

النهايات

حساب النهايات :

$\frac{\infty}{0} = \infty$	$\frac{a}{0} = \infty \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$\frac{a}{\infty} = 0$
$\frac{0}{\infty} = 0$	$\frac{0}{a} = 0 \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	

1 حالات عدم التعيين : $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, +\infty - \infty, -\infty + \infty, 0 \times \infty$

2 لإزالة حالة عدم التعيين يمكن أن تتبع إحدى الطرق التالية : الإختزال أو التحليل أو المرافق أو العدد المشتق .

النهايات والنسب :

f, g, h دوال عددية معرفة على المجال I و l عدد حقيقي .

إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$ وكانت $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

من أجل كل x من I فإن : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

المستقيما والمقاربة (α محدد حقيقي ثابت) :

1 المستقيم المقارب الموازي لمحور الترتيب :

إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \infty$ فإن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الترتيب

حيث $x = \alpha$ معادلة له .

2 المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل :

إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$ فإن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل

حيث $y = \alpha$ معادلة له .

3 المستقيم المقارب المائل :

إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ فانه يحتمل وجود مستقيم مقارب مائل معادلته :

$y = ax + b$

طريقة إثبات أن المستقيم الذي معادلته : $y = ax + b$ مقارب مائل للمنحني (C_f)

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$

مقارب مائل للمنحني (C_f) .

4 دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة الى المستقيم المقارب المائل (δ) الذي معادلته

$y = ax + b$

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - (ax + b)$

• إذا كان $f(x) - (ax + b) > 0$ فإن (C_f) يقع فوق (Δ) .

• إذا كان $f(x) - (ax + b) < 0$ فإن (C_f) يقع تحت (Δ) .

• إذا كان $f(x) - (ax + b) = 0$ فإن (C_f) يقطع (Δ) .

الإستمرارية

التفسير البياني للإستمرار :

تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون

رفع القلم .

مبرهنة 1 القيم المتوسطة :

ليكن k عدد حقيقي . المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[a; b]$ إذا

كان :

1 f مستمرة على المجال $[a; b]$

2 $f(a) < k < f(b)$

مبرهنة 2 القيم المتوسطة :

ليكن k عدد حقيقي . المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a; b]$ إذا كان

:

1 f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a; b]$

2 $f(a) < k < f(b)$

نتيجة 1 لمبرهنة القيم المتوسطة :

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[a; b]$ إذا كان :

1 f مستمرة على المجال $[a; b]$

2 $f(a) \cdot f(b) < 0$

نتيجة 2 لمبرهنة القيم المتوسطة (وحداية الحل) :

تقبل المعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا α في المجال $[a; b]$ إذا كان :

1 f مستمرة على المجال $[a; b]$

2 f رتيبة تماما على المجال $[a; b]$ (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) .

3 $f(a) \cdot f(b) < 0$

ملاحظة هامة :

يمكن أن يطرح السؤال كالتالي : أثبت أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل الذي

معادلته $y = 0$ في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $[a; b]$.

الإشتقاقية

الإشتقاقية : α, l, l_1, l_2 أعداد حقيقية .

النهاية	تفسيرها
$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = l$	الدالة f تقبل الاشتقاق عند α و (C_f) يقبل مماسا عند النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$ معامل توجيهه l .
$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = 0$	الدالة f تقبل الاشتقاق عند α و (C_f) يقبل مماسا عند النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$ مماسا موازيا لمحور الفواصل .
$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = l_1$	الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين α ويسمى l_1 العدد المشتق من اليمين . و (C_f) يقبل نصف مماس عند $A(\alpha; f(\alpha))$ من اليمين معامل توجيهه l_1 .
$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = l_2$	الدالة f تقبل الاشتقاق على يسار α ويسمى l_2 العدد المشتق من اليسار . و (C_f) يقبل نصف مماس عند $A(\alpha; f(\alpha))$ من اليسار معامل توجيهه l_2 .

