^x-1}{e^x+1} = 0 \text{ ، معناه } 3e^x - 1 = 0 \text{ ، ومنه } 3e^x = 1 \text{ ، ومنه } e^x = \frac{1}{3} \text{ ، ومنه } x = \ln \frac{1}{3} .$$

إذن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $B(\ln \frac{1}{3}; 0)$.

إنشاء كلا من المنحنى (C_f) و المماس (T) .



7 ناقش بياناً ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(3 - m)e^x = m + 1$

$$(3 - m)e^x = m + 1$$

$$3e^x - me^x = m + 1$$

تكافئ

$$3e^x - 1 = m + me^x$$

تكافئ

$$3e^x - 1 = m(1 + e^x)$$

تكافئ

$$\frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = m$$

تكافئ

$$f(x) = m$$

تكافئ

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = m$

❖ $m \in]-\infty; -1]$ المعادلة لا تقبل حلول .

❖ $m \in]-1; 1[$ للمعادلة حلا وحيدا سالبا .

❖ $m = 1$ للمعادلة حلا وحيدا معدوما .

❖ $m \in]1; 3[$ للمعادلة حلا وحيدا موجبا .

❖ $m \in [3; +\infty[$ المعادلة لا تقبل حلول .



I- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (2 - x)e^x - 1$.

① عين نهايتي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

③ أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين α و β بحيث $-1,2 < \alpha < -1,1$ و $1,8 < \beta < 1,9$.
ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

① أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

② أ/ بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$.

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

③ بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$.

④ عين حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

⑤ ارسم (C_f) .

حل تمرين 02

① تعيين نهايتي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(2 - x)e^x - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2e^x - xe^x - 1] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2 - x)e^x - 1] = -\infty$$

② دراسة اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي:

$$g'(x) = -1 \times e^x + e^x(2 - x) = e^x(-1 + 2 - x) = (-x + 1)e^x$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا: $e^x > 0$ ومنه إشارة المشتق من إشارة $(-x + 1)$

$g'(x) = 0$ معناه $-x + 1 = 0$ ، ومنه $x = 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[1; +\infty[$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	-1	$e - 1$	$-\infty$

3 أ/ تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين α و β بحيث $-1,2 < \alpha < -1,1$ و $1,8 < \beta < 1,9$

❖ الدالة g مستمرة ومتزايدة على المجال $[-1,2; -1,1]$ ولدينا :

$$g(-1,2) \times g(-1,1) < 0 \text{ ومنه } \begin{cases} g(-1,2) = -0,036 \\ g(-1,1) = 0,03 \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,2 < \alpha < -1,1$

❖ الدالة g مستمرة ومتناقصة على المجال $[1,8; 1,9]$ ولدينا :

$$g(1,8) \times g(1,9) < 0 \text{ ومنه } \begin{cases} g(1,8) = 0,2 \\ g(1,9) = -0,3 \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $1,8 < \beta < 1,9$

ومنه نستنتج أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين بالضبط α و β .

3 إستنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
$g(x)$	-	0	0	-

1 حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x - 1}{e^x - x} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x(1 - \frac{1}{e^x})}{e^x(1 - \frac{x}{e^x})} \right] = 1$$

2 أ/ تبين أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} \\ &= \frac{-xe^x + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{(-x + 2)e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا $(e^x - x)^2 > 0$ ومنه إشارة المشتق من إشارة $g(x)$ ومنه الدالة f

متزايدة تماما على المجال $[\alpha; \beta]$ و متناقصة تماما على المجالين $]-\infty; \alpha]$ و $[\beta; +\infty[$.

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	0	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$f(\beta)$	1

3 تبين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$.

لدينا : $g(\alpha) = 0$ يكافئ : $(2 - \alpha)e^\alpha - 1 = 0$ ، ومنه (1) $e^\alpha = \frac{1}{2 - \alpha}$

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha - \alpha} \text{ (2)}$$

ولدينا:

بتعويض (1) في (2) نجد : $f(\alpha) = \frac{\frac{1}{2-\alpha}-1}{\frac{1}{2-\alpha}-\alpha} = \frac{\frac{1-2+\alpha}{2-\alpha}}{\frac{1-2\alpha+\alpha^2}{2-\alpha}} = \frac{\alpha-1}{\alpha^2-2\alpha+1} = \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2} = \frac{1}{\alpha-1}$

معلومة: $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2$

4 تعيين حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

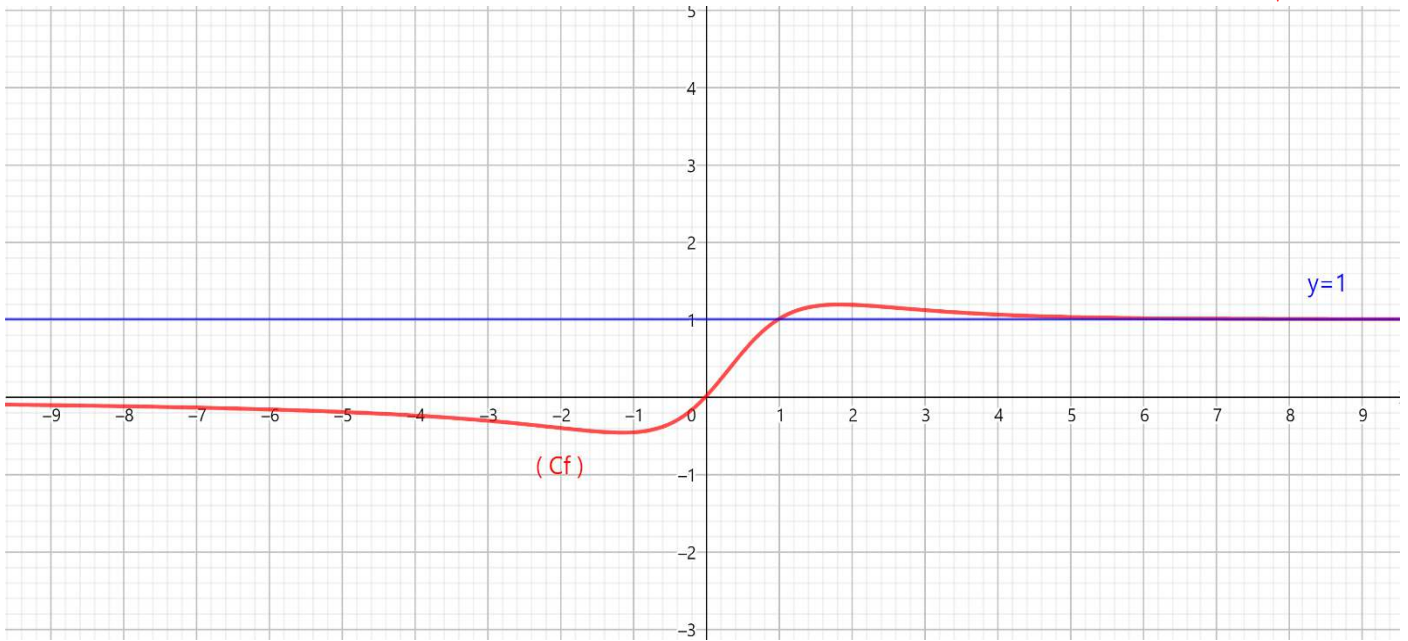
لدينا : $-1,2 < \alpha < -1,1$ ، ومنه : $-2,2 < \alpha - 1 < -2,1$

ومنه : $-\frac{1}{2,1} < \frac{1}{\alpha-1} < -\frac{1}{2,2}$ ، ومنه : $-0,48 < f(\alpha) < -0,45$

لدينا : $1,8 < \beta < 1,9$ ، ومنه : $0,8 < \beta - 1 < 0,9$

ومنه : $\frac{1}{0,9} < \frac{1}{\beta-1} < \frac{1}{0,8}$ ، ومنه : $1,11 < f(\beta) < 1,25$

5 ارسم (C_f)



التمرين 03

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{2}{e^{x+1}}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أحسب $f(x) + f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ثم استنتج أن النقطة $\omega(0; 1)$ مركز تناظر لـ (C_f) .

2 أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3 أ/ بين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب/ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

4 بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-1,7 < \alpha < -1,6$

5 من أجل أي قيمة للعدد الحقيقي k يكون العدد $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x) = k$.

6 ارسم (C_f) ومستقيمه المقاربين .

① حساب $f(x) + f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ثم استنتج أن النقطة $\omega(0; 1)$ مركز تناظر لـ (C_f)

أولا نحسب $f(-x)$: $f(-x) = -x + \frac{2}{e^{-x}+1} \times \frac{e^x}{e^x} = -x + \frac{2e^x}{1+e^x}$
 بالتعويض نجد :

$$f(x) + f(-x) = x + \frac{2}{e^x+1} - x + \frac{2e^x}{1+e^x} = \frac{2+2e^x}{1+e^x} = \frac{2(1+e^x)}{1+e^x} = 2$$

$$f(-x) + f(x) = 2$$

لدينا من جهة :

$$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$$

ومن جهة أخرى :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \text{ ، } \begin{cases} 2\alpha = 0 \\ 2\beta = 2 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

بالمطابقة نجد :

ومنه نستنتج أن النقطة $\omega(0; 1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

② أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + \frac{2}{e^x+1} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \frac{2}{e^x+1} \right] = +\infty$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = 1 + \frac{0(e^x+1) - e^x \times 2}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{1(e^x+1)^2 - 2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$\frac{e^{2x} + 1 + 2e^x - 2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x+1)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{2x} + 1 > 0$ و $(e^x+1)^2 > 0$ ومنه $f'(x) > 0$.
 إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

③ أ/ تبين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{e^x+1} \right] = 0$$

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+2)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + \frac{2}{e^x+1} - x - 2 \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{e^x+1} - 2 \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2 - 2(e^x+1)}{e^x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2 - 2e^x - 2}{e^x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-2e^x}{e^x+1} \right] = 0$$

ومنه المستقيم $y = x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

4 تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-1,7 < \alpha < -1,6$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-1,7; -1,6]$ ولدينا :

$$f(-1,7) \times f(-1,6) < 0 \text{ ، ومنه } \begin{cases} f(-1,7) = -0,008 \\ f(-1,6) = 0,064 \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-1,7 < \alpha < -1,6$

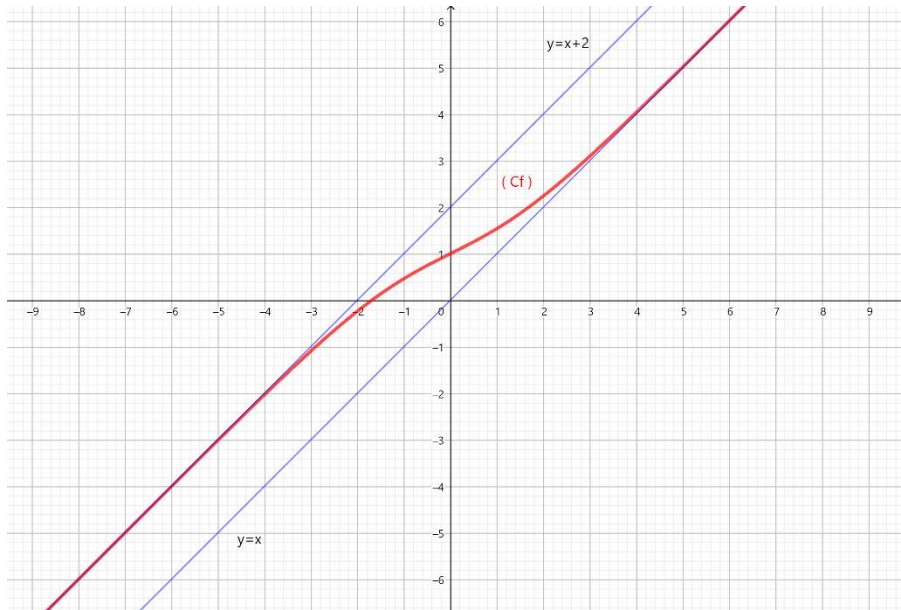
5 من أجل أي قيمة للعدد الحقيقي k يكون العدد $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x) = k$.

لدينا : العدد $-\alpha$ حل للمعادلة $f(x) = k$ معناه $f(-\alpha) = k$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x) + f(x) = 2$ وخاصة $f(-\alpha) + f(\alpha) = 2$

وبما أن $f(\alpha) = 0$ فإن $f(-\alpha) = 2$ ، إذن العدد $-\alpha$ حل للمعادلة $f(x) = 2$ وعليه $k = 2$

6 رسم (C_f) ومستقيمي المقاربين



04

تمرين

I- في الشكل المقابل (C_g) هو المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (ax + b)e^x + c$

1 بقراءة بيانية :

أ/ عين $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ، ثم إستنتج قيمة c

ب/ عين نهاية الدالة g عند $+\infty$

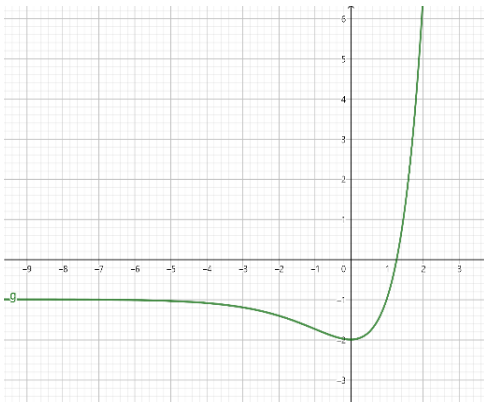
ج/ عين كلا من : $g(0)$ و $g'(0)$ ثم استنتج قيمتي a و b

2 نفرض فيما يلي : $g(x) = (x - 1)e^x - 1$.

أ/ شكل جدول تغيرات الدالة g .

ب/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,2 < \alpha < 1,3$.

ج/ إستنتج إشارة $g(x)$.



- II- f هي الدالة المعرفة على المجال على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x}{e^x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1 أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم حدد معادلة المستقيم المقارب بجوار $+\infty$.
 - 2 بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .
 - 3 أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
 - 4 بين $f(\alpha) = \alpha - 1$ ، ثم إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.
 - 5 أنشئ المنحنى (C_f) .
 - 6 ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$.
 - 7 نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = f(|x|)$.
أ/ بين أن h دالة زوجية.
ب/ أرسم المنحنى البياني للدالة h إعتمادا على (C_f) في نفس المعلم السابق.

حل تمرين 04

- 1 براءة بيانية: أ/ عين $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ، ثم إستنتج قيمة c .

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$

نعلم أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x] = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (axe^x + be^x + c) = c$

إذن نستنتج أن $c = -1$

ب/ تعيين نهاية الدالة g عند $+\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

ج / تعيين كلا من: $g(0)$ و $g'(0)$ لدينا: $g(0) = -2$ ، و $g'(0) = 0$ (قيمة حدية)

استنتاج قيمتي كل من a و b .

لدينا: $g(0) = -2$ ، ومنه بالتعويض $(a(0) + b)e^0 - 1 = -2$ أي $b - 1 = -2$ أي $b = -1$

نحسب $g'(x)$: $g'(x) = ae^x + e^x(ax + b)$ أي $g'(x) = (a + ax + b)e^x$

لدينا: $g'(0) = 0$ ، ومنه $(a + a(0) - 1)e^0 = 0$ أي $a - 1 = 0$ أي $a = 1$

إذن: $g(x) = (x - 1)e^x - 1$

- 2 أ/ شكل جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	-1	-2	$+\infty$

ب/ تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,2 < \alpha < 1,3$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[1,2; 1,3]$ ولدينا:

$$g(1,2) \times g(1,3) < 0 \text{ ، ومنه } \begin{cases} g(1,2) = -0,3 \\ g(1,3) = 0,1 \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $1,2 < \alpha < 1,3$

ج / إستنتاج إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$\circ$	$+$

① حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم حدد معادلة المستقيم المقارب بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{x \left(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \right)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} \right] = 0$$

ومنه نستنتج أن $y = 0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

② تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x - xe^x - x}{e^x + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-xe^x}{e^x + 1} \right] = 0$$

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) : ندرس إشارة الفرق : $f(x) - x = \frac{x}{e^x + 1} - x = \frac{-xe^x}{e^x + 1}$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x + 1 > 0$ و $e^x > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - x$	$+$	$\circ$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $(0; 0)$	(C_f) تحت (Δ)

③ دراسة إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

$$f'(x) = \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(1 - x) + 1}{(e^x + 1)^2} = \frac{-[e^x(x - 1) - 1]}{(e^x + 1)^2} = \frac{-g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $(e^x + 1)^2 > 0$ ومنه إشارة المشتق من إشارة $-g(x)$.

