

ثانوية : طوبري محمد - محمد بوضياف -
السنة الدراسية : 2019 - 2020
يوم :
المدة : ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : الإحتمالات.
المحور : الإحتمالات.
الموضوع : محاكات تجربة عشوائية.

- المكتسبات القبلية: مفاهيم أولية حول مفهوم التواترات. المجموعات والعمليات عليها.
الكفاءات المستهدفة: محاكات تجربة عشوائية، إبراز مفهوم ميل تواترات نحو الإستقرار.
الأدوات المستعملة: الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المدة	عناصر الدرس	المراحل																																																	
	نشأه مقترح : 1 ارم قطعة نقدية 25 مرة، وسجل 0 عن ظهور الوجه (F) و 1 عند ظهور الظهر (P) ثم دون النتائج في جدولين التاليين: <table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>التكرار</td></tr><tr><td></td><td></td><td>التواتر</td></tr></table> جدول التواترات <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> جدول النتائج 2 ضم نتائجك إلى نتائج 4 تلاميذ آخرين ثم أحسب التواتر لكل من الوجه والظهر في العينة ذات المقاس 100 المحصل عليها • قارن النتيجة مع نتائجك؟ هل الفرق كبير؟ 3 كرر التجربة بزيادة مقاس العينة لـ 200 ثم 500 وأحسب تواترات كل تجربة ما الذي يمكنك قوله عن علاقة التواترات بمقاس العينة ؟ مصطلحات وتعريف : التجربة العشوائية : تعريف نسمي تجربة عشوائية كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة. نسمي عينة لتجربة عشوائية مجموعة النتائج المتحصل عليها عند تكرار هذه التجربة. مسألة تجربة عشوائية : عند البحث عن عينة لتجربة عشوائية، يتعسر الحصول على عدد كبير من التجارب، لذا نلجأ إلى محاكاة. لمحاكاة تجربة عشوائية، نصف هذه التجربة ثم نمذجها، أي نختار نموذج لسحب أعداد بصفة عشوائية حيث يكون لهذا النموذج نفس خواص الظاهرة المدروسة ثم نلاحظ تواترات ظهور مختلف النتائج الممكنة. مثال (1) ✓ التجربة العشوائية: ميلاد بنت أو ولد في 10 عائلات. ✓ نموذج لهذه التجربة: حظوظ ميلاد بنت تساوي حظوظ ميلاد ولد. ✓ تنفيذ محاكاة توزيع الجنس في 10 عائلات : يمكن محاكاة هذه التجربة بعدة طرق، نقترح هنا طريقتين مألوفتين هما: ❖ طريقة 1: برمي قطعة نقدية غير مزيفة 10 مرّات حيث نرفق الوجه بالنتيجة "بنت" و الظهر بالنتيجة "ولد". مثلاً : العينة وجه - ظهر - وجه - وجه - ظهر - وجه - وجه - ظهر - وجه - وجه . تعبّر عن 6 بنات و 4 أولاد في العائلات العشرة. (يمكن ان نرمز لـ F وجه و لـ P ظهر). ❖ طريقة 2: برمي زهر نرد غير مزيف 10 مرّات. نرفق الوجوه 2 ، 4 ، 6 بالنتيجة "بنت" و الوجوه 1 ، 3 ، 5 بالنتيجة "ولد". مثلاً: العينة 1-2-3-4-1-3-5-6-2-4. تعبّر عن 4 بنات و 6 أولاد في العائلات العشرة.	1	0				التكرار			التواتر																																									مرحلة الإنطلاق التشخيص والاكتشاف بناء معارف
1	0																																																		
		التكرار																																																	
		التواتر																																																	

التواترات :

تعريف

هو حاصل قسمة تكرار الطبع (القيمة) على مجموع التكرارات للقيم ونرمز له بالرمز f_i أي:

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

حيث: n_i : تكرار الطبع و N التكرار الكلي مع $N = \sum_{i=1}^{i=k} n_i$

مبرهنة

نعتبر تجربة عشوائية ما حيث f_i تمثل تواترات ظهور نتائجها حيث $0 \leq f_i \leq 1$ وبالتالي: $\sum_{i=1}^{i=k} f_i = 1$

برهان.

□

$$\sum_{i=1}^{i=k} f_i = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{n_i}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=k} n_i = \frac{N}{N} = 1 \text{ ومنه } f_i = \frac{n_i}{N}$$

ملاحظة:

في تجربة إلقاء قطعة نقدية عددا كبيرا من المرات، نلاحظ أن تواتر ظهور أحد الوجهين يقترب من تواتر ظهور الوجه الآخر، مما يسمح لنا بالقول أن تواتر ظهور كل منهما يؤول نحو الاستقرار حول القيمة $\frac{1}{2}$.
وبهذا نكون قد نمذجنا هذه التجربة (رمي قطعة نقدية مرة واحدة)، ثم أن القيمة $\frac{1}{2}$ هي التي نسميها فيما بعد احتمال ظهور أحد الوجهين.



