

صفحة : منارة جيوخ العربي للرياضيات
<https://t.me/mathjiouakhlarbi>



مُدَرِّس مادّة الرِّياضيَّات
 الأستاذ : جِيُوخ العربي.

التَّمرين الشَّامل : الأوَّل.
 المُدَّة الزَّمنيَّة : ساعة واحدة.



اللَّقْب والاسم :
 القسم :

ملاحظة هامة ! يُسمح باستعمال الآلة الحاسبة العلمية غير المبرمجة.

نص التَّمرين :

لتكن الأعداد الحقيقيّة A ، B ، C ، حيثُ :

$$A = 3 \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{72}} - \sqrt{\frac{192}{243}}$$

$$B = \frac{2^5 \times 10^7 \times 3 \times 10^{-8} \times 4}{2^6 \times (10^3)^{-3} \times 8}$$

$$C = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} \div \frac{1}{-38}$$

$$D = \sqrt{60} + 3\sqrt{240} - 4\sqrt{3} (2\sqrt{5} - 1)$$

1. هلّ العددا 243 و 192 أوليان فيما بينهما؟ (دُون إجراء أيّ حساب).

2. أ. أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 243 و 192.

ب. بطريقة ثانية، أجب عن السؤال 1.

ج. أكتب الكسر $\frac{192}{243}$ على أبسط شكل مُمكن.

3. أ. أكتب $\sqrt{8}$ و $\sqrt{72}$ على الشكل $a\sqrt{2}$ ، حيثُ a عددٌ طبيعيّ.

ب. يَبَيِّنْ أَنَّ : A عددٌ ناطقٌ.

4. جِدْ الكتابة العلميّة للعدد B .

5. أَحْسِبْ العدد C واكتبه على أبسط شكل مُمكن.

6. أ. اُكْتُبْ العدد D على الشكل $a\sqrt{C} + b\sqrt{\frac{C}{5}}$ ، حَيْثُ : a و b عددان طبيينان، يُطْلَبُ تَعْيِينُهُمَا.

ب. يَبَيِّنْ أَنَّ : $D = 2\sqrt{3} (3\sqrt{5} + 2)$.

ج. يَبَيِّنْ أَنَّ : $D (3\sqrt{5} - 2) = 82\sqrt{3}$.

د. اجْعَلْ مقام النّسبة $\frac{1}{D (3\sqrt{5} - 2)}$ عددًا ناطقًا.



♥ ♥ ♥ نَجْمٌ بِحُكْمٍ بَتَفَوُّقٍ هُوَ غَايَةُ نِزَالِ هَؤُلَاءِ

التّصحيح المفصل للتمرين - الشّامل الأوّل في مادّة الرّياضيّات.

المستوى : الرّابع المتوسّط. أستاذ المادّة : جَيَوْخ العربي.

حل التّمرين :

1. هل العددين 672 و 364 أوليان فيما بينهما؟ :

العدد 243 يقبل القسمة على 3، لأن مجموع أرقامه $2 + 4 + 3 = 9$ مضاعفات 3. (1)
العدد 192 يقبل القسمة على 3، لأن مجموع أرقامه $1 + 9 + 2 = 12$ مضاعفات 3. (2)
إذن، نستنتج من (1) و (2) أنّ 3 قاسم مشترك للعددين 243 و 192 ويختلف عن 1، أي أنّ :
 $PGCD(243; 192) \neq 1$ فالعددين 243 و 192 ليسا أوليين فيما بينهما.

2. أ. حساب $PGCD(243; 192)$:

● لنحسب : $PGCD(243; 192)$

◀ بتطبيق خوارزمية إقليدس، نجد :

$$243 = 192 \times 1 + 51$$

$$192 = 51 \times 3 + 39$$

$$51 = 39 \times 1 + 12$$

$$39 = 12 \times 3 + 3$$

$$12 = 3 \times 4 + 0$$

إذن : $PGCD(243; 192) = 3$

☞ لأن آخر باق غير معدوم هو : 3.

ب. بطريقة ثانية، إجابة عن السؤال الأوّل :

بما أنّ : $PGCD(243; 192) = 3 \neq 1$ فالعددين

243 و 192 ليسا أوليين فيما بينهما.

ج. كتابة الكسر $\frac{192}{243}$ على أبسط شكل ممكن :

$$\frac{192}{243} = \frac{192 \div 3}{243 \div 3} = \frac{64}{81}$$

3. أ. كتابة $\sqrt{8}$ و $\sqrt{72}$ على الشكل $a\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{8} &= \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \\ \sqrt{72} &= \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

ب. تبين أنّ : A عدد ناطق :

$$\begin{aligned} A &= 3 \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{72}} - \sqrt{\frac{192}{243}} = 3 \frac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{64}{81}} \\ &= \frac{3 \times 2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}} = \frac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} - \frac{8}{9} = 1 - \frac{8}{9} \\ &= \frac{1 \times 9 - 1 \times 8}{1 \times 9} = \frac{9 - 8}{9} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

بما أنّ : $\frac{1}{9}$ عدد ناطق، فإنّ : A عدد ناطق.