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$ و متناقصة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

④ تبين $f(\alpha) = \alpha - 1$

لدينا : $g(\alpha) = 0$ يكافئ : $(\alpha - 1)e^\alpha - 1 = 0$ أي (1) $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$

ولدينا :

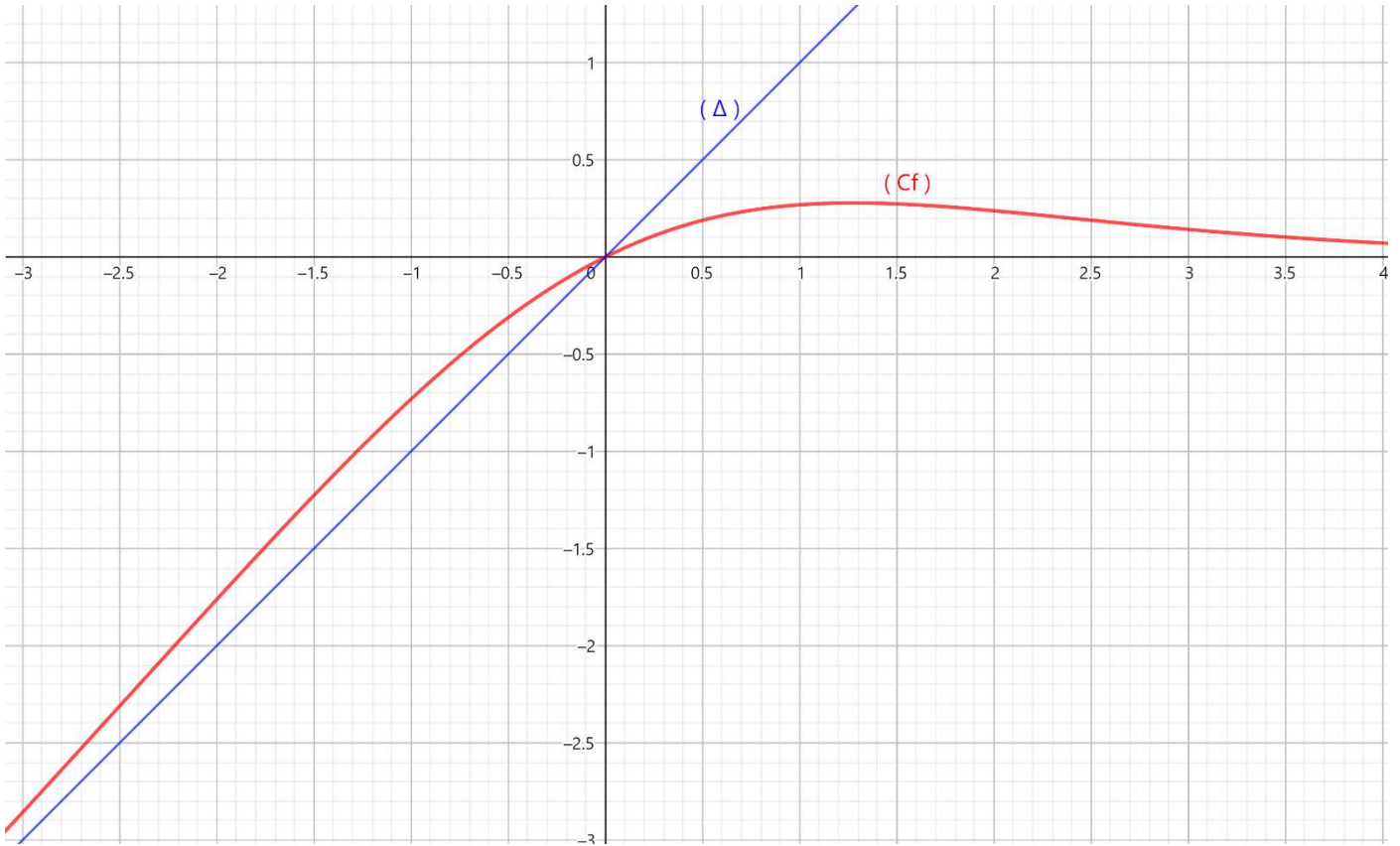
$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^{\alpha+1}} \dots \dots \dots (2)$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1} = \frac{\alpha}{\frac{1+\alpha-1}{\alpha-1}} = \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \alpha \times \frac{\alpha-1}{\alpha} = \alpha - 1$$
 بتعويض (1) في (2) نجد :

إستنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$

لدينا : $1,2 < \alpha < 1,3$ ، ومنه : $0,2 < \alpha - 1 < 0,3$ ، ومنه $0,2 < f(\alpha) < 0,3$

5 إنشاء المنحنى (C_f)



6 ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = f(m)$

المناقشة	قيم m	قيم $f(m)$
المعادلة تقبل حلا وحيدا	$m \in]-\infty; 0]$	$f(m) \in]-\infty; 0]$
المعادلة تقبل حلان متميزان	$m \in]0; \alpha[\cup]\alpha; +\infty[$	$f(m) \in]0; f(\alpha)[$
المعادلة تقبل حلا واحدا	$m = \alpha$	$f(m) = f(\alpha)$

7 نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = f(|x|)$.

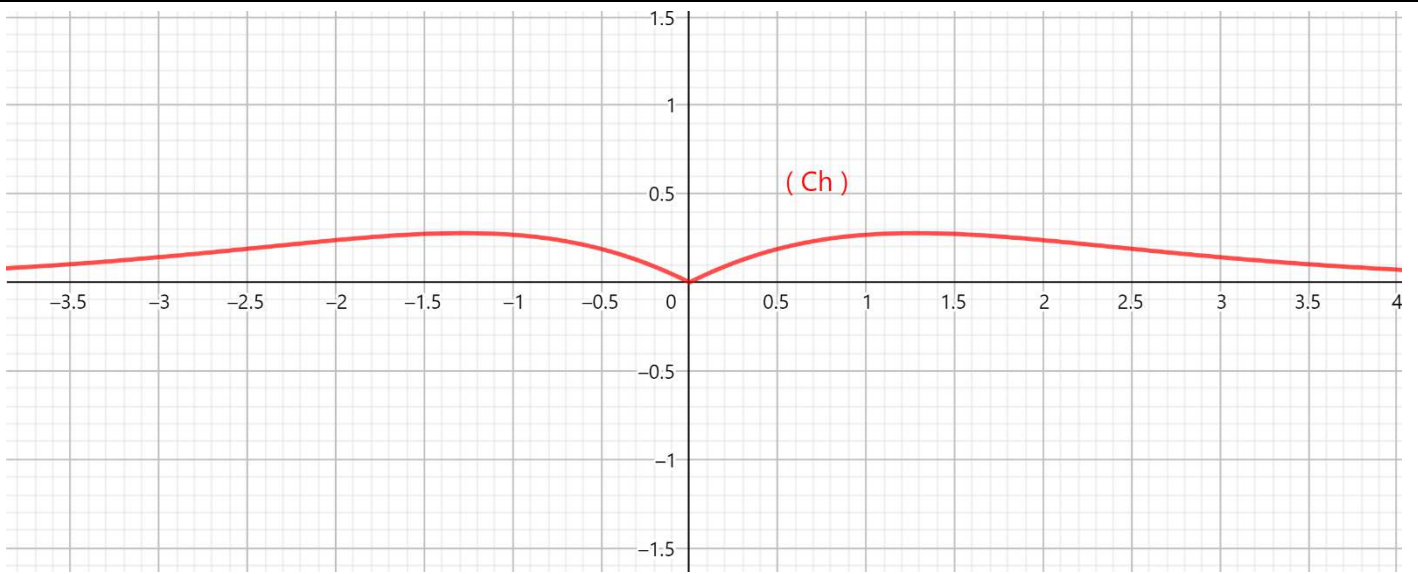
أ/ بين أن h دالة زوجية . لدينا $x \in D_h$ و $-x \in D_h$

ولدينا : $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$ لأن $|-x| = |x|$

ومنه h دالة زوجية

ب/ أرسم (C_h) المنحنى البياني للدالة h اعتمادا على (C_f) في نفس المعلم السابق .

لما يكون $x \geq 0$ فإن (C_h) ينطبق على (C_f) ، وبما أن h زوجية نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب

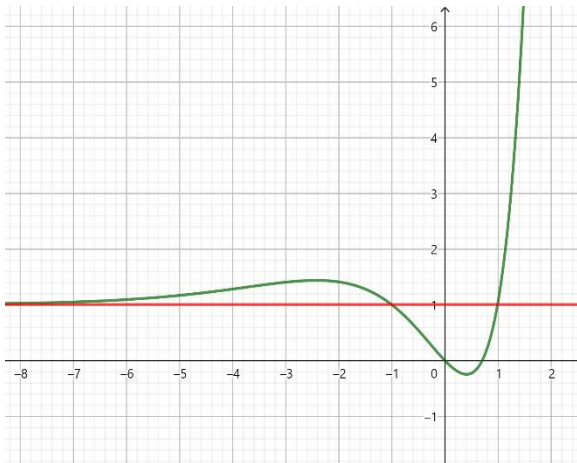


التمرين 05

I- لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x^2 - 1)e^x + 1$ ، (C_g) تمثيلها البياني في $(O; \vec{i}, \vec{j})$ يعطى جدول القيم التالي :

x	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8
$g(x)$	-0.17	-0.11	-0.03	0.07	0.2

- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α يطلب تعيين حصرا له .
- إستنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$.



II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + (x - 1)^2 e^x$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- أ/ أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
- ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = g(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها
- تحقق من أن: $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1}$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.
- أ/ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1; 1)$.
- ب/ بين أن المماس (T) هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (T)
- ج / بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) في نقطة يطلب تعيين فاصلتها ، ثم أكتب معادلة لـ (T')
- أرسم كلا من (T) ، (T') و (C_f) .
- عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $(E): (x - 1)^2 e^x - m - 1 = 0$ ثلاثة حلول .

1 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجموعة $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α يطلب تعيين حصرا له .

لدينا : $g(0) = (0^2 - 1)e^0 + 1 = -1 + 1 = 0$ ، ومنه 0 حل للمعادلة $g(x) = 0$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0.7; 0.75]$ ولدينا :

$$g(0,7) \times g(0,75) < 0 \text{ ، ومنه } \begin{cases} g(0,7) = -003 \\ g(0,75) = 0,07 \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $0,7 < \alpha < 0,75$.

ومنه نستنتج أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $0,7 < \alpha < 0,75$.

2 إستنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$		+	-	+

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + (x - 1)^2 e^x$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أ/ أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + x^2 e^x + e^x - 2x e^x] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + (x - 1)^2 e^x] = +\infty$$

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = g(x)$.

$$f'(x) = 1 + 2(x - 1)e^x + e^x(x - 1)^2 = 1 + e^x(2x - 2 + x^2 + 1 - 2x)$$

$$f'(x) = 1 + e^x(x^2 - 1) = g(x)$$

إستنتج إتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها .

الدالة f متزايدة تماما على المجالين $[-\infty, 0]$ و $[\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[0; \alpha]$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	$-\infty$	1	$f(\alpha)$	$+\infty$

2 تحقق من أن : $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1}$

لدينا : (1) $f(\alpha) = \alpha + (\alpha - 1)^2 e^\alpha$

لدينا $g(\alpha) = 0$ ، ومنه $(\alpha^2 - 1)e^\alpha + 1 = 0$ ، ومنه (2) $e^\alpha = \frac{-1}{\alpha^2 - 1}$

بتعويض (2) في (1) نجد : $f(\alpha) = \alpha + (\alpha - 1)^2 \left(\frac{-1}{\alpha^2 - 1} \right) = \alpha - \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha^2 - 1} = \alpha - \frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} =$

$$= \alpha - \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \frac{\alpha^2 + \alpha - \alpha + 1}{\alpha + 1} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1}$$

وهو المطلوب

عين حصراً لـ $f(\alpha)$.

لدينا : $0,7 < \alpha < 0,75$ ومنه $1,7 < \alpha + 1 < 1,75$ ، أي (1) $\frac{1}{1,75} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{1,7} \dots \dots$
لدينا : $0,7 < \alpha < 0,75$ ومنه $0,7^2 < \alpha^2 < 0,75^2$ ، أي (2) $0,7^2 + 1 < \alpha^2 + 1 < 0,75^2 + 1 \dots$

بضرب (1) في (2) نجد $\frac{0,7^2+1}{1,75} < \frac{\alpha^2+1}{\alpha+1} < \frac{0,75^2+1}{1,7}$ ، ومنه $0,85 < f(\alpha) < 0,92$

3 أ/ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1; 1)$.

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$(T): y = 1(x - 1) + 1$$

$$(T): y = x$$

ب/ بين أن المماس (T) هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x - 1)^2 e^x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^2 e^x + e^x - 2x e^x] = 0$$

ومنه المماس (T) هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (T) : ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - x = x + (x - 1)^2 e^x - x = (x - 1)^2 e^x$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	+
الوضع النسبي	(C_f) فوق (T)	(C_f) يمس A(1; 1) في (T)	(C_f) فوق (T)

ج / بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماساً (T') يوازي (T) في نقطة يطلب تعيين فاصلتها

لدينا مماساً (T') يوازي (T) معناها أن لهما نفس معامل التوجيه، أي أن $f'(x_0) = 1$ ، أي أن $g(x_0) = 1$

$$1 + e^{x_0}(x_0^2 - 1) = 1 \text{ ، أي أن } e^{x_0}(x_0^2 - 1) = 0 \text{ ، أي } x_0^2 - 1 = 0 \text{ ، أي أن } x_0^2 = 1$$

$$\text{ومنه إما } x_0 = 1 \text{ أو } x_0 = -1$$

إذن المنحنى (C_f) يقبل مماساً (T') يوازي (T) في النقطة B ذات الفاصلة -1 .

كتابة معادلة المماس (T') .