تجريبية

التجربة العشوائية نجاح أو رسوب 20 تلميذ يمكن محاكاة هذه التجربة بعدة طرق منها:

- ① زهرة نرد غير مزيفة
 - ② قطعة نقدية متجانسة
- أنجز هذه التجربة بطريقتين

حل

طريقة 1 نرمي زهرة النرد الغير المزيفة 15 مرة ، نرفق بالوجوه 2،4،6 بنتيجة نجاح و الوجوه 1،3،5 بالنتيجة رسوب مثلا العينة $\{3, 1, 5, 2, 1, 4, 2, 1, 5, 3, 3, 6, 4, 2, 1\}$ تعبر عن 6 تلاميذ نجحين و 9 تلاميذ راسيبين
طريقة 2 نرمي قطعة نقدية غير مزيفة 15 مرة نرفق للوجه (F) بالنتيجة النجاح و للظهر (p) بالنتيجة الرسوب مثلا العينة $\{p, p, p, f, f, f, p, p, f, f, p, p, f, f, f\}$ تعبر عن 7 تلاميذ راسيبين و 8 ناجحين

التقويم

ملاحظة حول سير الحصة

ثانوية : طويري محمد – محمد بوضياف – المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
السنة الدراسية : 2019 – 2020
يوم :
المدة : ساعة.

الإستاذة:
فراحتي
المفوض

المكتسبات القبلية: المجموعات والعمليات عليها.
الكفاءات المستهدفة: مدخل إلى الإحتمالات، معرفة مصطلحات مختلفة (الحوادث وأنواعها، العمليات علي الحودث،...).

الأدوات المستعملة: الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المدة	عناصر الدرس	المراحل
	نش نضع في علبة 10 كرات مرقمة من 21 إلى 30. نسحب كرة واحدة بصفة عشوائية ونسجل رقمها ① عين مجموعة النتائج التي يمكن الحصول عليها في هذه التجربة العشوائية ② نعتبر الحادثتين • A "رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 3" • B "رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 4" عين مجموعة إمكانيات كل من هاتين الحادثتين ③ عين مجموعة إمكانيات كل من الحادثتين التاليتين: • "رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 3 ومضاعف للعدد 4 في آن واحد" • رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 3 أو مضاعف للعدد 4 مناقشة النش ① مجموعة النتائج التي يمكن الحصول عليها في هذه التجربة: $\Omega = \{21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29; 30\}$ ② • نعتبر الحادثة A "رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 3" مجموعة إمكانيات الحادثة A هي: $A = \{21; 24; 27; 30\}$ • نعتبر الحادثة B "رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 4" مجموعة إمكانيات الحادثة B هي: $B = \{24; 28\}$ ③ • نعتبر الحادثة C "رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 3 ومضاعف للعدد 4 في آن واحد" مجموعة إمكانيات الحادثة C هي: $C = A \cap B = \{24\}$ • نعتبر الحادثة D "رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 3 أو مضاعف للعدد 4 في آن واحد" مجموعة إمكانيات الحادثة D هي: $D = A \cup B = \{21; 24; 27; 28; 30\}$ مجموعة الإمكانيات : تعريف إمكانية تجربة عشوائية هي أية نتيجة ممكنة لهذه التجربة. مجموعة الإمكانيات هي مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة و نرمز إليها عادة بالحرف Ω. مثال (2) ✓ رمي قطعة نقد هي تجربة عشوائية نتائجها الممكنة هي ظهور الوجه أو الظهر. أي: $\Omega = \{F; P\}$ ✓ رمي زهر النرد هي تجربة عشوائية نتائجها الممكنة هي ظهور الأوجه الستة أي: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ الخلاصة : تعريف نسمي حادثة كل جزء من مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية أي مجموعة النتائج التي تتميز بنفس الخاصية.	مرحلة الإنطلاق التشخيص والاكتشاف بناء المعارف

مثال (3)

صندوق يحتوي على 10 قريصات مرقمة من 1 إلى 10. نسحب قريضة واحدة عشوائيا.
 ✓ مجموعة الإمكانات هي: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$
 ✓ A هي الحادثة "سحب قريضة تحمل رقم زوجي" أي: $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$

الخواص الخاصة :

✓ **العلامة الأكيدة:** هي Ω أي مجموعة كل النتائج الممكنة.
 ✓ **العلامة المستحيلة:** هي $\emptyset$ المجموعة الخالية (لا تحتوي على أي إمكانية).
 ✓ **العلامة البسيطة:** هي حادثة متكونة من نتيجة واحدة (عنصر وحيدا)، فهي مجموعة أحادية. تدعى حادثة أولية.

مثال (4)

✓ الحوادث البسيطة في رمي قطعة نقدية هي: $\{P\}$ ، $\{F\}$.
 ✓ الحوادث البسيطة في رمي زهر النرد هي: $\{1\}$ ، $\{2\}$ ، $\{3\}$ ، $\{4\}$ ، $\{5\}$ ، $\{6\}$

العمليات على الخواص :

تقاطع حادثتين :

تعريف

نسمي تقاطع الحادثتين A و B ونرمز إليه بـ $A \cap B$ الحادثة التي تحوي العناصر المشتركة بين الحادثتين A و B .