4. إيجاد الكتابة العلميّة للعدد B :

$$\begin{aligned} B &= \frac{2^5 \times 10^7 \times 3 \times 10^{-8} \times 4}{2^6 \times (10^3)^{-3} \times 8} \\ &= \frac{2^5 \times 3 \times 4}{2^6 \times 8} \times \frac{10^7 \times 10^{-8}}{(10^3)^{-3}} \\ &= \frac{32 \times 12}{64 \times 8} \times \frac{10^{7+(-8)}}{10^{3 \times (-3)}} = \frac{384}{512} \times \frac{10^{-1}}{10^{-9}} \\ &= 0,75 \times 10^{-1-(-9)} = 7,5 \times 10^{-1} \times 10^8 \\ &= 7,5 \times 10^{-1+8} = 7,5 \times 10^7 \end{aligned}$$

5. حساب العدد C :

$$\begin{aligned} C &= \frac{7}{3} - \frac{1}{3} \div \frac{1}{-38} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{-38}{1} \\ &= \frac{7}{3} - \frac{1 \times (-38)}{3 \times 1} = \frac{7}{3} - \frac{-38}{3} \\ &= \frac{7 - (-38)}{3} = \frac{7 + 38}{3} \\ &= \frac{45}{3} = 15 \end{aligned}$$



ج. تَبَيِّنْ أَنَّ : $D(3\sqrt{5} - 2) = 82\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} D(3\sqrt{5} - 2) &= 2\sqrt{3} \left(\underbrace{3\sqrt{5}}_{=a} + \underbrace{2}_{=b} \right) \left(\underbrace{3\sqrt{5}}_{=a} - \underbrace{2}_{=b} \right) \\ &= 2\sqrt{3} \left[(3\sqrt{5})^2 - (2)^2 \right] \\ &= 2\sqrt{3} \left[(3)^2 (\sqrt{5})^2 - 4 \right] \\ &= 2\sqrt{3} [9 \times 5 - 4] \\ &= 2\sqrt{3} (45 - 4) \\ &= 2\sqrt{3} (41) \\ &= 82\sqrt{3} \end{aligned}$$

د. جعل مقام $\frac{1}{D(3\sqrt{5} - 2)}$ عددًا ناطقًا :

$$\begin{aligned} \frac{1}{D(3\sqrt{5} - 2)} &= \frac{1}{82\sqrt{3}} = \frac{(1)(\sqrt{3})}{(82\sqrt{3})(\sqrt{3})} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{82 \times (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{82 \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{246} \end{aligned}$$

وَقَفَّكُمْ اللَّهُ وَلَا تَنْسُونَا بِالْعَمَاءِ وَجَزَاكُمْ اللَّهُ خَيْرًا.

6. كتابة العدد D على الشكل $a\sqrt{c} + b\sqrt{\frac{c}{2}}$

لَمَّا كَانَ : $C = 15$ ، فيكون، لدينا :

$$a\sqrt{c} + b\sqrt{\frac{c}{2}} = a\sqrt{15} + b\sqrt{3}$$

في الحقيقة، لدينا :

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{60} + 3\sqrt{240} - 4\sqrt{3} (2\sqrt{5} - 1) \\ &= \sqrt{4 \times 15} + 3\sqrt{16 \times 15} - 4\sqrt{3} (2\sqrt{5}) \\ &\quad - 4\sqrt{3} (-1) \\ &= \sqrt{4} \times \sqrt{15} + 3\sqrt{16} \times \sqrt{15} - \\ &\quad (4 \times 2) (\sqrt{3} \times \sqrt{5}) - 4(-1)\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{15} + 3 \times 4\sqrt{15} - 8\sqrt{3 \times 5} + 4\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{15} + 12\sqrt{15} - 8\sqrt{15} + 4\sqrt{3} \\ &= (2 + 12 - 8) \sqrt{15} + 4\sqrt{3} \\ &= 6\sqrt{15} + 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

مع : $a = 6$ و $b = 4$

ب. تَبَيِّنْ أَنَّ : $D = 2\sqrt{3} (3\sqrt{5} + 2)$

○ طريقة 01 :

a, b, c, d أعداد حقيقية.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} (3\sqrt{5} + 2) &= (2\sqrt{3}) (3\sqrt{5}) + (2\sqrt{3}) (2) \\ &= (2 \times 3) (\sqrt{3} \times \sqrt{5}) + (2 \times 2) \sqrt{3} \\ &= 6\sqrt{3 \times 5} + 4\sqrt{3} \\ &= \underbrace{6\sqrt{15} + 4\sqrt{3}}_{=D} \\ &= D \end{aligned}$$

○ طريقة 02 :

$$\begin{aligned} D &= 6\sqrt{15} + 4\sqrt{3} = 2 \times 3\sqrt{3 \times 5} + 2 \times 2\sqrt{3} \\ &= 2 \times 3\sqrt{3} \times \sqrt{5} + 2 \times (2\sqrt{3}) \\ &= 3 (2\sqrt{3}) \times \sqrt{5} + 2 (2\sqrt{3}) \\ &= (2\sqrt{3}) (3\sqrt{5} + 2) \end{aligned}$$