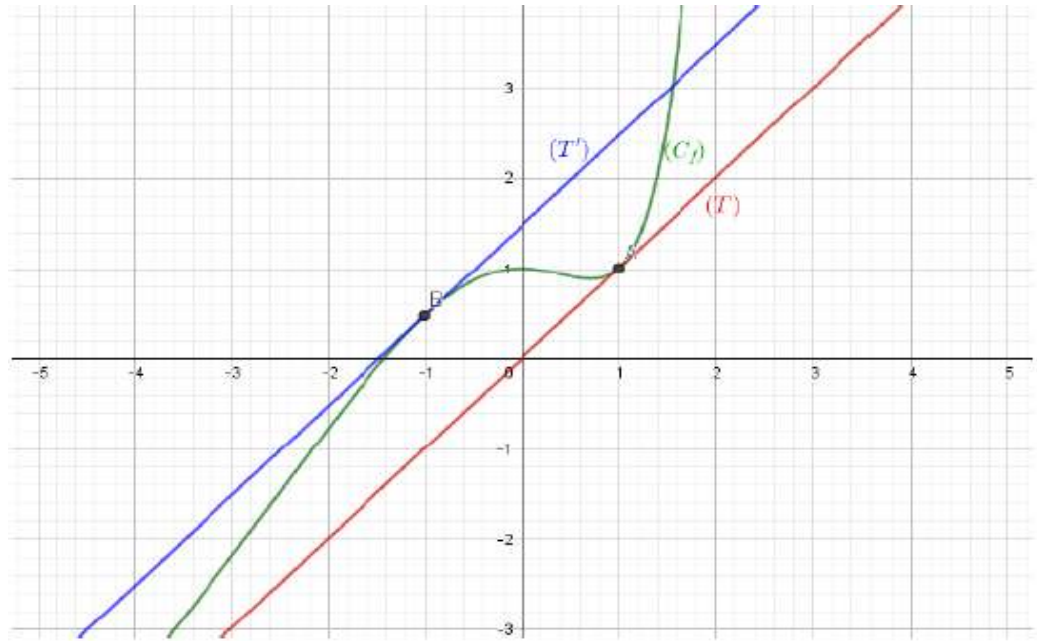
$$(T'): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$(T'): y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$$

$$(T'): y = 1(x + 1) - 1 + 4e^{-1}$$

$$(T)': y = x + 4e^{-1}$$

4 أرسم كلا من (T) ، (T') و (C_f)



5 عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $(x-1)^2 e^x - m - 1 = 0$ ثلاثة حلول (E)

لدينا : $(x-1)^2 e^x - m - 1 = 0$ ، تكافئ : $(x-1)^2 e^x = m + 1$

تكافئ : $x + (x-1)^2 e^x = x + m + 1$ ، تكافئ : $f(x) = x + m + 1$

ومنه حلول المعادلة (E) بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x + m + 1$

$m + 1 \in]0; 4e^{-1}[$ ، ومنه $m \in]-1; -1 + 4e^{-1}[$



التمرين 06

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x + 2 - e^x$.

1 أدرس إتجاه تغير الدالة g على $[0; +\infty[$ ، وعين نهاية g عند $+\infty$.

2 أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $[0; +\infty[$.

ب/ تحقق أن : $1,14 < \alpha < 1,15$ ، ثم إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $[0; +\infty[$.

II- نعرف على المجال $[0; +\infty[$ الدالة f بـ : $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ ، وليكن (C_f) منحناها البياني في م م م .

1 أ/ بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.

ب/ إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2 أ/ بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.

ب/ إستنتج إتجاه تغير الدالة f على $[0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3 بين أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4 أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

5 أ/ تحقق أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$ ، حيث : $u(x) = e^x - xe^x - 1$

ب/ أدرس إتجاه تغير الدالة u على $[0; +\infty[$ ، ثم إستنتج إشارة $u(x)$

ج/ إستنتج من الأسئلة السابقة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T)

6 أرسم كلا من (T) والمنحنى (C_f) ، الوحدة (4 cm)

حل تمرين 06

1 دراسة إتجاه تغير الدالة g على $[0; +\infty[$ ، وعين نهاية g عند $+\infty$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هيا : $g'(x) = 1 - e^x$.

لدينا $g'(x) \geq 0$ يكافئ $1 - e^x \geq 0$ يكافئ $-e^x \geq -1$ يكافئ $e^x \leq 1$ يكافئ $e^x \leq e^0$ يكافئ $x \leq 0$.

نلاحظ أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ فإن $g'(x) \leq 0$ ، ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(\frac{x}{e^x} - 1 \right) + 2 \right] = -\infty$$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	-
$g(x)$	1	$-\infty$

2 أ/ تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $[0; +\infty[$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$ ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ و $g(0) = 1$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $[0; +\infty[$

ب/ التحقق أن : $1,14 < \alpha < 1,15$.

لدينا $[0; +\infty[\supset]1,14; 1,15[$ ، إذن الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $[1,14; 1,15]$ ولدينا :

$g(1,15) = -0,008$ و $g(1,14) = 0,01$ ، أي أن $g(1,14) \times g(1,15) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم

المتوسطة فإن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1,14 < \alpha < 1,15$ يحقق $g(\alpha) = 0$.

إستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $[0; +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

II- نعرف على المجال $[0; +\infty[$ الدالة f بـ : $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ ، وليكن (C_f) منحناها البياني في م م م

1 أ/ تبين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.

$$\frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = f(x)$$

ب/ إستنتاج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

بوضع $t = -x$ ، لما $x \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow -\infty$ ومنه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} \right] = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{1 - e^t}{-t + e^t} \right] = 0$$

لأن $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} = 0$ و $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$

2 أ/ تبين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{e^x(xe^x + 1) - (e^x + xe^x)(e^x - 1)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{xe^{2x} + e^x - (e^{2x} - e^x + xe^{2x} - xe^x)}{(xe^x + 1)^2}$$

$$\frac{xe^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x - xe^{2x} + xe^x}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x - e^{2x} + e^x + xe^x}{(xe^x + 1)^2} = \frac{2e^x - e^{2x} + xe^x}{(xe^x + 1)^2}$$

$$\frac{e^x(2 - e^x + x)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

ب/ إستنتاج إتجاه تغير الدالة f على $[0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

من أجل كل عدد حقيقي x ، $(xe^x + 1)^2 > 0$ و $e^x > 0$ ومنه إشارة المشتق من إشارة $g(x)$ ومنه

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; \alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	0

3 تبين أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$

مما سبق لدينا : $g(\alpha) = 0$ يكفي : $\alpha + 2 - e^\alpha = 0$

$$e^\alpha = \alpha + 2 \dots \dots \dots (1)$$

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^{\alpha+1}} \dots \dots \dots (2)$$

ولدينا:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1} = \frac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1} = \frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2} = \frac{1}{\alpha+1}$$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = (\alpha + 1)^2$$

ب/ حصر العدد $f(\alpha)$.

$$1,14 < \alpha < 1,15$$

$$2,14 < \alpha + 1 < 2,15$$

$$\frac{1}{2,14} > \frac{1}{\alpha + 1} > \frac{1}{2,15}$$

$$0,467 > f(\alpha) > 0,465$$

$$0,465 < f(\alpha) < 0,467$$

4 أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$(T): y = x$$

5 أ / تحقق أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) - x = \frac{(x+1) \times u(x)}{xe^x + 1}$ ، حيث: $u(x) = e^x - xe^x - 1$

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x = \frac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x + 1}$$

طريقة 1

$$\frac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x + 1} = \frac{e^x(1 - x^2) - 1(1 + x)}{xe^x + 1} = \frac{e^x(1 - x)(1 + x) - 1(1 + x)}{xe^x + 1}$$

$$\frac{(1 + x)[e^x(1 - x) - 1]}{xe^x + 1} = \frac{(1 + x)[e^x - xe^x - 1]}{xe^x + 1} = \frac{(x + 1) \times u(x)}{xe^x + 1}$$

وهو المطلوب

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x + 1}$$

طريقة 2

يكفي أن نثبت أن $(x + 1)u(x) = e^x - 1 - x^2e^x - x$

$$(x + 1)u(x) = (x + 1)(e^x - xe^x - 1) = xe^x - x^2e^x - x + e^x - xe^x - 1$$

$$= e^x - 1 - x^2e^x - x$$

ب / دراسة إتجاه تغير الدالة u على $[0; +\infty[$.

الدالة u قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$u'(x) = e^x - 1e^x + e^x(-x) = -xe^x \leq 0$$

ومنه الدالة u متناقصة على $[0; +\infty[$.

$$u(0) = e^0 - 0e^0 - 1 = 0$$

x	0	$+\infty$
$u'(x)$	0	-
$u(x)$	0	

من جدول التغيرات نستنتج أنه من أجل كل $x \in [0; +\infty[$ فإن $u(x) \leq 0$

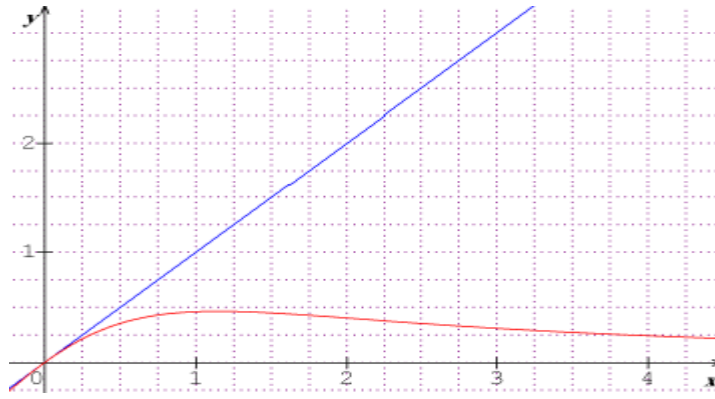
ج / إستنتج من الأسئلة السابقة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T)

$$f(x) - x = \frac{(x + 1) \times u(x)}{xe^x + 1}$$

من أجل كل $x \in [0; +\infty[$ فإن $xe^x + 1 > 0$ و $(x + 1) > 0$ ، ومنه إشارة الفرق من إشارة $u(x)$

x	0	$+\infty$
$f(x) - x$	0	-
الوضع النسبي	(T) يمس (C _f)	(C _f) يقع تحت (T)

6 أرسم كلا من (T) والمنحنى (C_f) ، الوحدة (4 cm)



التمرين 07

I- g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $g(x) = 4e^x - 2xe^x - 4$.

1 أدرس تغيرات الدالة g .

2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1,5; 1,6[$.

3 أحسب $g(0)$ واستنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$ ، (C_f) منحناها البياني في م م م م بحيث $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$

1 أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، فسر هندسيا النتائج المحصل عليها .

2 أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$.

ب/ أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها .

3 أ/ بين أن : $f(\alpha) = \frac{2-\alpha}{\alpha-1}$ ثم عين حصرا للعدد الحقيقي $f(\alpha)$.

ب/ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

ج/ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) الذي معادلته $y = -1$.

4 أرسم المماس (T) ، المستقيم (D) والمنحنى (C_f) .

5 نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = \frac{|2x-2|}{e^x-2x}$ ، نسمي (C_h) المنحنى الممثل لها .

أ/ اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

ب/ أرسم في معلم آخر المنحنى (C_h) موضحا كيفية الرسم .

6 عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m ، بحيث تقبل المعادلة $\left| \frac{2x-2}{e^x-2x} \right| = |m|$ ثلاث حلول متميزة .

حل تمرين 07

1 دراسة تغيرات الدالة g .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [4e^x - 2xe^x - 4] = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x(4 - 2x) - 4] = -\infty$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هيا :

$$g'(x) = 4e^x - 2e^x + e^x(-2x) = 2e^x(-x + 1)$$

بما أن $2e^x > 0$ فإن إشارة المشتق من إشارة $(-x + 1)$.

$$g'(x) = 0 \text{ معناه } -x + 1 = 0 \text{ أي } -x = -1 \text{ ، أي } x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-

ومنه g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 1]$ ، ومتناقصة تماما على المجال $[1; +\infty[$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	-4	$2e - 4$	∞

2 تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[1.5; 1.6]$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1.5; 1.6]$ ولدينا :

$$\begin{cases} g(1.5) = 0.48 \\ g(1.6) = -0.04 \end{cases} \text{ ، ومنه } g(1.5) \times g(1.6) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[1.5; 1.6]$

3 حساب $g(0)$ واستنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

$$g(0) = 4e^0 - 2(0)e^0 - 4 = 0$$

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+	-

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعارة: $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$ ، (C_f) منحناها البياني $\vec{i} = 2cm$

1 حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، فسر هندسيا النتائج المحصل عليها .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x(2 - \frac{2}{x})}{x(\frac{e^x}{x} - 2)} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2 - \frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x} - 2} \right] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x(2 - \frac{2}{x})}{x(\frac{e^x}{x} - 2)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 - \frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x} - 2} \right] = 0$$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ، ومنه نستنتج أن $y = -1$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ومنه نستنتج أن $y = 0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

2 أ/ تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هيا :

$$f'(x) = \frac{2(e^x - 2x) - (e^x - 2)(2x - 2)}{(e^x - 2x)^2} = \frac{2e^x - 4x - 2xe^x + 2e^x + 4x - 4}{(e^x - 2x)^2} = \frac{4e^x - 2xe^x - 4}{(e^x - 2x)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها .

من أجل كل عدد حقيقي x ، $(e^x - 2x)^2 > 0$ ، فإن إشارة المشتق من إشارة $g(x)$ ومنه f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ و $[\alpha; +\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $[0; \alpha]$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
$f(x)$	-1	-2	$f(\alpha)$	0

3 أ/ تبين أن : $f(\alpha) = \frac{2-\alpha}{\alpha-1}$.

لدينا : $f(\alpha) = \frac{2\alpha-2}{e^{\alpha-2\alpha}} \dots \dots \dots (1)$

ولدينا : $g(\alpha) = 0$ ، ومنه $4e^{\alpha} - 2\alpha e^{\alpha} - 4 = 0$ ، أي أن $e^{\alpha}(4 - 2\alpha) = 4$ ، ومنه :

$$e^{\alpha} = \frac{4}{4-2\alpha} = \frac{2}{2-\alpha} \dots \dots (2)$$

بتعويض (2) في (1) نجد :

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha-2}{\frac{2}{2-\alpha} - 2\alpha} = \frac{2\alpha-2}{\frac{2-4\alpha+2\alpha^2}{2-\alpha}} = \frac{2\alpha-2}{\frac{2\alpha^2-4\alpha+2}{2-\alpha}} = \frac{2(\alpha-1)}{\frac{2(\alpha^2-2\alpha+1)}{2-\alpha}} = \frac{\alpha-1}{\frac{\alpha^2-2\alpha+1}{2-\alpha}} = \frac{\alpha-1}{\frac{(\alpha-1)^2}{2-\alpha}}$$

$$(\alpha-1) \div \frac{(\alpha-1)^2}{2-\alpha} = (\alpha-1) \times \frac{2-\alpha}{(\alpha-1)^2} = \frac{2-\alpha}{\alpha-1}$$

وهو المطلوب

تعيين حصر العدد الحقيقي $f(\alpha)$.

لدينا : $1,5 < \alpha < 1,6$ ، ومنه $-1,6 < -\alpha < -1,5$ ، ومنه $(*) 0,4 < 2-\alpha < 0,5$.

لدينا : $1,5 < \alpha < 1,6$ ، ومنه $0,5 < \alpha-1 < 0,6$ ، ومنه $(**) \frac{1}{0,6} < \frac{1}{\alpha-1} < \frac{1}{0,5}$.

بضرب (*) في (**) طرفا لطرف نجد $\frac{0,4}{0,6} < \frac{2-\alpha}{\alpha-1} < \frac{0,5}{0,5}$ ، أي $0,66 < f(\alpha) < 1$.

ب/ تعيين معادلة مماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$(T): y = \frac{2}{e-2}(x-1)$$

ج / أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) الذي معادلته $y = -1$

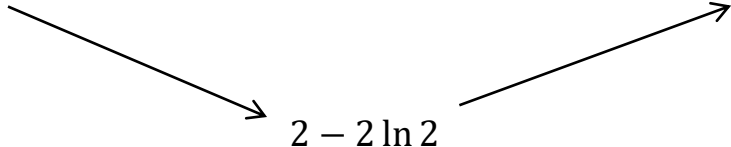
➤ ندرس إشارة الفرق :

$$f(x) + 1 = \frac{2x-2}{e^x-2x} + 1 = \frac{2x-2+e^x-2x}{e^x-2x} = \frac{e^x-2}{e^x-2x}$$

ندرس إشارة البسط : لدينا : $e^x - 2 \geq 0$ ، ومنه $e^x \geq 2$ ، ومنه $x \geq \ln 2$.