مثال (5)

✓ رمي زهر نرد غير مزيف ذو ستة أوجه.
 ✓ مجموعة الإمكانات هي: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
 ✓ A هي الحادثة "الحصول على وجه رقمه أكبر من 4"، أي: $A = \{4; 5; 6\}$
 ✓ B هي الحادثة "الحصول على وجه رقم زوجي"، أي: $A = \{2; 4; 6\}$
 ✓ الحادثة $A \cap B$ هي: "الحصول على وجه رقمه أكبر من 4 وزوجي"، أي: $A \cap B = \{4; 6\}$

العلاتان المنفصلتان (غير المتلائمتين):

تعريف

نسمي حادثتين منفصلتين (أو غير متلائمتين) A و B الحادثتين اللتين لا تشتركان في أي عنصر (أي نتيجة).
 أي $A \cap B = \emptyset$

مثال (6)

✓ رمي زهر نرد غير مزيف ذو ستة أوجه.
 ✓ A هي الحادثة "الحصول على وجه رقمه فردي"، أي: $A = \{1; 3; 5\}$
 ✓ B هي الحادثة "الحصول على وجه رقمه زوجي"، أي: $A = \{2; 4; 6\}$
 ✓ الحادثة $A \cap B$ هي: "الحصول على وجه رقمه فردي وزوجي"، أي: $A \cap B = \emptyset$
 ومنه A و B منفصلتان.

اتحاد حادثتين :

تعريف

نسمي اتحاد حادثتين A و B ونرمز إليه بـ $A \cup B$ الحادثة المتكونة من عناصر الحادثة A أو الحادثة B .

مثال (7)

رمي زهر نرد غير مزيف ذو ستة أوجه.
 $A = \{1; 3; 5\}$ هي الحادثة "الحصول على وجه رقمه فردي"، أي: $A = \{1; 3; 5\}$ ✓
 $B = \{3; 6\}$ هي الحادثة "الحصول على وجه رقمه مضاعف للعدد 3"، أي: $B = \{3; 6\}$ ✓
 $A \cup B$ هي: "الحصول على وجه رقمه فردي أو مضاعف للعدد 3" ✓
 ومنه: $A \cap B = \{1; 3; 5; 6\}$

الخاصة المعاكسة :

تعريف

نسمي الحادثة المعاكسة للحادثة (متممة أو مكملية الحادثة) A ونرمز لها بـ $\bar{A}$ أو A^c (نقرأ " لا A ") مجموعة العناصر التي تنتمي إلى Ω ولا تنتمي إلى A .

مثال (8)

في تجربة رمي زهر نرد غير مزيف ذو ستة أوجه.
 $A = \{1; 3; 5\}$ هي الحادثة "الحصول على وجه رقمه فردي"، أي: $A = \{1; 3; 5\}$ ✓
 $\bar{A} = \{2; 4; 6\}$ هي الحادثة "الحصول على وجه رقمه زوجي"، أي: $\bar{A} = \{2; 4; 6\}$ ✓

مبرهنة

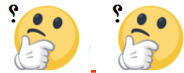
A و B حادثتان من تجربة عشوائية وبالتالي :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

برهان.

ليكن $x \in \overline{A \cup B}$ معناه $x \in \Omega - (A \cup B)$
 يكافئ $x \notin A$ و $x \notin B$
 يكافئ $x \in \bar{A}$ و $x \in \bar{B}$
 يكافئ $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$
 معناه $x \in \overline{A \cap B}$
 يكافئ $x \in (\Omega - A)$ أو $x \in (\Omega - B)$
 يكافئ $x \in \bar{A}$ أو $x \in \bar{B}$
 يكافئ $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$

□



تفسير

نرمي زهرة نرد متوازنة، ولتكن الحوادث التالية:

A "ظهور رقم أكبر تماماً من 3"

B "ظهور رقم أصغر تماماً من 6"

C "ظهور رقم زوجي"

① عين عناصر المجموعة Ω

② عين عناصر الحوادث A ، B و C

③ عين مجموعة الحوادث التالية $A \cap B$ ، $A \cap C$ ، $A \cup B$ ، $A \cup C$ ، $A \cap B \cap C$

④ عين مجموعة الحوادث التالية $\bar{A}$ ، $\bar{B}$ ، $\bar{A} \cup \bar{B}$ ، $\bar{A} \cap \bar{B}$

التقويم

ملاحظة حول سير المحصة

ثانوية : طويري محمد – محمد بوضياف –
السنة الدراسية : 2019 – 2020
يوم :
المدة : ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : الإحتمالات.
المحور : الإحتمالات.
الموضوع : قانون احتمال.

الإستراتيجية:
فراغية
المفوض

المكتسبات القبلية: التجربة العشوائية. مجموعة الامكانيات. الحوادث والعمليات عليها.
الكفاءات المستهدفة: وصف تجربة عشوائية بسيطة، عدد النتائج الممكنة فيها منته حساب قانون إحتمال تجربة عشوائية.
الأدوات المستعملة: الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصر الدرس	المدة																																																				
مرحلة الإنطلاق	نش : يحتوي كيس على 5 كرات متماثلة (لا نفرق بينها عند اللمس) مرقمة من 2 إلى 6. نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد ونسجل مجموع رقميهما. ① هل يمكن الحصول على 4؟ على 6؟ ② ماهي كل النتائج المختلفة التي يمكن الحصول عليها؟ ③ ماهو عدد الطرائق الممكنة للحصول على 8؟ ④ أحسب عدد الطرائق الكلية الممكنة لسحب كرتين في آن واحد. ⑤ علما أن احتمال الحصول على 8 هو نسبة عدد طرائق الحصول على 8 إلى عدد الطرائق الكلية. • أحسب احتمال الحصول على 8. ⑥ لحساب احتمال كل النتائج الممكنة أنقل ثم اكمل الجدول أدناه حيث: x_i نتيجة المجموع الممكن الحصول عليها و P_i احتمال النتيجة P_i الموافقة. <table><tr><td>x_i</td><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>P_i</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	x_i				8				P_i																																												
	x_i				8																																																	
P_i																																																						
التشخيص والاكتشاف	مناقشة النش : عندما نسحب كرتين في آن واحد فإن النتيجة تكون على شكل ثنائية مؤلفة من عددين دون ترتيب وبلا تكرار مثل (2;3) والمجموع في هذا المثال هو 5 ، وعليه: ① لايمكن الحصول على 4 لأن: العدد 4 لا يكتب كمجموع رقمين من الأرقام التي تحملها الكرات التي داخل الكيس. ونحصل على أصغر مجموع بسحب الكرتين التين تحملان الرقمين 2 و 3 هو 5. يمكن الحصول على 6 بسحب الكرتين اللتين تحملان الرقمين 2 و 4. ② النتائج المختلفة التي يمكن الحصول عليها: $\Omega = \{5;6;7;8;9;10;11\}$ ③ بما أن $3+5=2+6=8$ فإنه يمكن الحصول على 8 بطريقتين إحداهما بسحب الكرتين اللتين تحملان الرقمين 2 و 6 ، والأخرى بسحب الكرتين اللتين تحملان الرقمين 3 و 5. ④ لحساب عدد الطرائق الكلية الممكنة لسحب كرتين في آن واحد من الكيس يمكن إتباع طرائق العد البسيطة مثل إستعمال الشجرة أو الجدول والحصول على: <table><tr><td>+</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>×</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>3</td><td>×</td><td>×</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr><tr><td>4</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>5</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>11</td></tr><tr><td>6</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td></tr></table> ومنه عدد الطرائق الكلية يساوي 10. ⑤ بما أن عدد الطرائق الكلية هو 10 ، وعدد الطرائق الحصول على 8 هو 2 فإن إحتمال الحصول على 8 هو: $\frac{1}{5}$. ⑥ حساب احتمال كل النتائج الممكنة. <table><tr><td>x_i</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>P_i</td><td>$\frac{1}{10}$</td><td>$\frac{1}{10}$</td><td>$\frac{1}{5}$</td><td>$\frac{1}{5}$</td><td>$\frac{1}{5}$</td><td>$\frac{1}{10}$</td><td>$\frac{1}{10}$</td></tr></table>	+	2	3	4	5	6	2	×	5	6	7	8	3	×	×	7	8	9	4	×	×	×	9	10	5	×	×	×	×	11	6	×	×	×	×	×	x_i	5	6	7	8	9	10	11	P_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	
	+	2	3	4	5	6																																																
2	×	5	6	7	8																																																	
3	×	×	7	8	9																																																	
4	×	×	×	9	10																																																	
5	×	×	×	×	11																																																	
6	×	×	×	×	×																																																	
x_i	5	6	7	8	9	10	11																																															
P_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$																																															

قانون احتمال:

تعريف

لنكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة العشوائية: $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ، نعرف قانون احتمال على المجموعة Ω بإرفاق كل قيمة x_i من Ω بعدد موجب p_i بحيث: $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ مع: $0 \leq p_i \leq 1$ ونمثل قانون الاحتمال بالجدول المرفق

x_n	x_i	...	x_2	x_1
p_n	p_i	...	p_2	p_1

نمذجة تجربة عشوائية يعني إرفاقها بمجموعة إمكانيات Ω و قانون احتمال P على Ω

مثال (9)

في تجربة رمي زهرة نرد لدينا: $p(1) = p(3) = p(4)$ و $p(2) = 2p(3)$ و $p(5) = p(6) = 3p(4)$ ✓ عرف قانون الاحتمال لهذه التجربة

تساوي الاحتمال:

تعريف

لنكن $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية. إذا كان لكل الإمكانيات نفس الاحتمال (متساوية الاحتمال) نقول إن قانون الاحتمال متساوي الاحتمال أو متساوي التوزيع. بمعنى: إذا كان n عدد عناصر Ω فإن احتمال وقوع كل عنصر x_i من Ω هو: $P_i = \frac{1}{n}$. حيث: $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ مع $0 \leq p_i \leq 1$ و $p_1 = p_2 = \dots = p_n$

ملاحظة:

- بعض التعبيرات التي تدل على وضعية تساوي احتمال:
- ❖ نختر بصفة عشوائية.
- ❖ رمي قطعة نقدية متوازنة.
- ❖ رمي زهرة نرد غير مزيفة.
- ❖ سحب كريات أو قريصات داخل كيس لانفرق بينهما عند اللمس.