ندرس إشارة المقام :

الدالة t قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $t'(x) = e^x - 2$

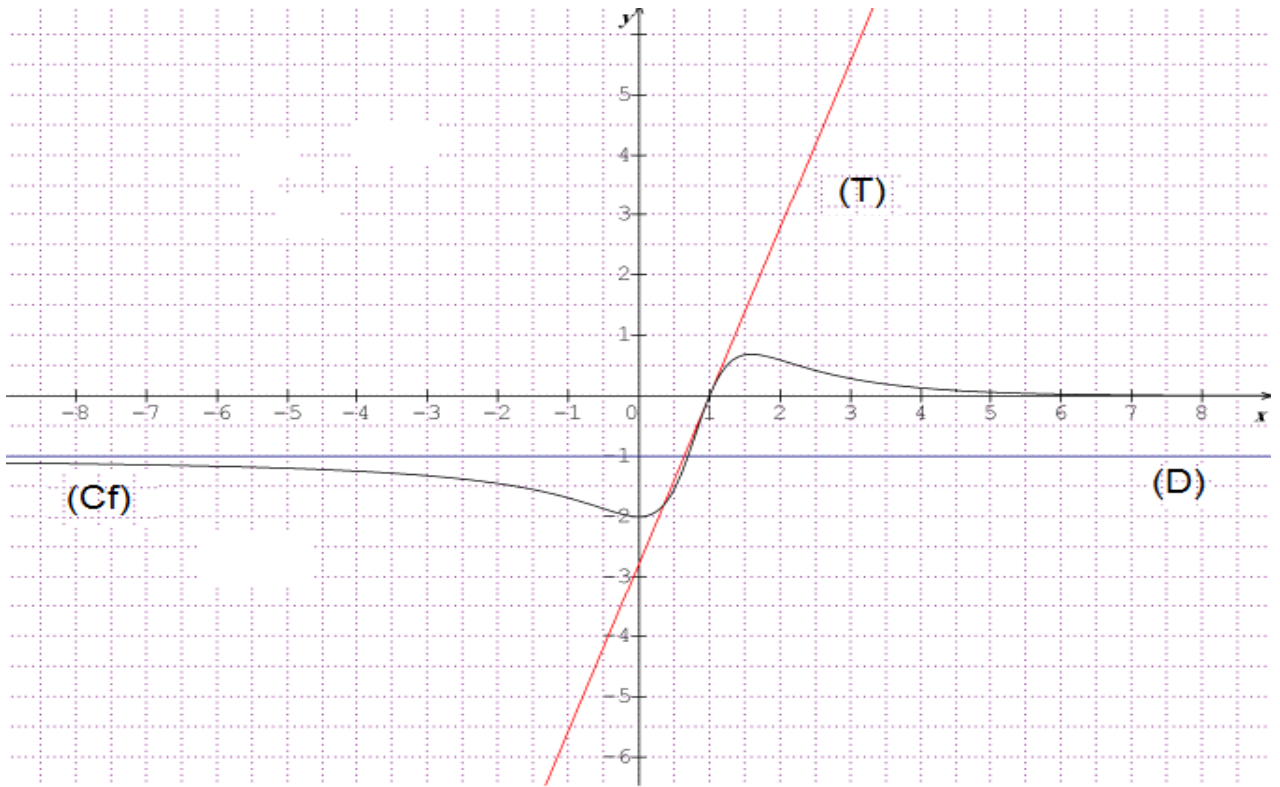
x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$t'(x)$	$-$	0	$+$
$t(x)$			

من جدول التغيرات نلاحظ $2 - 2 \ln 2$ هي قيمة حدية صغرى ومنه $t(x) \geq 2 - 2 \ln 2$

ومنه نستنتج أن $t(x) > 0$ ، ومنه نستنتج أن إشارة $f(x) + 1$ من إشارة البسط .

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f(x) + 1$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (D)	(C_f) يقطع في (D) $A(\ln 2 ; -1)$	(C_f) فوق (D)

4 أرسم المماس (T) ، المستقيم (D) والمنحنى (C_f)



5 نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = \frac{|2x-2|}{e^x-2x}$ ، نسمي (C_h) المنحنى الممثل لها .
أ/ كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

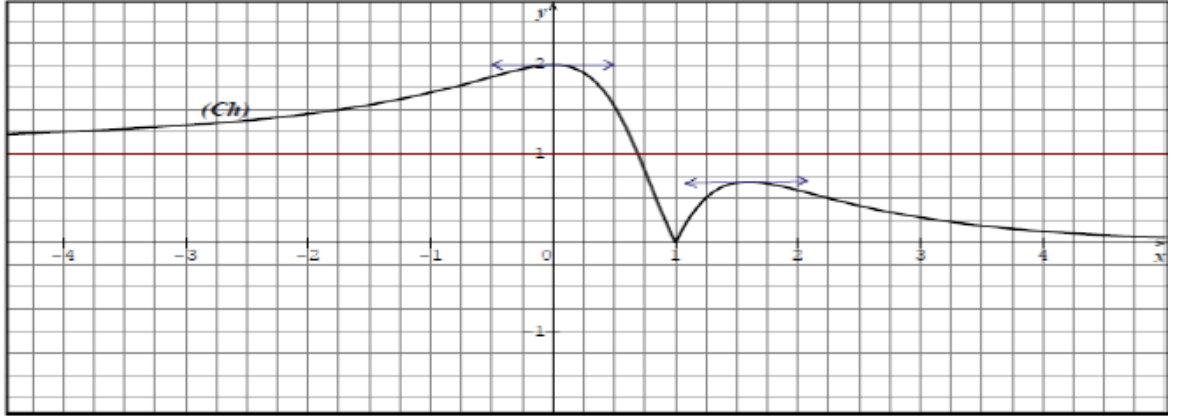
$$h(x) = \begin{cases} \frac{2x-2}{e^x-2x} = f(x) & ; 2x-2 \geq 0 \\ -\frac{2x-2}{e^x-2x} = -f(x) & ; 2x-2 \leq 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \geq 1 \\ -f(x) & ; x \leq 1 \end{cases}$$

ب/ أرسم في معلم آخر المنحنى (C_h) موضحا كيفية الرسم .

لما يكون : $x \geq 1$ فإن $h(x) = f(x)$ ، ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) .

لما يكون : $x \leq 1$ فإن $h(x) = -f(x)$ ، ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل .



6 عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m ، بحيث تقبل المعادلة $\left| \frac{2x-2}{e^x-2x} \right| = |m|$ ثلاث حلول متميزة .

من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $e^x - 2x > 0$ ، ومنه $h(x) = \left| \frac{2x-2}{e^x-2x} \right|$

ومنه $h(x) = |m|$ ، تكافئ $|m| = \left| \frac{2x-2}{e^x-2x} \right|$

ومنه بيانيا تقبل المعادلة : $\left| \frac{2x-2}{e^x-2x} \right| = |m|$ ثلاث حلول متميزة إذا وفقط إذا كان $0 < |m| < f(\alpha)$

ومنه $m \in]-f(\alpha); f(\alpha)[$



التمرين 08

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^{x+1}}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 / تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{1}{e^{-x+1}} = 1 - \frac{1}{e^{x+1}}$

ب/ استنتج أن الدالة f دالة فردية ، فسر هذه النتيجة بيانيا .

2 / أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب/ بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = 1 - \frac{x}{2}$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج / ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) الذي معادلته $y = 1 - \frac{x}{2}$.

3 / بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x-1}{e^{x+1}} \right)^2$ ، ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f .

ب/ استنتج أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$: $1 - \frac{2}{e^{x+1}} \leq \frac{1}{2}x$

4 / أثني المنحنى (C_f) .

5 / نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $h(x) = \frac{|x|}{2} + \frac{2}{e^{|x|+1}} - 1$ ، نسمي (C_h) المنحنى الممثل لها .

أ/ ادرس شفعية الدالة h .

ب/ اشرح كيفية رسم المنحنى (C_h) ، ثم أرسم (C_h) في المعلم السابق .

1 أ/ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{1}{e^{-x}+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1}$.

$$\frac{1}{e^{-x}+1} = \frac{1}{e^{-x}+1} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x+1-1}{1+e^x} = \frac{e^x+1}{1+e^x} + \frac{-1}{1+e^x} = 1 - \frac{1}{1+e^x}$$

وهو المطلوب

ب/ استنتج أن الدالة f دالة فردية .

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $-x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 1 - \frac{(-x)}{2} - \frac{2}{e^{-x}+1} = 1 + \frac{x}{2} - 2 \left(\frac{1}{e^{-x}+1} \right) = 1 + \frac{x}{2} - 2 \left(1 - \frac{1}{e^x+1} \right) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - 2 + \frac{2}{e^x+1} = -1 + \frac{x}{2} + \frac{2}{e^x+1} = - \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^x+1} \right) = -f(x) \end{aligned}$$

ومنه f دالة فردية .

تفسير هذه النتيجة بيانياً : بما أن f دالة فردية فإن مبدأ المعلم 0 مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

2 أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^x+1} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^x+1} \right] = -\infty$$

ب/ تبين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = 1 - \frac{x}{2}$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(1 - \frac{x}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{e^x+1} \right] = 0$$

ومنه المستقيم (D) الذي معادلته $y = 1 - \frac{x}{2}$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج / دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) الذي معادلته $y = 1 - \frac{x}{2}$.

$$f(x) - \left(1 - \frac{x}{2} \right) = -\frac{2}{e^x+1} < 0$$

ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم (D) .

3 أ/ تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x-1}{e^x+1} \right)^2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} - \frac{-2e^x}{(e^x+1)^2} = -\frac{1}{2} + \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{(e^x+1)^2 - 4e^x}{(e^x+1)^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{e^{2x} + 1 + 2e^x - 4e^x}{(e^x+1)^2} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x+1)^2} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x-1}{e^x+1} \right)^2 \end{aligned}$$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x) \leq 0$ ، ومنه f متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$.

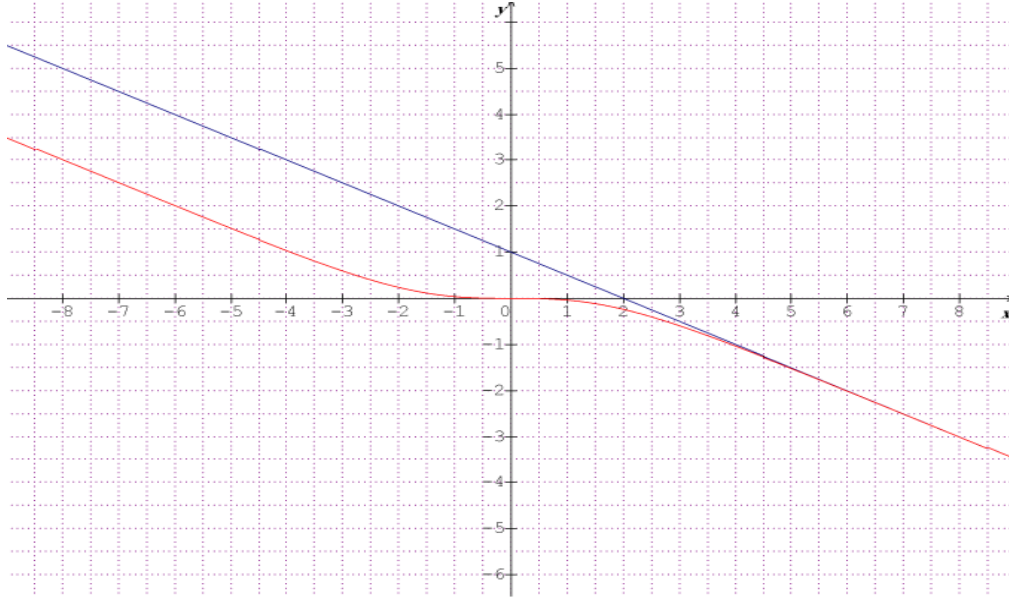
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$\emptyset$	
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

ملاحظة : يمكن للتلميذ أن يستنتج أن المبدأ 0 هو نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

ب/ استنتاج أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$: $1 - \frac{2}{e^{x+1}} \leq \frac{1}{2}x$.

من جدول التغيرات نستنتج أنه من أجل كل $x \in [0; +\infty[$ ، فإن $f(x) \leq 0$ وعليه $1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^{x+1}} \leq 0$ ومنه $1 - \frac{2}{e^{x+1}} \leq \frac{1}{2}x$ وهو المطلوب .

4 أنشئ المنحنى (C_f)



5 نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $h(x) = \frac{|x|}{2} + \frac{2}{e^{|x|}+1} - 1$ ، نسمي (C_h) المنحنى الممثل لها .
أ/ دراسة شفعية الدالة h .

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $-x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = \frac{|-x|}{2} + \frac{2}{e^{|-x|}+1} - 1 = \frac{|x|}{2} + \frac{2}{e^{|x|}+1} - 1 = h(x)$$

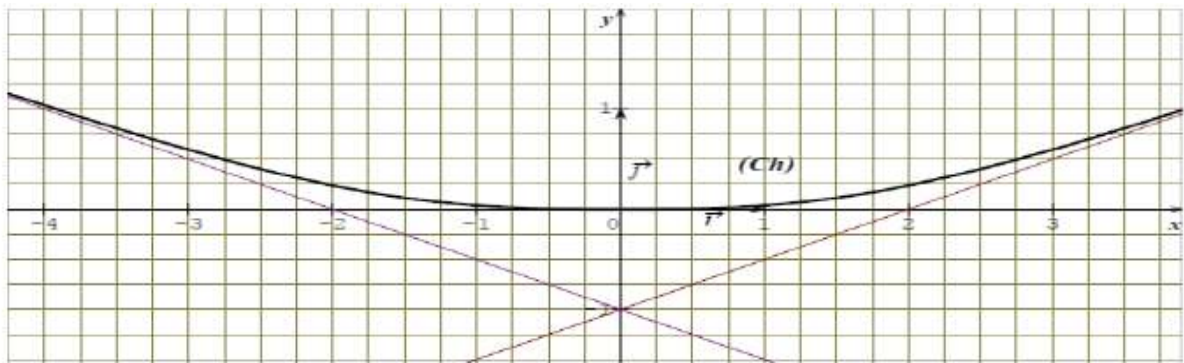
ومنه الدالة h دالة زوجية .

ب/ شرح كيفية رسم المنحنى (C_h) ، ثم أرسم (C_h) في المعلم السابق .

أولا نكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$h(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si : } x \geq 0 \\ -f(-x) & \text{si : } x \leq 0 \end{cases}$$

لما يكون $x \geq 0$ فإن (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل ، وبما أن h زوجية نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب



- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = x - \frac{2e^x}{e^x - 1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(-x) + f(x) = -2$ ، ثم فسر هذه النتيجة هندسيا .
 - 2 أحسب نهاية الدالة f عند الصفر ، ثم فسر النتيجة هندسيا .
 - 3 أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
ب/ بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 2$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
ج/ عين وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
د/ استنتج المستقيم المقارب (Δ') للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.
 - 4 أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها .
 - 5 أ/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}^*$ حلين α و β .
ثم تحقق أن : $2,23 < \alpha < 2,24$ و $-1,07 < \beta < -1,06$.
ب/ أرسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .
 - 6 h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = |f(x)|$. نسمي (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .
أ/ اشرح كيفية إنشاء (C_h) انطلاقا من المنحنى (C_f) ، ثم أنشئ (C_h) .
ب/ عين حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية :
$$h(x) = m^2 - 4m + 3$$

- 1 تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(-x) + f(x) = -2$.
نحسب أولا $f(-x)$:
$$f(-x) = -x - \frac{2e^{-x}}{e^{-x} - 1} \times \frac{e^x}{e^x} = -x - \frac{2}{1 - e^x} = -x + \frac{2}{e^x - 1}$$

بالتعويض نجد :
$$f(-x) + f(x) = -x + \frac{2}{e^x - 1} + x - \frac{2e^x}{e^x - 1} = \frac{2 - 2e^x}{e^x - 1} = \frac{-2(e^x - 1)}{e^x - 1} = -2$$

وهو المطلوب
تفسير هذه النتيجة هندسيا .
لدينا من جهة :
 $f(-x) + f(x) = -2$
ومن جهة أخرى :
 $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$
بالمطابقة نجد :
 $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -1 \end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases} 2\alpha = 0 \\ 2\beta = -2 \end{cases}$
ومنه نستنتج أن النقطة $w(0; -1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

② حساب نهاية الدالة f عند الصفر ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} (-2e^x) = -2$ ، و $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0^-$ ، و $\lim_{x \rightarrow 0} (x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} (-2e^x) = -2$ ، و $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0^+$ ، و $\lim_{x \rightarrow 0} (x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = 0$.

③ أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2e^x) = 0$ ، و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1$ ، و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{2e^x}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{2}{1 - \frac{1}{e^x}} \right] = +\infty$$

ب/ تبين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 2$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{2e^x}{e^x - 1} - x + 2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-2e^x}{e^x - 1} + 2 \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-2e^x + 2e^x - 2}{e^x - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-2}{e^x - 1} \right] = 0$$

ج/ تعيين وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - (x - 2) = \frac{-2}{e^x - 1}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$		$+$
$f(x) - (x - 2)$	$+$		$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

د/ استنتاج المستقيم المقارب (Δ') للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بما أن $f(x) = x - \frac{2e^x}{e^x - 1}$ ، و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{2e^x}{e^x - 1} \right] = 0$ ، فإن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته : $y = x$: (Δ') بجوار $-\infty$.

④ دراسة اتجاه تغير الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها .

الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x(e^x - 1) - e^x(2e^x)}{(e^x - 1)^2} = 1 - \frac{2e^{2x} - 2e^x - 2e^{2x}}{(e^x - 1)^2} = 1 + \frac{2e^x}{(e^x - 1)^2} > 0$$

من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$ ، $2e^x > 0$ ، $(e^x - 1)^2 > 0$ ومنه $f'(x) > 0$

ومنه f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

5 أ/ تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}^*$ حلين α و β .

❖ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $] -\infty; 0[$ ، ولدينا :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $] -\infty; 0[$.

❖ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $] 0; +\infty[$ ، ولدينا :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $] 0; +\infty[$.

التحقق أن: $2,23 < \alpha < 2,24$ و $-1,07 < \beta < -1,06$

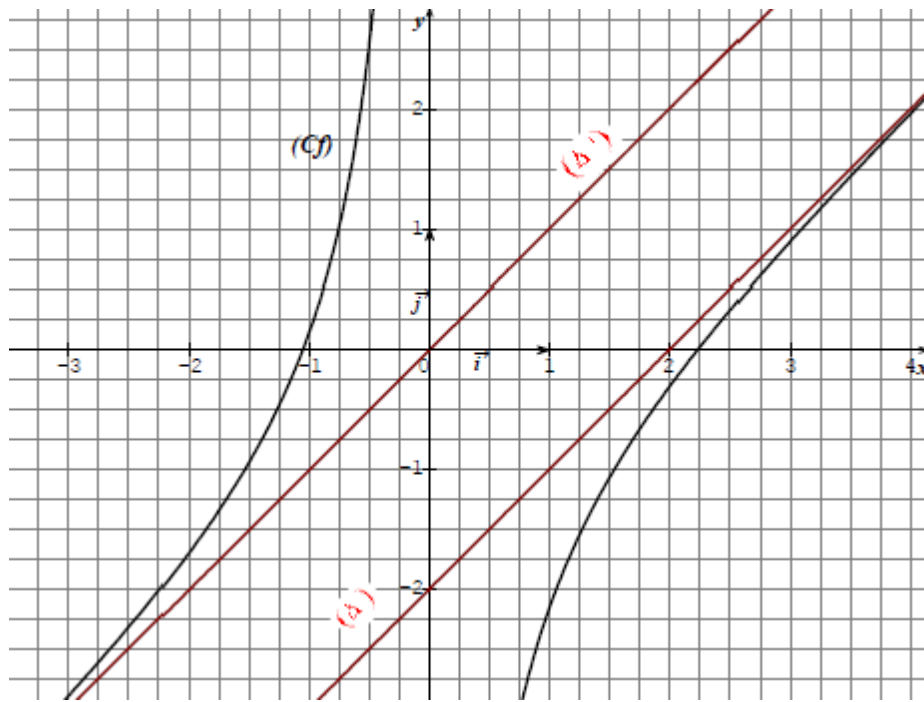
لدينا : $] 0; +\infty[\supset [2,23; 2,24]$ ومنه الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[2,23; 2,24]$

ولدينا : $\begin{cases} f(2,23) = -0,011 \\ f(2,24) = 1,716 \end{cases}$ إذن $f(2,23) < f(\alpha) < f(2,24)$ ومنه نستنتج أن $2,23 < \alpha < 2,24$

لدينا : $] -\infty; 0[\supset [-1,07; -1,06]$ ومنه الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-1,07; -1,06]$

لدينا : $\begin{cases} f(-1,07) = -0,02 \\ f(-1,06) = 0,0002 \end{cases}$ إذن $f(-1,07) < \beta < f(-1,06)$ ومنه نستنتج أن $-1,07 < \beta < -1,06$

ب/ أرسم (Δ) ، (Δ') و (C_f)



6 h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x) = |f(x)|$. نسمي (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ/ اشرح كيفية إنشاء (C_h) انطلاقا من المنحنى (C_f) ، ثم أنشئ (C_h) .

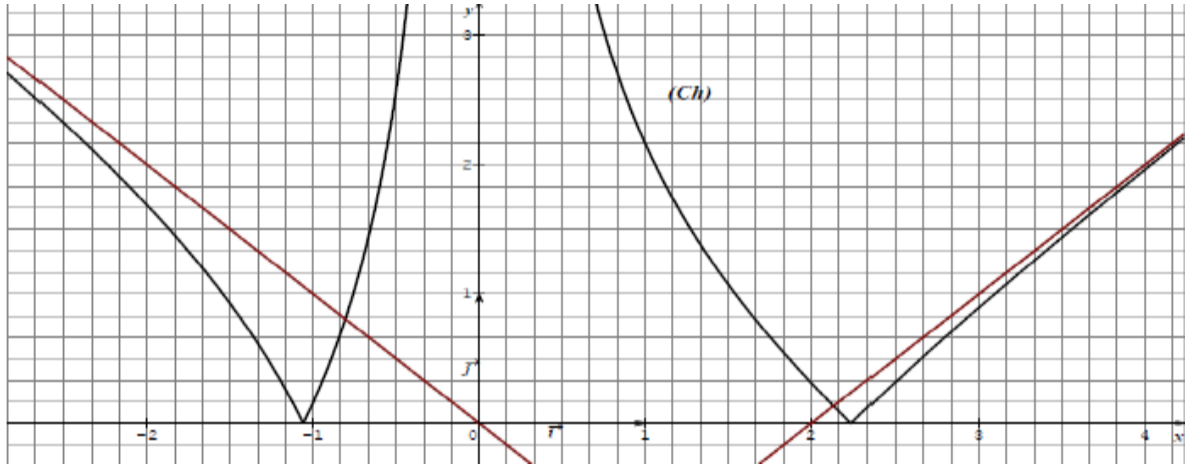
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

أولا يجب تحديد إشارة $f(x)$: من التمثيل البياني نجد

لما يكون $x \in [\beta; 0[\cup [\alpha; +\infty[$ فإن $f(x) \geq 0$ ، ولما يكون $x \in]-\infty; \beta] \cup]0; \alpha]$ فإن $f(x) \leq 0$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si : x \in [\beta; 0[\cup [\alpha; +\infty[\\ -f(x) & si : x \in]-\infty, \beta] \cup]0; \alpha] \end{cases}$$

لما يكون $x \in [\beta; 0[\cup [\alpha; +\infty[$ فإن $h(x) = f(x)$ ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) .
ولما يكون $x \in]-\infty, \beta] \cup]0; \alpha]$ فإن $h(x) = -f(x)$ ، ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل .



ب/ تعيين حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية :

$$h(x) = m^2 - 4m + 3$$

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع (C_h) مع المستقيم ذو المعادلة : $y = m^2 - 4m + 3$.
أولا ندرس إشارة العبارة $m^2 - 4m + 3$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$m^2 - 4m + 3$	+	0	0	+

المناقشة	قيم m	قيم $m^2 - 4m + 3$
المعادلة لا تقبل حلول .	$m \in]1; 3[$	$m^2 - 4m + 3 < 0$
المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .	$m \in \{1, 3\}$	$m^2 - 4m + 3 = 0$
تقبل حلان موجبان معا وحلان سالبان معا .	$]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$	$m^2 - 4m + 3 > 0$



التمرين 10

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = 2 + (x - 2)e^{-x+2}$.

① أدرس تغيرات الدالة g .

② بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,14 < \alpha < 1,15$.

③ إستنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$.

II- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x - 1 - (x - 1)e^{-x+2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $\vec{O}; \vec{i}, \vec{j}$.

① احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

② بين أن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

③ أ/ بين أن : $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha-2}$ ، ثم إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

ب/ بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

ج/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له .

د/ أحسب $f(0)$ و $f(2)$ ثم أنشئ (Δ) ، (T) و (C_f) .

④ ناقش بياننا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$$(E): 2m - 1 - (x - 1)e^{-x+2} = 0$$

حل تمرين 10

① دراسة تغيرات الدالة g .

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x+2}) = +\infty \end{array} \right. \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 + (x - 2)e^{-x+2}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{x - 2}{e^{x-2}} =$$

بوضع $x - 2 = t$ ، لما $x \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow +\infty$ ومنه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 + \frac{x - 2}{e^{x-2}} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[2 + \frac{t}{e^t} \right] = 2$$

$$\text{لأن } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{e^t} \right) = 0$$

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هيا :

$$g'(x) = 1(e^{-x+2}) - e^{-x+2}(x - 2) = e^{-x+2}(1 - x + 2) = (-x + 3)e^{-x+2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $e^{-x+2} > 0$ ، ومنه إشارة المشتق من إشارة $(-x + 3)$

$$g'(x) = 0 \text{ ، معناه } \begin{cases} e^{-x+2} \neq 0 \\ -x + 3 = 0 \end{cases} \text{ ، ومنه } x = 3$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$g'(x)$		+	-

ومنه g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 3]$ ومتناقصة تماما على المجال $[3; +\infty[$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	$-\infty$	$2 - e^{-1}$	2

② تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,14 < \alpha < 1,15$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1,14; 1,15]$ ولدينا :

$$g(1,14) \times g(1,15) < 0 \text{ ، ومنه } \begin{cases} g(1,14) = -0,03 \\ g(1,15) = 0,01 \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,14 < \alpha < 1,15$.

③ إستنتاج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x - 1 - (x - 1)e^{-x+2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

① حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1 - (x - 1)e^{-x+2})$$

هي حالة عدم تعيين : يمكن إزالتها بإستخراج $(x - 1)$ كعامل مشترك .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) \left[\frac{2x - 1}{x - 1} - e^{-x+2} \right] = +\infty$$

لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x+2}) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x} \right) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - (x - 1)e^{-x+2})$$

هي حالة عدم تعيين : إزالتها :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x - 1 - (x - 1)e^{-x+2}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x - 1 - \frac{x-1}{x-2} \times \frac{x-2}{e^{x-2}} \right] = +\infty$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{e^{x-2}} \right) = 0$ ، و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x-2} \right) = 1$

② تبين أن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

$$f'(x) = 2 - [1(e^{-x+2}) - e^{-x+2}(x - 1)] = 2 - [(1 - x + 1)e^{-x+2}]$$

$$= 2 - (-x + 2)e^{-x+2} = 2 + (x - 2)e^{-x+2} = g(x)$$

ومنه f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

③ أ/ تبين أن : $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha-2}$.

لدينا : $f(\alpha) = 2\alpha - 1 - (\alpha - 1)e^{-\alpha+2} \dots \dots \dots (1)$

لدينا : $g(\alpha) = 0$ ، ومنه $2 + (\alpha - 2)e^{-\alpha+2} = 0$ ومنه $e^{-\alpha+2} = -\frac{2}{\alpha-2} \dots \dots \dots (2)$

بتعويض (2) في (1) نجد :

$$f(\alpha) = 2\alpha - 1 - (\alpha - 1) \left(-\frac{2}{\alpha - 2} \right) = 2\alpha - 1 + \frac{2\alpha - 2}{\alpha - 2} = 2\alpha - 1 + \frac{2\alpha - 2 - 2 + 2}{\alpha - 2}$$

$$= 2\alpha - 1 + \frac{2\alpha - 4}{\alpha - 2} + \frac{2}{\alpha - 2} = 2\alpha - 1 + \frac{2(\alpha - 2)}{\alpha - 2} + \frac{2}{\alpha - 2} = 2\alpha - 1 + 2 + \frac{2}{\alpha - 2}$$

$$= 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha - 2}$$

وهو المطلوب .

إستنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$.

لدينا : $1,14 < \alpha < 1,15$ ، أي أن (*) $3,28 < 2\alpha + 1 < 3,30 \dots \dots$

لدينا : $1,14 < \alpha < 1,15$ ، أي أن $-0,86 < \alpha - 2 < -0,85$ ، ومنه $\frac{2}{-0,85} < \frac{2}{\alpha-2} < \frac{2}{-0,86}$

ومنه : $-2,35 < \frac{2}{\alpha-2} < -2,32 \dots \dots$ (**) .

بجمع (*) و (**) نجد : $0,93 < f(\alpha) < 0,98$

ب/ تبين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-(x - 1)e^{-x+2}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{x-1}{x-2} \times \frac{x-2}{e^{x-2}} \right] = 0$$

وهو المطلوب .

دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) : ندرس إشارة الفرق :

$$f(x) - (2x - 1) = -(x - 1)e^{-x+2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $e^{-x+2} > 0$ ، فإن إشارة الفرق من إشارة $-(x - 1)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - (2x - 1)$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A(1; 1)$	(C_f) تحت (Δ)

ج/ تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكرتية له .