مثال (10)

- ✓ عند رمي قطعة نقدية، نقبل أن احتمال ظهور الوجه أو الظهر يساوي $\frac{1}{2}$
- ✓ عند رمي زهر النرد ذي 6 أوجه، فإن احتمال الحصول على أحد الأوجه هو $\frac{1}{6}$

عمل منزلي

تمارين 13 - 18 - 19 - 30 الصفحة 389 - 390

بناء معارف

التقويم

ملاحظة حول سير المحصة

ثانوية : طويري محمد – محمد بوضياف –
السنة الدراسية : 2019 – 2020
يوم :
المدة : ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : الإحتمالات.
المحور : الإحتمالات.
الموضوع : خواص الاحتمالات.

الإستاذة:
فراحتي
المفوض

المكتسبات القبلية: التجربة العشوائية. مجموعة الامكانيات. الحوادث والعمليات عليها.
الكفاءات المستهدفة: حساب احتمال حادثة بسيطة. استعمال خواص الاحتمالات في حساب احتمالات بعض الحوادث المركبة. التعرف شجرة الاحتمالات.
الأدوات المستعملة: الكتاب المدرسي ، مراجع، الأنترنت.

المدة	عناصر الدرس	المراحل														
	نش يحتوي صندوق على 20 كرة متماثلة (لا نفرق بينها عند اللمس). حيث 10 منها بيضاء (B) و 6 سوداء (N) و 4 حمراء (R). نسحب من الصندوق كرة واحدة. ① عين مجموعة النتائج التي يمكن الحصول عليها في هذه التجربة العشوائية. ② عين مجموعة امكانيات الحوادث التالية وحدد عدد عناصر كل منها : • الحادثة A الكرة المسحوبة بيضاء . • الحادثة B الكرة المسحوبة سوداء . • الحادثة C الكرة المسحوبة بيضاء أو سوداء . • الحادثة D الكرة المسحوبة ليست بيضاء . • الحادثة E الكرة المسحوبة صفراء . ③ أحسب نسبة عدد عناصر كل حادثة إلى عدد عناصر مجموعة الإمكانيات. مناقشة النش ① مجموعة النتائج التي يمكن الحصول عليها في هذه التجربة: $\Omega = \{B_1; B_2; B_3; B_4; B_5; B_6; B_7; B_8; B_9; B_{10}; N_1; N_2; N_3; N_4; N_5; N_6; R_1; R_2; R_3; R_4\}$ ② • مجموعة إمكانيات الحادثة A هي: $A = \{B_1; B_2; B_3; B_4; B_5; B_6; B_7; B_8; B_9; B_{10}\}$ وعددتها: 10 • مجموعة إمكانيات الحادثة B هي: $B = \{N_1; N_2; N_3; N_4; N_5; N_6\}$ وعددتها: 6 • مجموعة إمكانيات الحادثة C هي: $C = A \cup B = \{B_1; B_2; B_3; B_4; B_5; B_6; B_7; B_8; B_9; B_{10}; N_1; N_2; N_3; N_4; N_5; N_6\}$ وعددتها: 16 • مجموعة إمكانيات الحادثة D هي: $D = \bar{A} = \{N_1; N_2; N_3; N_4; N_5; N_6; R_1; R_2; R_3; R_4\}$ و عددتها: 10 • مجموعة إمكانيات الحادثة E هي: $E = \emptyset$ و عددتها: 0 ③ حساب نسبة عدد عناصر كل حادثة إلى عدد عناصر مجموعة الإمكانيات. هو ما يعرف بإحتمال حادثة ومنه: $P(E) = \frac{0}{20} = 0 \quad P(D) = \frac{1}{2} \quad P(C) = \frac{4}{5} \quad P(B) = \frac{3}{10} \quad P(A) = \frac{1}{2}$ احتمال حادثة : تعريف مجموعة الإمكانيات لتجربة عشوائية مرفقة بقانون احتمال و A حادثة. احتمال الحادثة A يرمز له بـ $P(A)$ ويساوي مجموع احتمالات الحوادث الأولية للحادثة A مثال (11) النتائج المحصل عليها بعد رمي زهر نرد مزيف العديد من المرات، سمحت باقتراح قانون الاحتمال المعروف بالجدول كما يلي: <table border="1"> <tr> <td>x_i</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>P_i</td> <td>$\frac{1}{12}$</td> <td>$\frac{1}{6}$</td> <td>$\frac{1}{12}$</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> <td>$\frac{1}{3}$</td> <td>$\frac{1}{12}$</td> </tr> </table> ✓ احتمال الحصول على رقم فردي هو: $P(\{1;3;4\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$	x_i	1	2	3	4	5	6	P_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	مرحلة الإنطلاق التشخيص والاكتشاف بناء المعارف
x_i	1	2	3	4	5	6										
P_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$										

نتيجة

في حالة تساوي الاحتمال ، كل مخرج (إمكانية) x_i له احتمال $P_i = \frac{1}{n}$ حيث $P_i = \frac{1}{n}$
إذا كانت الحادثة A تحوي على m عنصر يكون احتمالها $P(A)$ هو $P(A) = m \times \frac{1}{n}$ أي أن

$$P(A) = \frac{\text{عناصر عدد } A}{\text{عناصر عدد } \Omega}$$

ملاحظة:

نسمي عناصر الحادثة A الحالات المواتية (أو الملائمة) لهذه الحادثة وعناصر Ω الحالات الممكنة.
تسمى النظرية السابقة أيضا قانون لبلاس (Laplace)

مثال (12)

صندوق يحتوي على 8 قريصات مرقمة من 5 إلى 12. نسحب قريضة واحدة عشوائيا.
ونعتبر الحادثة "سحب قريضة تحمل رقم زوجي" والحادثة "سحب قريضة تحمل رقم مضاعف لـ 3"
✓ لدينا: $\Omega = \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ ، $A = \{6; 8; 10; 12\}$ ، $B = \{6; 9; 12\}$
✓ ومنه: $p(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ و $p(B) = \frac{3}{8}$

خواص الاحتمالات:

خواص

1. تكون Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية ، نزود Ω بقانون الاحتمال P
من أجل كل حادثة A فإن: $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\emptyset) = 0$ و $P(\Omega) = 1$
3. إذا كانت A و B حادثتين كيفيتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. إذا كانت A و B حادثتين غير متلائمتين ($A \cap B = \emptyset$) فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
5. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ حيث $\bar{A}$ هي الحادثة المعاكسة للحادثة A
6. إذا كانت الحادثة A جزءا من الحادثة B ($A \subset B$) فإن: $P(A) \leq P(B)$

الحالتان المستقلتان:

تعريف

نقول عن حادثتين A و B أنهما مستقلتين إذا وفقط إذا كان: $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

نشاط 04:

نلخص احتمال نجاح كل من أحمد و صالح في البكالوريا في الجدولين التاليين:

y_i	نجاح صالح	رسوب صالح
$p(y_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	نجاح أحمد	رسوب أحمد
$p(x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

1. لخص الجدولين السابقين في مخطط واحد مناسب
2. ما احتمال نجاح أحمد و صالح معا ؟
3. ما احتمال أن ينجح واحد منهما فقط ؟

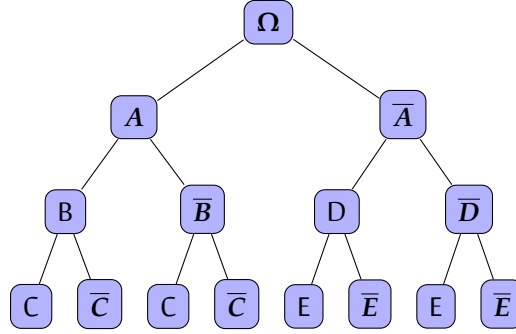
شجرة الاحتمالات:

تعريف

شجرة الاحتمالات هي مخطط موجه ومتوازن يمكن تلخيص وضعية في مبيدان الاحتمالات البسيطة

وصف ومفردات

- يمكن وصف شجرة الإحتمالات على النحو التالي:
- الغصن الابتدائي الأول يمثل الحادثة A وإحتمالها $p(A)$ والغصن الابتدائي الثاني الحادثة العكسية $\bar{A}$ وإحتمالها $p(\bar{A})$
- الغصن المنطلق من العقدة A نحو B أو $\bar{B}$ يسمى غصن ثانوي.
- المسار يتكون من عدة أغصان متتابعة مثلا $A \rightarrow B \rightarrow C$ هو مسار حادثة



قواعد الحساب بشجرة الإحتمالات :

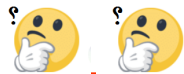
طريقة

- ❖ لحساب الإحتمالات مستعملا الشجرة يجب معرفة القواعد الآتية :
- ❖ مجموع إحتمالات الغصون الابتدائية يساوي 1
- ❖ مجموع كل إحتمالات الغصون الثانوية المنطلقة من نفس العقدة يساوي 1
- ❖ احتمال مسار ما هو جداء إحتمالات الأغصان المؤدية إليه .
- ❖ لحساب احتمال حادثة ما نتبع المسارات المؤدية إليها عبر غصن الشجرة ويكون احتمال هذه الحادثة يساوي مجموع إحتمالات هذه المسارات .

مثال (13)

- نرمي قطعة نقود متوازنة 3 مرات متتابعة و نسجل النتيجة " وجه F " ، " ظهر P " ولتكن الحادثة " الحصول على ظهريين ووجه " ✓
- أنشئ مخطط يوضح كل الحالات. ثم استنتج احتمال الحادثة A

التقويم



تفسير

- نفرض أن احتمال ميلاد ذكر واحتمال ميلاد أنثى في عائلة ما متساويين .
- ما احتمال أن يكون في عائلة ذات 4 أفراد.
- ① البكر هو الذكر (المولود الأول) .
- ② عدد الإناث يساوي عدد الذكور.
- ③ يوجد إناث فقط.