(T) يوازي المستقيم (Δ) معناه أن لهما نفس معامل التوجيه ومنه للبحث عن x_0 نحل المعادلة $f'(x_0) = 2$ ومنه

$$g(x_0) = 2 \Rightarrow 2 + (x_0 - 2)e^{-x_0+2} = 2 \Rightarrow (x_0 - 2)e^{-x_0+2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ e^{-x_0+2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \{x_0 = 2\}$$

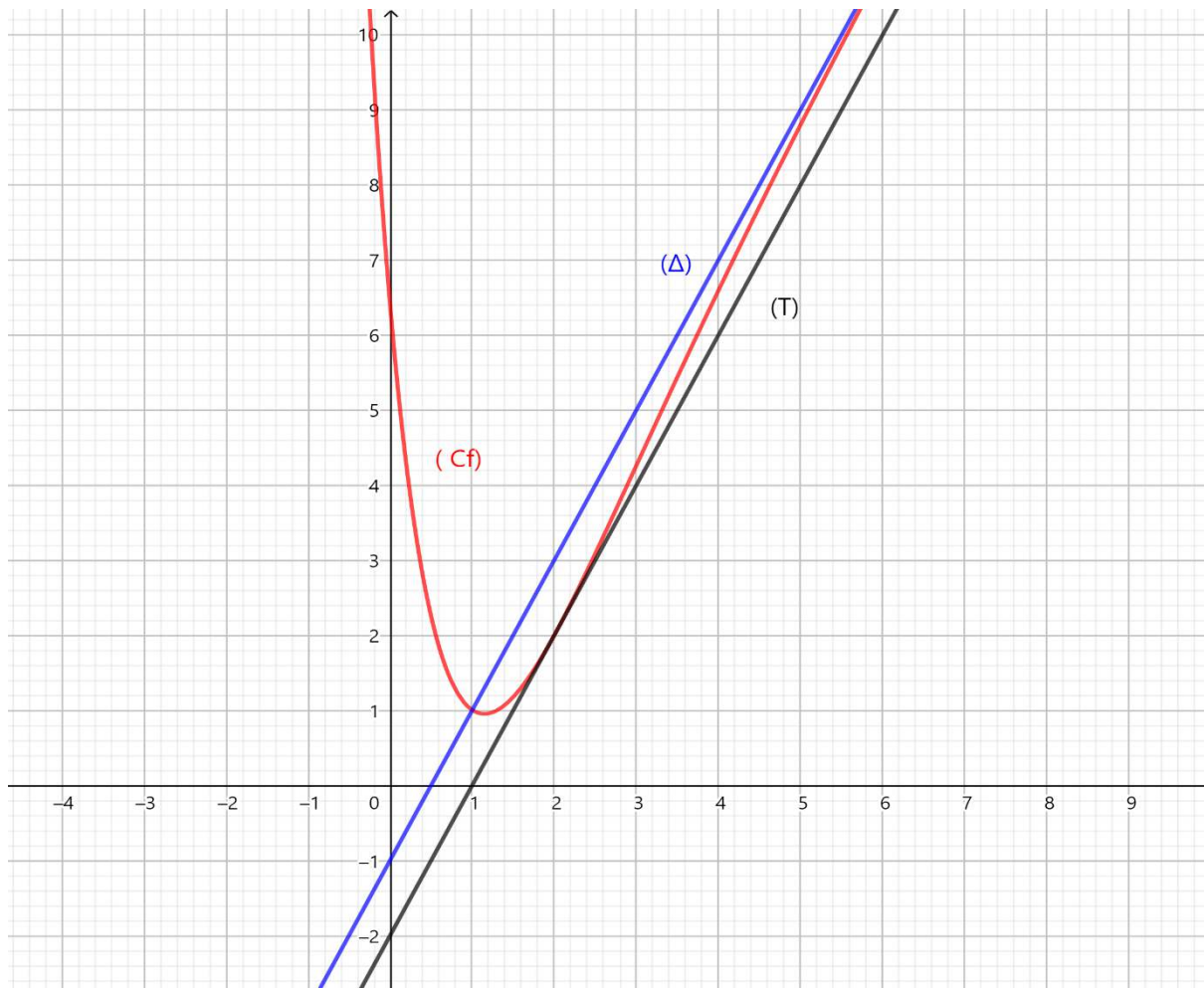
ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 2$.

$$(T): y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$(T): y = 2x - 2$$

د/ حساب $f(0)$ و $f(2)$ ثم أنشئ (Δ) ، (T) و (C_f)

$$f(2) = 2 \text{ و } f(0) = -1 + e^2 = 6,38$$



4 ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$$(E): 2m - 1 - (x - 1)e^{-x+2} = 0$$

$$-1 - (x - 1)e^{-x+2} = -2m$$

تكافئ

$$2x - 1 - (x - 1)e^{-x+2} = 2x - 2m$$

تكافئ

$$f(x) = 2x - 2m$$

تكافئ

إذن هيا مناقشة مائلة ، ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $y = 2x - 2m$

المناقشة	قيم m	قيم $-2m$
المعادلة ليس لها حلول .	$m \in]1; +\infty[$	$-2m \in]-\infty; -2[$
المعادلة لها حل وحيد موجب .	$m = 1$	$-2m = -2$
المعادلة تقبل حلين موجبين .	$m \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$	$-2m \in]-2; -1[$
المعادلة تقبل حل وحيد موجب .	$m \in \left[\frac{1}{2} - \frac{e^2}{2}; \frac{1}{2} \right]$	$-2m \in [-1; -1 + e^2[$
المعادلة لها حل وحيد معدوم .	$m = \frac{1}{2} - \frac{e^2}{2}$	$-2m = -1 + e^2$
المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .	$m \in \left] -\infty; \frac{1}{2} - \frac{e^2}{2} \right[$	$-2m \in]-1 + e^2; +\infty[$

I- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(Γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto 2e^x$ ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x + 2$ ، α و 0 هما فاصلتا نقطتي تقاطع (Γ) و (Δ) حيث $-1,6 < \alpha < -1,5$.

1 بقراءة بيانية حدد وضعية المنحنى (Γ) بالنسبة لـ (Δ) على $\mathbb{R}$.

2 الدالة العددية للمتغير الحقيقي x والمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = -2e^x + x + 2$.

حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II- دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2(ex - 3) + (x + 3)e^{-x+1}$.

1 أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -g(x)e^{-x+1}$.

ج/ عين دون حساب: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

د/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2 أ/ بين أن المستقيم (D) ذا المعادلة: $y = 2(ex - 3)$ هو مستقيم

مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$ ، أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D).

ب/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

ج/ بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلها β حيث: $-2,4 < \beta < -2,3$.

3 أنشئ كل من (D) و (C_f) ، نأخذ $f(-3) \simeq -22,31$ ، $f(\alpha) \simeq 4,15$.

1 بقراءة بيانية حدد وضعية المنحنى (Γ) بالنسبة لـ (Δ) على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$2e^x - (x + 2)$	+	0	0	+
الوضع النسبي	(Γ) فوق (Δ)	(Γ) يقطع (Δ)	(Γ) يقطع (Δ)	(Γ) فوق (Δ)

2 الدالة العددية للمتغير الحقيقي x والمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = -2e^x + x + 2$.

حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

$$g(x) = -2e^x + x + 2 = -[2e^x - (x + 2)]$$

ومنه إشارة $g(x)$ تتعلق بوضعية (Γ) بالنسبة لـ (Δ) على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	0	-

1 أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2(ex - 3) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x+1}) = +\infty \end{cases} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2(ex - 3) + (x + 3)e^{-x+1}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2(ex - 3) + \left(\frac{x+3}{e^{x-1}} \right) \times \frac{x-1}{x-1} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2(ex - 3) + \left(\frac{x-1}{e^{x-1}} \right) \times \frac{x+3}{x-1} \right]$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(ex - 3) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x+3}{x-1} \right] = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x-1}{e^{x-1}} \right] = 0 \end{cases}$$

ب/ تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -g(x)e^{-x+1}$.

$$f'(x) = 2e^1 + e^{-x+1} - e^{-x+1}(x + 3) = e^{-x+1} \left(\frac{2e^1}{e^{-x+1}} + 1 - x - 3 \right) = e^{-x+1} (2e^1 \times e^{x-1} - x - 2)$$

$$= (2e^x - x - 2)e^{-x+1} = -g(x)e^{-x+1}$$

ج/ تعيين دون حساب: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$: حسب تعريف العدد المشتق فإن :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha) = -g(\alpha)e^{-\alpha+1} = 0$$

تفسير النتيجة هندسياً : المنحنى (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة α مماساً أفقياً معادلته $y = f(\alpha)$

إستنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $e^{-x+1} > 0$ ، ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+

ومنه f متزايدة تماماً على المجالين $]-\infty; \alpha]$ و $]0; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجال $[\alpha; 0]$.

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$2,15$	$+\infty$

2 أ/ تبين أن المستقيم (D) ذا المعادلة : $y = 2(ex - 3)$ هو مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2(ex - 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x + 3)e^{-x+1}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x-1}{e^{x-1}} \times \frac{x+3}{x-1} \right] = 0$$

ومنه المستقيم (D) ذا المعادلة : $y = 2(ex - 3)$ هو مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) : ندرس إشارة الفرق : $f(x) - 2(ex - 3) = (x + 3)e^{-x+1}$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $e^{-x+1} > 0$ ، ومنه إشارة الفرق من إشارة $(x + 3)$.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x) - 2(ex - 3)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (D)	(C_f) يقطع في (D) $A(-3; f(-3))$	(C_f) فوق (D)

ب/ تبين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

الدالة f قابلة للإشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$.

$$f''(x) = -(2e^x + 1)e^{-x+1} - e^{-x+1}[-(2e^x + x + 2)] = e^{-x+1}(-2e^x - 1 + 2e^x + x + 2) = (x + 1)e^{-x+1}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

بما أن $f''(x)$ إنعدمت عند $x = -1$ مغيرة إشارتها ، فإن النقطة $A(-1; f(-1))$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f)

ج/ تبين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلها β حيث: $-2,4 < \beta < -2,3$

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[-2,4; -2,3]$ ولدينا :

$$f(-2,4) = -1,07 \quad \text{و منه } f(-2,4) \times f(-2,3) < 0$$

$$f(-2,3) = 0,47$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلها β حيث:

$$-2,4 < \beta < -2,3$$

3 أنشئ كل من (D) ، (C_f) ، نأخذ $f(-3) \simeq -22,31$ ، $f(\alpha) \simeq 4,15$



I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (2x + 1)e^x - 1$.

① أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

② أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

③ أحسب $g(0)$ وحدد إشارة $g(x)$.

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x(1 - e^x)^2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

① أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

② أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) .

ب/ أدرس الوضعية النسبية للمستقيم (Δ) بالنسبة للمنحنى (C_f) .

③ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = (e^x - 1)g(x)$.

④ استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

⑤ أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها .

⑥ أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 .

⑦ أنشئ المنحنى (C_f) و (Δ) و (T) .

III- h دالة معرفة على $[-1; 1]$ بـ : $h(x) = x(1 - e^{|x|})^2$.

① أدرس قابلية اشتقاق الدالة h عند الصفر، ماذا تستنتج ؟

② بين أن h دالة فردية، ثم استنتج طريقة لرسم منحناها دون دراسة تغيراتها .

③ أنشئ منحنى الدالة h في نفس المعلم السابق .

① حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2xe^x + e^x - 1] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x + 1)e^x - 1] = +\infty$$

② دراسة اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = 2e^x + e^x(2x + 1) = (2 + 2x + 1)e^x = (2x + 3)e^x$$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $e^x > 0$ ، ومنه إشارة المشتق من إشارة $(2x + 3)$.

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x \neq 0 \\ 2x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -\frac{3}{2}]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-\frac{3}{2}; +\infty[$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		$\ominus$	$+$
$g(x)$	-1	$-1,44$	$+\infty$

3 حساب $g(0)$ وحدد إشارة $g(x)$: $g(0) = (2(0) + 1)e^0 - 1 = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$		$\ominus$	$+$

-II f هي الدالة المعرفة على $] -\infty; 1]$ بـ : $f(x) = x(1 - e^x)^2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(1 - e^x)^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(1 - e^x)^2] = +\infty$$

2 أ/ تبين أن المستقيم (Δ) ذ المعادلة : $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(1 - e^x)^2 - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(1 + e^{2x} - 2e^x) - x]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [x + xe^{2x} - 2xe^x - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^{2x} - 2xe^x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} (2xe^{2x}) - 2xe^x \right] = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب/ دراسة الوضعية النسبية للمستقيم (Δ) بالنسبة للمنحنى (C_f) .

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - x = xe^{2x} - 2xe^x = xe^x(e^x - 2)$

$$f(x) - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} xe^x = 0 \\ e^x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \ln 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
xe^x	$-$	$\ominus$	$+$	$+$
$e^x - 2$	$-$	$-$	$\ominus$	$+$
$f(x) - x$	$+$	$\ominus$	$\ominus$	$+$
الوضع النسبي	(C_f)	(C_f)	(C_f)	(C_f)
	فوق	يقطع	تحت	يقطع
	(Δ)	(Δ)	(Δ)	(Δ)

3 تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $] -\infty; 1]$ فإن : $f'(x) = (e^x - 1)g(x)$

$$f'(x) = 1(1 - e^x)^2 + 2(-e^x)(1 - e^x)x = (1 - e^x)[1 - e^x - 2xe^x]$$

$$(1 - e^x)[1 - (2x + 1)e^x] = (e^x - 1)[(2x + 1)e^x - 1] = (e^x - 1)g(x)$$

4 استنتاج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيراتها إشارة المشتق من إشارة جداء كل من $e^x - 1$ و $g(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$		0	$+$
$g(x)$		0	$+$
$f'(x)$		0	$+$

ومنه f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; 0]$ و $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	$+$
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

5 إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها.

لدينا المشتقة الأولى تنعدم عند $x = 0$ ولا تغير من إشارتها وبالتالي فإن النقطة $\omega(0; 0)$ نقطة إنعطاف لـ (C_f)

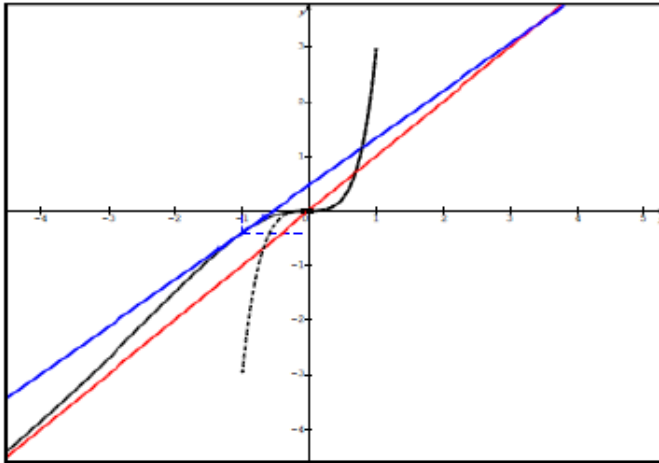
6 كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 .

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$(T): y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$$

$$(T): y = (-e^{-2} + 1)(x - 1) - 2(e^{-2} - e^{-1})$$

7 أنشئ المنحنى (C_f) و (Δ) و (T)



III- h دالة معرفة على $[-1; 1]$ ب: $h(x) = x(1 - e^{|x|})^2$.

1 دراسة قابلية اشتقاق الدالة h عند الصفر، ماذا تستنتج؟

$$h(x) = \begin{cases} x(1 - e^x)^2 & ; x \geq 0 \\ x(1 - e^{-x})^2 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 - e^x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - e^x)^2 = 0$$

ومنه الدالة h تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(1 - e^{-x})^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - e^{-x})^2 = 0$$

ومنه الدالة h تقبل الاشتقاق عند 0 من اليسار.

بما أن $h'_g(0) = h'_d(0)$ فإن الدالة h تقبل الاشتقاق عند 0 .

2 تبين أن h دالة فردية

من أجل كل $x \in D_h$ ، و $-x \in D_h$

$$h(-x) = -x(1 - e^{|-x|})^2 = -x(1 - e^{|x|})^2 = -h(x)$$

استنتاج طريقة لرسم منحناها دون دراسة تغيراتها .

لدينا في المجال $[0; 1]$ فإن $|x| = x$ ، ومنه $h(x) = f(x)$ ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) وبما أن h فردية فإن (C_h) نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة للمبدأ .

3 أنشئ منحنى الدالة h في نفس المعلم السابق (الخط المتقطع)

التمرين 13

I- f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ ب: $f(x) = x - \frac{1}{e^{x-1}}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2 أدرس تغيرات الدالة f .

3 بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\ln 2 < \alpha < 1$ ، ثم أثبت أن $f'(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2$.

4 أكتب معادلة للمماس (T) لـ (C_f) في النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$.

5 أحسب $f(-x) + f(x)$ ثم أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة .

6 أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x - 1]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

7 أنشئ (T) و (C_f) نأخذ $\alpha \simeq 0,8$.

8 هل توجد مماسات للمنحنى (C_f) تعامد المستقيم ذا المعادلة $y = x$ ؟ برر إجابتك .

9 ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m - 1) = me^x$.

II- g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ ب: $g(x) = -x + \frac{e^x}{e^{x-1}}$.

بين أن $g(x) = f(-x)$ ، ثم أرسم (C_g) .

حل تمرين 13

1 حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0^- \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x - \frac{1}{e^{x-1}} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0^+ \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x - \frac{1}{e^{x-1}} \right] = -\infty$$

نستنتج أن المستقيم $x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

2 دراسة تغيرات الدالة f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - \frac{1}{e^{x-1}} \right] = -\infty \quad \text{نكمل حساب النهايات :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{1}{e^{x-1}} \right] = +\infty$$

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} > 0$$

ومنه f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

3 تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\ln 2 < \alpha < 1$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[\ln 2; 1]$ ولدينا:

$$f(\ln 2) \times f(1) < 0 \text{ ومنه } \begin{cases} f(\ln 2) = -0,3 \\ f(1) = 0,4 \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\ln 2 < \alpha < 1$

إثبات أن $f'(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2$.

$$\text{لدينا (1) } f'(\alpha) = 1 + \frac{e^\alpha}{(e^\alpha - 1)^2} \dots \dots \dots$$

$$\text{ولدينا مما سبق } f(\alpha) = 0 \text{ ومنه } \alpha - \frac{1}{e^\alpha - 1} = 0 \text{ ومنه } \alpha = \frac{1}{e^\alpha - 1} \text{ ، أي } e^\alpha - 1 = \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{ومنه } e^\alpha = \frac{1}{\alpha} + 1 \text{ ومنه (2) } e^\alpha = \frac{\alpha + 1}{\alpha} \dots \dots \dots$$

بتعويض (2) في (1) نجد:

$$f'(\alpha) = 1 + \frac{\frac{\alpha+1}{\alpha}}{(\frac{\alpha+1}{\alpha} - 1)^2} = 1 + \frac{\frac{\alpha+1}{\alpha}}{(\frac{\alpha+1-\alpha}{\alpha})^2} = 1 + \frac{\frac{\alpha+1}{\alpha}}{(\frac{1}{\alpha})^2} = 1 + \frac{\frac{\alpha+1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha^2}} = 1 + \frac{\alpha+1}{\alpha} \times \alpha^2 = 1 + \alpha(\alpha+1) = 1 + \alpha + \alpha^2$$

وهو المطلوب

4 كتابة معادلة للمماس (T) لـ (C_f) في النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$.

$$(T): y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$$

$$(T): y = (1 + \alpha + \alpha^2)(x - \alpha) + 0$$

$$(T): y = (1 + \alpha + \alpha^2)x - (\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha)$$

5 حساب $f(-x) + f(x)$ ثم أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

أولا نحسب $f(-x)$:

$$f(-x) = -x - \frac{1}{e^{-x} - 1} \times \frac{e^x}{e^x} = -x - \frac{e^x}{1 - e^x} = -x + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

بالتعويض نجد:

$$f(-x) + f(x) = -x + \frac{e^x}{e^x - 1} + x - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1}{e^x - 1} = 1$$

$$f(-x) + f(x) = 1$$

لدينا من جهة:

$$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$$

ومن جهة أخرى:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ، ومنه } \begin{cases} 2\alpha = 0 \\ 2\beta = 1 \end{cases} \text{ : بالمطابقة نجد :}$$

ومنه نستنتج أن النقطة $w(0; \frac{1}{2})$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

6 أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x - 1]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

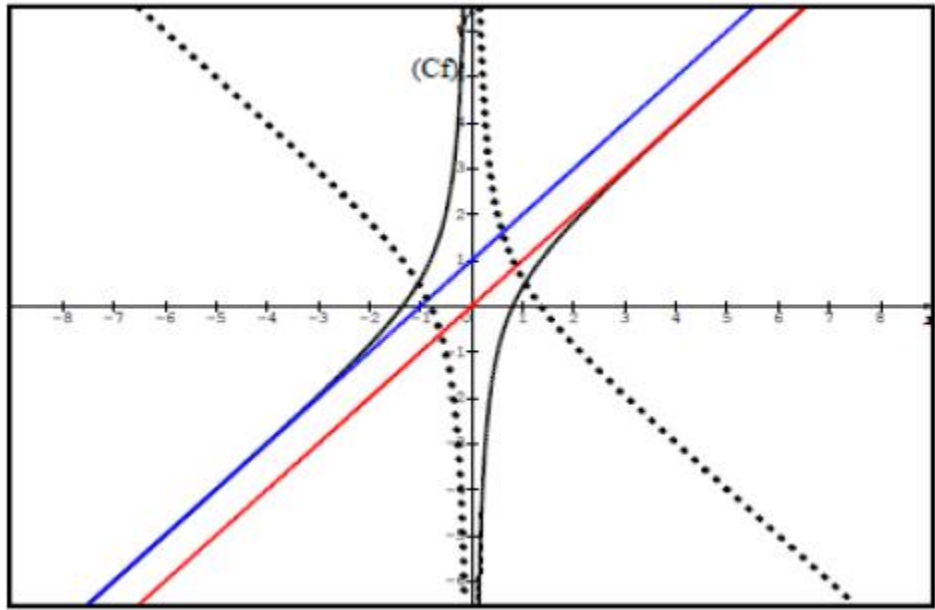
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - \frac{1}{e^x - 1} - x - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{e^x - 1} - 1 \right] = 0$$

ومنه المستقيم $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{e^x - 1} \right] = 0$$

ومنه المستقيم $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

7 أنشئ (T) و (C_f) نأخذ $\alpha \simeq 0,8$



8 هل توجد مماسات للمنحنى (C_f) تعامد المستقيم $y = x$ ؟ برر إجابتك .

$$\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = -2 \text{ (مستحيلة) } \text{ ومنه } 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = -1 \text{ ، أي أن } 1 \times f'(x) = -1$$

ومنه لا توجد مماسات للمنحنى (C_f) تعامد المستقيم $y = x$ ذا المعادلة

9 ناقش بيانيا ، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m - 1) = me^x$

$$(m - 1) = me^x \Rightarrow m - me^x = 1 \Rightarrow m(1 - e^x) = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{1 - e^x} \Rightarrow m = -\frac{1}{e^x - 1}$$

$$x + m = x - \frac{1}{e^x - 1} \Rightarrow f(x) = x + m$$

ومنه حلول المعادلة بيانيا هيا فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $y = x + m$.

❖ $m \in]-\infty; 0[$ ، للمعادلة حل وحيد موجب .

❖ $m \in [0; 1]$ ، لا توجد حلول .

❖ $m \in]1; +\infty[$ ، للمعادلة حل وحيد سالب .

II- g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $g(x) = -x + \frac{e^x}{e^x - 1}$.

بين أن $g(x) = f(-x)$ ، ثم أرسم (C_g) .

$$f(-x) = -x - \frac{1}{e^{-x} - 1} \times \frac{e^x}{e^x} = -x - \frac{e^x}{1 - e^x} = -x + \frac{e^x}{e^x - 1} = g(x)$$

وهو المطلوب .

(C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب .

التمرين 14

1 g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 e^x$.

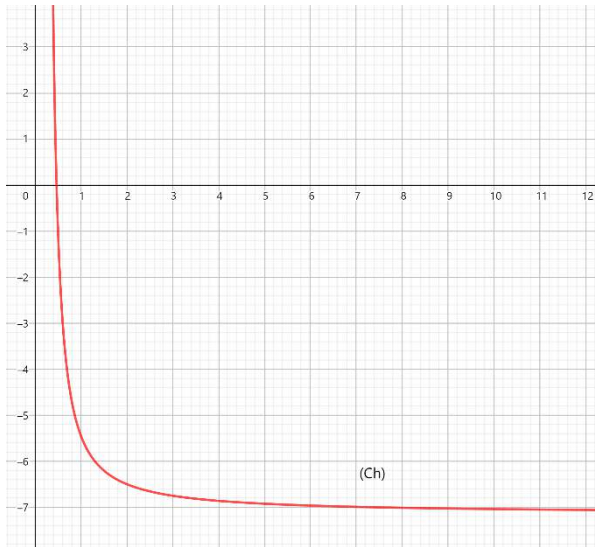
أ/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

ب/ استنتج أنه : إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$ وإذا كان $x > 1$ فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$.

2 نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

h دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3e$ ، (C_h) تمثيلها البياني (أنظر الملحق) .



أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$.

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f على $]0; +\infty[$.

3 أ/ بين أن المعادلة : $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$.

تقبل حلين α و β حيث : $1,5 < \beta < 1,6$.

و $0,5 < \alpha < 0,6$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقطع

محور الفواصل في نقطتين .

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) .

4 بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته .

5 أ/ أرسم (T) و (C_f) .

ب/ m عدد حقيقي موجب تماما، أوجد قيمة m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متميزين :

$$(E) \dots f(x) = (m^2 - 2m + 2)e^m + h(m)$$

أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هيا :

$$g'(x) = 2xe^x + e^x \times x^2 = (x^2 + 2x)e^x$$

بما أن $x \in]0; +\infty[$ فإن $x^2 + 2x > 0$ ومنه $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

ب/ استنتاج أنه : إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$ وإذا كان $x > 1$ فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

❖ إذا كان $0 < x < 1$ فإن $x < \frac{1}{x}$ ، وبما أن g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$

❖ إذا كان $x > 1$ فإن $x > \frac{1}{x}$ ، وبما أن g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

2 نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$

أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{فإن} \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2x + 2)e^x = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} - 3e = +\infty \end{cases} \quad \text{بما أن :} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{فإن} \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 2)e^x = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} - 3e = 1 - 3e \end{cases} \quad \text{بما أن :} \end{aligned}$$

ب/ تبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = (2x - 2)e^x + e^x(x^2 - 2x + 2) - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = e^x(2x - 2 + x^2 - 2x + 2) - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

$$= x^2e^x - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(1) = g(1) - g\left(\frac{1}{1}\right) = 0 \quad \text{حساب } f'(1)$$

ج/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

لدينا مما سبق إذا كان $0 < x < 1$ ، فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$ ومنه $g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ ومنه $f'(x) < 0$

ومنه f متناقصة تماما على المجال $]0; 1[$.

لدينا مما سبق إذا كان $x > 1$ ، فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ومنه $g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ ومنه $f'(x) > 0$

ومنه f متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	$-e$	$+\infty$

3 أ/ تبين أن المعادلة : $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حلين α و β حيث : $1,5 < \beta < 1,6$

و $0,5 < \alpha < 0,6$

المعادلة : $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تكافئ $(x^2 - 2x + 2)e^x + h(x) = 0$ تكافئ $f(x) = 0$
الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0,5; 0,6]$ ولدينا :

$$\begin{cases} f(0,5) = 1,25 \\ f(0,6) = -0,74 \end{cases} \Rightarrow f(0,5) \times f(0,6) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,5 < \alpha < 0,6$
الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1,5; 1,6]$ ولدينا :

$$\begin{cases} f(1,5) = -0,6 \\ f(1,6) = 0,44 \end{cases} \Rightarrow f(1,5) \times f(1,6) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $1,5 < \beta < 1,6$

ومنه المعادلة : $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حلين α و β حيث : $1,5 < \beta < 1,6$ و $0,5 < \alpha < 0,6$

استنتاج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين .

بما أن $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β فإن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β .

ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) .

يكفي أن ندرس إشارة الفرق : $f(x) - h(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

بما أن $e^x > 0$ ، فإن إشارة الفرق من إشارة $(x^2 - 2x + 2)$

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 < 0$$

ومنه المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ وإشارتها من إشارة $a = 1 > 0$ وبما أن $a = 1 > 0$ فإن $x^2 - 2x + 2 > 0$

ومنه نستنتج أن (C_f) يقع فوق (C_h) .

4 تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته .

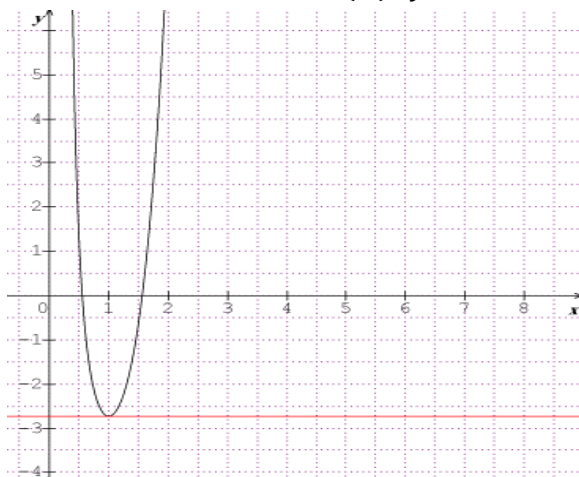
بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ فإن تمثيلها البياني (C_f) يقبل مماسا عند كل نقطة فاصلتها من المجال $]0; +\infty[$.

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$(T): y = 0(x - 1) - e$$

$$(T): y = -e$$

5 أ/ أرسم (T) و (C_f)



ب/ m عدد حقيقي موجب تماما ، أوجد قيمة m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متميزين:

$$(E) \dots f(x) = (m^2 - 2m + 2)e^m + h(m)$$

المعادلة (E) تكافئ $f(x) = f(m)$

من أجل $m = 1$ المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا .

ومنه المعادلة (E) تقبل حلين متميزين لما $m \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

التمرين 15

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = e^{-x} + x - 1$.

① أحسب $g'(x)$ ثم عين اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

② بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \geq 0$ ، استنتج أن: $e^{-x} + x \geq 1$.

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{x}{e^{-x} + x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

① تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$.

② أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. فسر النتيجةين بيانيا .

③ أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{e^{-x}(1+x)}{(e^{-x} + x)^2}$.

ب/ أدرس إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

④ أكتب معادلة لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

⑤ أ/ تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$ ، ثم استنتج إشارة $x - f(x)$.

ب/ استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

⑥ أنشئ (Δ) و (C_f) .

⑦ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $\frac{xe^x}{xe^x+1} - 1 = m$.

حل تمرين 15

① حساب $g'(x)$ ثم عين اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ لدينا : $g'(x) = -e^{-x} + 1$

$g'(x) \geq 0$ يكافئ $-e^{-x} + 1 \geq 0$ يكافئ $-e^{-x} \geq -1$ يكافئ $e^{-x} \leq 1$ يكافئ $-x \leq 0$ يكافئ $x \geq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		0	+

ومنه g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$		0	

② تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \geq 0$ ، استنتج أن: $e^{-x} + x \geq 1$.

نلاحظ من جدول التغيرات أن 0 هي قيمة حدية صغرى لـ g ومنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x) \geq 0$ ومنه $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ وعليه $e^{-x} + x \geq 1$

-II f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x}{e^{-x}+x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; i, j)$.

① التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}$.

$$\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}} = \frac{1}{\frac{xe^x+1}{xe^x}} = \frac{xe^x}{xe^x+1} = \frac{xe^x}{e^x(x+\frac{1}{e^x})} = \frac{x}{x+\frac{1}{e^x}} = \frac{x}{e^{-x}+x} = f(x)$$

② حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. فسر النتيجةين بيانيا .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{xe^x}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}\right) = 1 \end{cases} \quad \text{بما أن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{xe^x}\right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}\right) = 0 \end{cases}$$

③ أ/ تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{e^{-x}(1+x)}{(e^{-x}+x)^2}$.

$$f'(x) = \frac{1(e^{-x}+x) - (-e^{-x}+x) \times x}{(e^{-x}+x)^2} = \frac{e^{-x}+x+xe^{-x}-x}{(e^{-x}+x)^2} = \frac{e^{-x}(1+x)}{(e^{-x}+x)^2}$$

ب/ دراسة إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

من أجل كل عدد حقيقي x ، $(e^{-x}+x)^2 > 0$ و $e^{-x} > 0$ ، فإن إشارة المشتق من إشارة $(1+x)$.
ومنه f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-1; +\infty[$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$\ominus$	$+$
$f(x)$	0	$\frac{1}{1-e}$	1

④ كتابة معادلة لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ y &= 1(x-0) + 0 \\ y &= x \end{aligned}$$

⑤ أ/ التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$ ، ثم استنتج إشارة $x - f(x)$.

$$x - f(x) = x - \frac{x}{e^{-x}+x} = \frac{xe^{-x}+x^2-x}{e^{-x}+x} = \frac{x(e^{-x}+x-1)}{e^{-x}+x+1-1} = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

بما أن $g(x) \geq 0$ ، فإن $g(x)+1 \geq 1$ ومنه $g(x)+1 > 0$ ومنه نستنتج أن إشارة الفرق من إشارة x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x - f(x)$		$\ominus$	$+$

ب/ استنتاج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - x$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع $A(0; 0)$ في (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

6 أنشئ (Δ) و (C_f)



7 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $\frac{xe^x}{xe^x+1} - 1 = m$

$\frac{xe^x}{xe^x+1} - 1 = m$ يكافئ $\frac{xe^x}{xe^x+1} \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = m + 1$ يكافئ $\frac{x}{e^{-x}+x} = m + 1$ يكافئ $f(x) = m + 1$
ومنه حلول المعادلة هيا فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = m + 1$.