عمل منزلي

تمارين 11 ← 17 الصفحة 390 تمارين 22 ← 30 الصفحة 391

ملاحظة حول سير المحصة

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : الإحتمالات.
المحور : الإحتمالات.
الموضوع : الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري لقانون الاحتمال

ثانوية : طويري محمد – محمد بوضياف –
السنة الدراسية : 2019 – 2020
يوم :
المدة : ساعة.

الإستاذة:
 فرائد الحنيفة
 الملفة

- المكتسبات القبلية: نمذجة تجربة عشوائية، مجموعة الإمكانات، الحوادث والعمليات عليها، تعيين قانون إحتمال.
 الكفاءات المستهدفة: حساب الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري لقانون احتمال.
 الأدوات المستعملة: الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصر الدرس	المدة																								
مرحلة الإنطلاق التشخيص و الإكتشاف	نشأته : لتكن التجربة العشوائية التالية: رمي زهرة نرد غير مزيفة 50 مرة. 1 إملأ الجدول التالي حيث f_i تمثل التواترات التجريبية و p_i تمثل التواترات النظرية (الاحتمالات). <table><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>e_i</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>f_i</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>p_i</td></tr></table> 2 احسب الوسط الحسابي للسلسلة المحصلة. ثم احسب العدد $E = \sum_{i=1}^n p_i x_i$. ماذا تستنتج؟ 3 احسب التباين للسلسلة المحصلة، ثم أحسب العدد $v = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E)^2$ 4 احسب الجذر التربيعي لـ V. <u>الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري لقانون احتمال :</u> لتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ وليكن p احتمالا على Ω نرمز بالرمز p_i للاحتمال $p_i = p(x_i)$ <u>الأمل الرياضي :</u>	6	5	4	3	3	2	1	e_i								f_i								p_i	
	6	5	4	3	3	2	1	e_i																		
							f_i																			
							p_i																			
بناء معارف	تعريف 01 الأمل الرياضي لقانون الاحتمال p هو العدد E المعروف بـ $E = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ ملخصه : ❖ الأمل يمثل الوسط الحسابي في سلسلة إحصائية إذا اعتبرنا قيم الطبع هي عناصر Ω والتواترات النظرية هي القيم p_i <u>التباين :</u> تعريف 02 تباين قانون الإحتمال p هو العدد v حيث : $v = p_1(x_1 - E)^2 + p_2(x_2 - E)^2 + ... + p_n(x_n - E)^2$ أي : $v = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E)^2$ ملخصه : ❖ يمكن حساب التباين بالعلاقة $V = \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - E^2 \right)$																									

الانحراف المعياري لقانون الإحتمال p هو الجذر التربيعي لتباينه $\sigma = \sqrt{V}$.

مثال (14)

ليكن قانون إحتمال الآتي:

x_i	-6	-5	-4	4	5	8
P_i	0.1	0.2	0.05	0.4	0.05	0.2

✓ الأمل الرياضي هو:

$$E = \sum_{i=1}^6 p_i x_i = -6(0.1) - 5(0.2) - 4(0.05) + 4(0.4) + 5(0.05) + 8(0.2) = 1.65$$

✓ التباين هو:

$$v = \sum_{i=1}^6 (x_i - E)^2 p_i = (-6 - 1.65)^2(0.1) + \dots + (8 - 1.65)^2(0.2) = 34.4$$

✓ الانحراف المعياري هو: $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{34.4}$



تعبير

نرمي زهرة نرد غير مزيفة تحمل أوجه الأرقام التالية 1، 2، 2، 3، 3، 3 و نسجل الرقم الظاهر .
✓ أحسب الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري لقانون الاحتمال الناتج.

عمل منزلي

تمارين 42 - 43 الصفحة 393

ملاحظة حول سير الحصة

ثانوية: طويري محمد - محمد بوضيف -
السنة الدراسية: 2019 - 2020
يوم:
المدة: ساعة.

المستوى: السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم: الإحتمالات.
المحور: الإحتمالات.
الموضوع: المتغير العشوائي.

الإستاذة:
فراحتي
اللفوظ

المكتسبات القبلية: نمذجة تجربة عشوائية، مجموعة الإمكانات، الحوادث والعمليات عليها، تعيين قانون إحتمال.
الكفاءات المستهدفة: تعيين قانون الاحتمال لمتغير عشوائي، وحساب الأمل الرياضي، الانحراف المعياري والتباين له.
الأدوات المستعملة: الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصر الدرس	المدة										
مرحلة الإنطلاق	نش: يحتوي كيس على 4 كريات حمراء و 3 بيضاء و 5 خضراء ، نسحب كرة واحدة عشوائيا ويسجل رقمها ، يريح الشخص 3 دنانير إذا كانت الكرة خضراء و 5 دنانير إذا كانت الكرة بيضاء ويخسر دنانيرين إذا كانت الكرة حمراء. نعتبر الدالة X والتي تعرف مقدار الربح أو الخسارة 1 ماهي مجموعة الامكانيات التي يمكن الحصول عليها؟ 2 عين القيم الممكنة للدالة X ، ثم عرف قانون احتمال الدالة X 3 أحسب كلا من $E(X)$ ، $V(X)$ و $\sigma(X)$ حيث: $\sigma(X) = \sqrt{V} \quad , \quad V = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 P_i \quad , \quad E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P_i$ 4 هل اللعبة في صالح اللاعب؟ مناقشة النش: 1 مجموعة النتائج الممكنة في هذه التجربة: $\Omega = \{R_1; R_2; R_3; R_4; B_1; B_2; B_3; V_1; V_2; V_3; V_4; V_5\}$ 2 القيم الممكنة ل X هي: $X = \{-2; 3; 5\}$. (الدالة العددية X المعرفة على Ω تسمى متغيرا عشوائيا) • قانون إحتمال الدالة X: الحادثة "$X = -2$" هي "سحب كرية حمراء" عدد الكريات الحمراء 4 و عدد كل الكريات 12 (حالة تساوي الاحتمال) ومنه: $p(X = -2) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ بنفس الطريقة نجد: $p(X = 5) = \frac{1}{4}$ و $p(X = 3) = \frac{5}{12}$ 3 حساب كلا من $E(X)$ ، $V(X)$ و $\sigma(X)$ $E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P_i = -2(\frac{1}{3}) + 3(\frac{5}{12}) + 5(\frac{1}{4}) \simeq 1.83$ • $\sigma(X) = \sqrt{7.97} \simeq 2.82$ • $V = \sum_{i=1}^3 (x_i - E(X))^2 P_i \simeq 7.97$ • 4 بما أن $E(X) > 0$ فإن اللعبة في مضلحة اللاعب. المتغير العشوائي: تعريف $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ مجموعة النتائج الممكنة لتجربة العشوائية، نسمي المتغير العشوائي كل دالة عددية معرفة من Ω نحو $\mathbb{R}$. قانون الإحتمال لمتغير عشوائي: تعريف $I = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ مجموعة قيم المتغير العشوائي X ، الدالة المعرفة على I والتي ترفق بكل قيمة x_i العدد الحقيقي الموجب $p(X = x_i)$ تسمى قانون احتمال المتغير العشوائي ونعرفها بالجدول التالي <table><tr><td>x</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>...</td><td>x_n</td></tr><tr><td>$p(X = x)$</td><td>p_1</td><td>p_2</td><td>...</td><td>p_n</td></tr></table> <td>التشخيص والاكتشاف</td>	x	x_1	x_2	...	x_n	$p(X = x)$	p_1	p_2	...	p_n	التشخيص والاكتشاف
x	x_1	x_2	...	x_n								
$p(X = x)$	p_1	p_2	...	p_n								
بناء المعارف												

مثال (15)

نرمي زهرة نرد سليمة اوجهها مرقم من 1 الى 6 بحيث :
نربح 10DA اذا ظهر الرقم 1 و 50DA اذا ظهر الرقم 6 ونخسر 20DA اذا ظهر رقم من الارقام الباقية الاخرى

حل

نضع X متغير عشوائي الذي يرفق بكل امكانية قيمة الربح او الخسارة الموافقة لها
ومنه مجموعة المخارج هي: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ومنه $E' = X(E) = \{-20, 10, 50\}$
ومنه $p_1 = p(X = 50) = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$ ، $p_2 = p(X = 10) = p(\{1\}) = \frac{1}{6}$ ،
 $p_3 = p(X = -20) = p(\{2, 3, 4, 5\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
ومنه قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

x_i	-20	10	50
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

الأمل الرياضي للمتغير عشوائي :

تعريف

X المتغير العشوائي لتجربة عشوائية و $p(X_i)$ احتمال متغير كل حادثة، نسمي العدد المعرف بـ

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

بالأمل الرياضي للمتغير X ونرمز له بالرمز E

التباين للمتغير عشوائي :

تعريف

X المتغير العشوائي لتجربة عشوائية و $p(X_i)$ احتمال متغير كل حادثة، نسمي العدد المعرف بـ

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i$$

بالتباين للمتغير X ونرمز له بالرمز V

مبرهنة

X المتغير العشوائي لتجربة عشوائية و $p(X_i)$ احتمال متغير كل حادثة، يمكن أن نعرف التباين بالعلاقة التالية

$$V(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - E(X)^2$$

الانحراف المعياري للمتغير عشوائي :

تعريف

X المتغير العشوائي لتجربة عشوائية و $p(X_i)$ احتمال متغير كل حادثة، نسمي العدد المعرف بـ

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

بالانحراف المعياري للمتغير X ونرمز له بالرمز σ



تصحيح

X متغير عشوائي قانون احتماله موزع كالآتي

X	-1	0	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	α	α	$\frac{1}{3}$

- ① عين قيمة العدد α
- ② أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي لـ X
- ③ أحسب $V(X)$ تباين X ثم الإنحراف المعياري $\sigma(X)$

عمل منزلي

- تمارين 45 ← 47 الصفحة 393
- مسائل الصفحة 394 - 395 - 396

ملاحظة حول سير المحصة