المناقشة	قيم m	قيم $m + 1$
لا يوجد حلول .	$m \in]-\infty; \frac{1}{1-e} - 1[$	$(m + 1) \in]-\infty; \frac{1}{1-e}[$
للمعادلة حل وحيد سالب .	$m = \frac{1}{1-e} - 1$	$m + 1 = \frac{1}{1-e}$
للمعادلة حلين سالبين .	$m \in]\frac{1}{1-e} - 1; -1[$	$(m + 1) \in]\frac{1}{1-e}; 0[$
للمعادلة حلا وحيدا معدوما .	$m = -1$	$m + 1 = 0$
للمعادلة حل وحيدا موجبا .	$m \in]-1; 0[$	$(m + 1) \in]0; 1[$
لا يوجد حلول	$m \in]0; +\infty[$	$(m + 1) \in]1; +\infty[$

التمرين 16

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$ ،

ب/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وبين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ج/ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (D).

2 أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$.

ب/ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وبين أن المستقيم (D') الذي معادلته $y = -x + \ln 2$ هو مقارب مائل لـ (C_f) .

ج/ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (D') .

3 أدرس اتجاه تغير الدالة f ، وشكل جدول تغيراتها.

4 ارسم (C_f) ، (D) و (D') .

5 ليكن (Δ_m) المستقيم الذي معادلته $y = mx + \frac{\ln 2}{2}(1 - m)$ حيث m وسيط حقيقي.

أ/ بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{1}{2} \ln 2; \frac{1}{2} \ln 2\right)$.

ب/ ناقش ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد نقاط تقاطع المستقيم (Δ_m) والمنحنى (C_f) .

حل تمرين 16

1 أ/ إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.

$$\ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln\left(\frac{1 + 2e^{-2x}}{e^{-x}}\right) = \ln(1 + 2e^{-2x}) - \ln e^{-x} = \ln(1 + 2e^{-2x}) + x = f(x)$$

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وبين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2e^{-2x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2e^{-2x}) = 0 \quad \text{لدينا :}$$

ومنه المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ج/ دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (D).

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - x = \ln(1 + 2e^{-2x})$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x فإن $2e^{-2x} > 0$ ، يكافئ $1 + 2e^{-2x} > 1$ يكافئ $\ln(1 + 2e^{-2x}) > 0$

ومنه $f(x) - x > 0$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (D).

2 أ/ تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$.

$$\ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln\left(e^x + \frac{2}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^{2x} + 2}{e^x}\right) = \ln(e^{2x} + 2) - \ln(e^x) = \ln(e^{2x} + 2) - x$$

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وبين أن المستقيم (D') الذي معادلته $y = -x + \ln 2$ هو مقارب مائل لـ (C_f) .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(2 + e^{2x}) = \ln 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x + \ln 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x + \ln(2 + e^{2x}) + x - \ln 2]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(2 + e^{2x}) - \ln 2] = 0$$

ومنه المستقيم (D') الذي معادلته $y = -x + \ln 2$ هو مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ج/ دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (D') .

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (-x + \ln 2) = \ln(2 + e^{2x}) - \ln 2 = \ln\left(\frac{2+e^{2x}}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}e^{2x}\right)$
 لدينا من أجل كل عدد حقيقي x فإن $\frac{1}{2}e^{2x} > 0$ ، يكافئ $1 + \frac{1}{2}e^{2x} > 1$ يكافئ $\ln\left(1 + \frac{1}{2}e^{2x}\right) > 0$
 ومنه $f(x) - (-x + \ln 2) > 0$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (D')
3 دراسة اتجاه تغير الدالة f ، وشكل جدول تغيراتها .

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^{2x} - 2}{e^{2x} + 2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{2x} + 2 > 0$ وعليه إشارة المشتق من إشارة البسط .

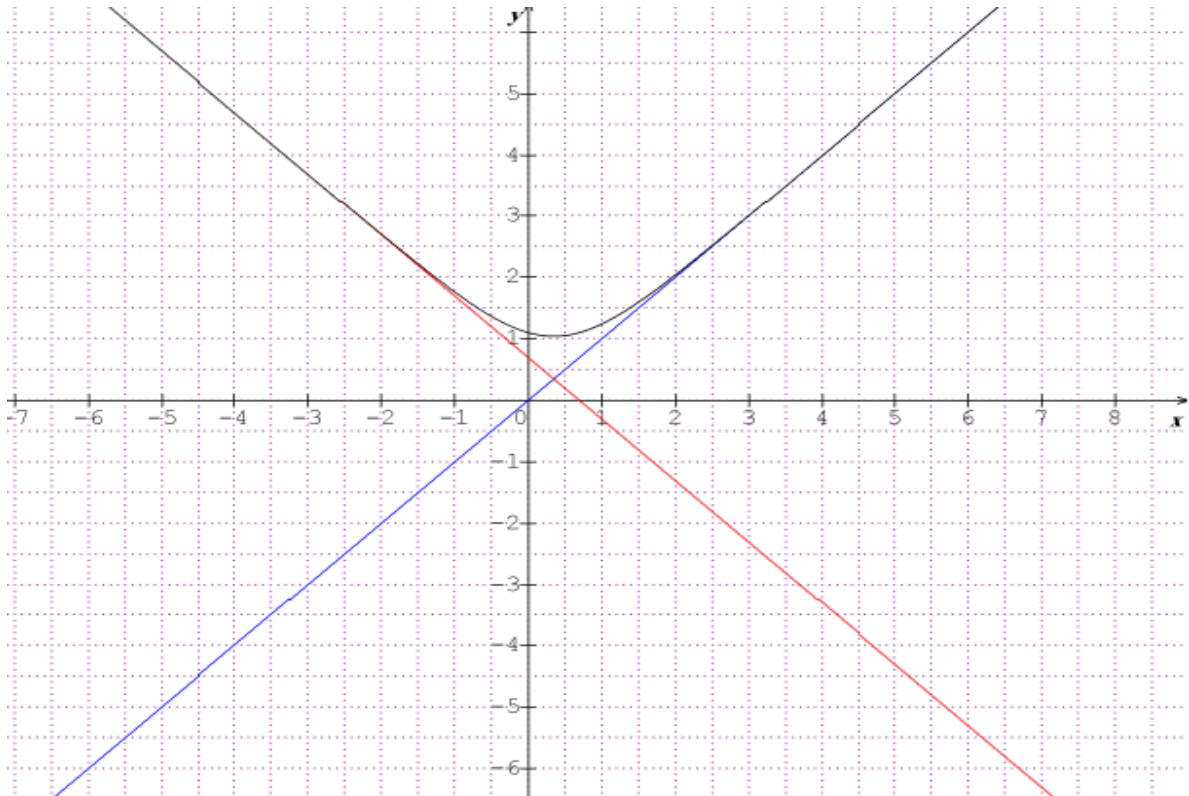
$$e^{2x} - 2 \geq 0 \text{ معناه } e^{2x} \geq 2 \text{ معناه } 2x \geq \ln 2 \text{ معناه } x \geq \frac{\ln 2}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$\begin{array}{c} 0 \\ \circ \end{array}$	
		-	+

ومن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \frac{\ln 2}{2}]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\frac{\ln 2}{2}; +\infty[$

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$\begin{array}{c} 0 \\ \circ \end{array}$	
		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$\ln 2\sqrt{2}$	$+\infty$

4 ارسم (C_f) ، (D) ، و (D')



5 ليكن (Δ_m) المستقيم الذي معادلته $y = mx + \frac{\ln 2}{2}(1 - m)$ حيث m وسيط حقيقي .

أ/ تبين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{1}{2}\ln 2; \frac{1}{2}\ln 2\right)$.

من أجل كل عدد حقيقي m لدينا : $y = mx + \frac{\ln 2}{2}(1 - m)$ يكافئ $y - mx - \frac{\ln 2}{2}(1 - m) = 0$

يكافئ $y - mx - \frac{\ln 2}{2} + m\frac{\ln 2}{2} = 0$ يكافئ $(y - \frac{\ln 2}{2}) - m(x - \frac{\ln 2}{2}) = 0$

$$\begin{cases} y = \frac{\ln 2}{2} \\ x = \frac{\ln 2}{2} \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} y - \frac{\ln 2}{2} = 0 \\ x - \frac{\ln 2}{2} = 0 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

ومنه جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{1}{2}\ln 2; \frac{1}{2}\ln 2\right)$.

ب/ ناقش ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد نقاط تقاطع المستقيم (Δ_m) والمنحنى (C_f)

حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع (Δ_m) .

إذا كان $m \in]-\infty; -1[$ للمعادلة حلا وحيدا .

إذا كان $m \in [-1; 1]$ فإن المعادلة ليس لها حلول .

إذا كان $m \in]1; +\infty[$ فإن للمعادلة حلا وحيدا .

التمرين 19 أشبال الأمة

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x - 1)e^{-x} + 2$.

1 أحسب نهايات الدالة g عند حدود مجال التعريف ثم ادرس اتجاه تغيرات الدالة g .

2 شكل جدول تغيرات g ، ثم علل وجود عدد حقيقي α حيث : $-0,36 < \alpha < -0,38$ يحقق : $g(\alpha) = 0$

3 استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 أ/ بين أنه من أجل كل $\alpha \in \mathbb{R}$: $f'(\alpha) = g(\alpha)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ وشكل جدول تغيرات الدالة f .

ب/ بين أن $f(\alpha) = 2\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3 بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيتها .

4 أ/ بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = 2x + 1$ بجوار $+\infty$.

ب/ ادرس الوضع النسبي للبيان (C_f) والمستقيم (Δ) .

ج/ أنشئ المنحنى (C_f) في المعلم السابق وعلى المجال $[-5; +\infty[$ يعطى $f(-1,5) = 4,72$

5 لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x) = f(x^2 e^x)$.

باستعمال مشتق دالة مركبة. استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها .

1 حساب نهايات الدالة g عند حدود مجال التعريف ثم ادرس اتجاه تغيرات الدالة g .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)e^{-x} + 2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)e^{-x} + 2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x-1}{e^x} + 2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + 2 \right] = 2$$

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هيا :

$$g'(x) = 1e^{-x} - e^{-x}(x-1) = (1-x+1)e^{-x} = (-x+2)e^{-x}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{-x} > 0$ ومنه إشارة المشتق من إشارة $(-x+2)$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[2; +\infty[$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		$\circ$	
		$+$	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$2 + e^{-2}$	2

2 جدول تغيرات g ، ثم علل وجود عدد حقيقي α حيث : $-0.38 < \alpha < -0.36$ يحقق : $g(\alpha) = 0$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-0.38; -0.36]$ ولدينا :

$$\begin{cases} g(-0.38) = -0.02 \\ g(-0.36) = 0.05 \end{cases} \Rightarrow g(-0.38) \times g(-0.36) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي α حيث : $-0.38 < \alpha < -0.36$ يحقق : $g(\alpha) = 0$

3 استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		$\circ$	
		$-$	$+$

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(2 + \frac{1}{x} - e^{-x} \right) \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x + 1 - xe^{-x}] = +\infty \end{aligned}$$

2 أ/ تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ وشكل جدول تغيرات الدالة f

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هيا :

$$f'(x) = 2 - e^{-x} - e^{-x}(-x) = 2 + (-1+x)e^{-x} = (x-1)e^{-x} + 2 = g(x)$$

ومنه f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$\ominus$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

ب/ تبين أن $f(\alpha) = 2\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha-1}$.

$$f(\alpha) = 2\alpha + 1 - \alpha e^{-\alpha} \dots \dots \dots (1)$$

لدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ ومنه $(\alpha - 1)e^{-\alpha} + 2 = 0$ ، ومنه $e^{-\alpha} = \frac{-2}{\alpha-1} \dots \dots \dots (2)$

بتعويض (2) في (1) نجد :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 2\alpha + 1 - \alpha \left(\frac{-2}{\alpha-1} \right) = 2\alpha + 1 + \frac{2\alpha}{\alpha-1} = 2\alpha + 1 + \frac{2\alpha - 2 + 2}{\alpha-1} \\ &= 2\alpha + 1 + \frac{2(\alpha-1)}{\alpha-1} + \frac{2}{\alpha-1} = 2\alpha + 1 + 2 + \frac{2}{\alpha-1} = 2\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha-1} \end{aligned}$$

إيجاد حصر العدد $f(\alpha)$.

لدينا $-0,38 < \alpha < -0,36$ ، أي أن $2,24 < 2\alpha + 3 < 2,28$

لدينا $-0,38 < \alpha < -0,36$ ، أي أن $\frac{2}{-1,36} < \frac{2}{\alpha-1} < \frac{2}{-1,38}$

ومنه بالجمع نجد $0,77 < f(\alpha) < 0,83$

3 تبين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيتها .

لدينا $f'(x) = g(x)$ أي أن $f''(x) = g'(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$		$\ominus$	$+$

بما أن المشتق الثاني $f''(x)$ إنعدم عند $x = 2$ وغير من إشارته فإن النقطة $(2; f(2))$ نقطة إنعطاف لـ (C_f) .

4 أ/ تبين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = 2x + 1$ بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-xe^{-x}] = 0$$

ومنه المستقيم $y = 2x + 1$: مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

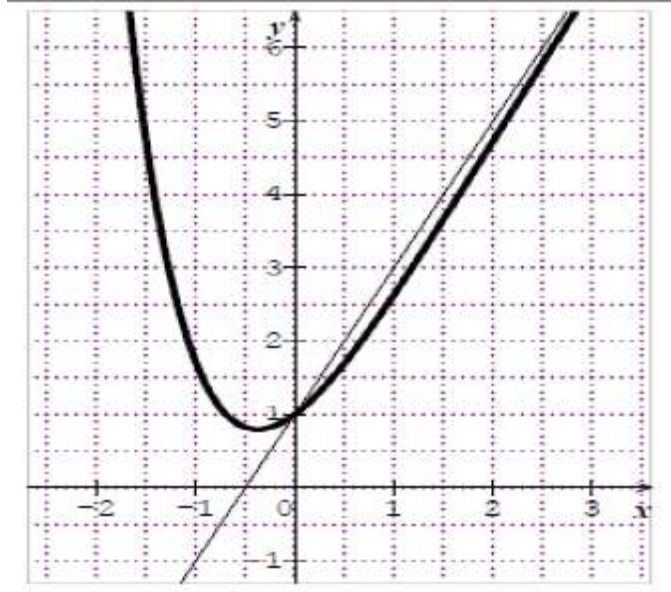
ب/ ادرس الوضع النسبي للبيان (C_f) والمستقيم (Δ) .

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (2x + 1) = -xe^{-x}$

بما أن $e^{-x} > 0$ فإن إشارة الفرق من إشارة $-x$ ومنه .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - (2x + 1)$		$\ominus$	$+$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A(0; 1)$	(C_f) تحت (Δ)

ج/ أنشئ المنحنى (G_f) في المعلم السابق وعلى المجال $[-1,5; +\infty[$ يعطى $f(-1,5) = 4,72$.



5 لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x) = f(x^2 e^x)$.

باستعمال مشتق دالة مركبة. استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

$$h(x) = f(x^2 e^x)$$

$$h'(x) = (x^2 e^x)' \times f'(x^2 e^x) = (x^2 + 2x)e^x \times f'(x^2 e^x)$$

لدينا $f'(x) = g(x)$ أي أن $f'(x^2 e^x) = g(x^2 e^x)$ ومنه

$$h'(x) = (x^2 + 2x)e^x \times g(x^2 e^x)$$

بما أن $g(x^2 e^x) > 0$ (لاحظ جدول إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty[$).

بما أن $e^x > 0$ فإن إشارة $h'(x)$ من إشارة $x^2 + 2x$ ومنه :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$h'(x)$		+	-	+
$h(x)$		$h(-2)$		$+\infty$