الدالة	مشتقتها
$u + v$	$u' + v'$
$u \times v$	$u' \times v + v' \times u$
αu	$\alpha u'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
$\frac{u}{u^2}$	$\frac{u'}{u^2}$
$v \circ u$	$u' \times v'(u)$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$nu' \times u^{n-1}$

تطبيقات الاشتقاقية :

1 اتجاه تغير دالة :

f دالة تقبل الاشتقاق على مجال $\mathbb{I}$.

☆ إذا كانت $f'(x) > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{I}$ فإن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{I}$.

☆ إذا كانت $f'(x) < 0$ من أجل كل x من $\mathbb{I}$ فإن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{I}$.

☆ إذا كانت $f'(x) = 0$ من أجل كل x من $\mathbb{I}$ فإن الدالة f ثابتة على $\mathbb{I}$.

2 معادلة المماس :

☆ إذا قبلت دالة f الاشتقاق عند x_0 من $\mathbb{I}$ فإن تمثيلها البياني (C_f) يقبل مماسا (T) عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معادلته :

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

☆ إذا قبلت دالة f الاشتقاق على يمين x_0 فإن تمثيلها البياني (C_f) يقبل نصف مماس (T_d) عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معادلته :

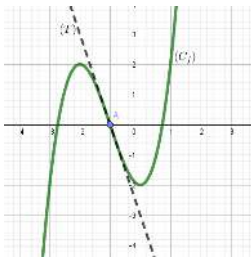
$$\begin{cases} y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$

☆ إذا قبلت دالة f الاشتقاق على يسار x_0 فإن تمثيلها البياني (C_f) يقبل نصف مماس (T_g) عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معادلته :

$$\begin{cases} y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$$

3 نقطة الإنعطاف :

☆ نقطة الإنعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس (T) المنحني (C_f) .



☆ إذا انعدمت المشتقة الأولى $f'(x)$ عند x_0 دون تغيير إشارتها فإن النقطة $A(x_0; f(x_0))$ هي نقطة إنعطاف للمنحني (C_f) .

☆ إذا انعدمت المشتقة الثانية $f''(x)$ عند x_0 مغيرة إشارتها فإن النقطة $A(x_0; f(x_0))$ هي نقطة إنعطاف للمنحني (C_f) .

4 القيم الحدية المحلية :

☆ إذا انعدمت المشتقة الأولى $f'(x)$ عند x_0 مغيرة إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية.

محميات على الدوال

f دالة معرفة على D_f و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى .

1 الدالة الزوجية :

تكون الدالة f زوجية إذا وفقط إذا كان :

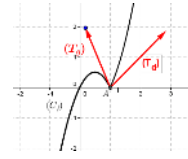
☆ من أجل كل $x \in D_f$ فإن $-x \in D_f$

☆ $f(-x) = f(x)$

2 الدالة الفردية :

تكون الدالة f فردية إذا وفقط إذا كان :

إذا كان $l_1 \neq l_2$ الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند α و (C_f) يقبل نصفي مماسين عند النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$ وتسمى النقطة زاوية



الدالة f تقبل الاشتقاق عند α

إذا كان $l_1 = l_2$

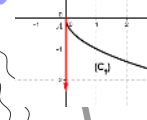
f غير قابلة للاشتقاق على يمين α والمنحني (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$ موازي لمحور الترتيب وموجه نحو الأعلى

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = +\infty$$



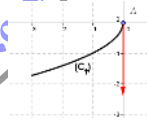
f غير قابلة للاشتقاق على يمين α والمنحني (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$ موازي لمحور الترتيب وموجه نحو الأسفل

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = -\infty$$



f غير قابلة للاشتقاق على يسار α والمنحني (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$ موازي لمحور الترتيب وموجه نحو الأسفل

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = +\infty$$



f غير قابلة للاشتقاق على يسار α والمنحني (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$ موازي لمحور الترتيب وموجه نحو الأعلى

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = -\infty$$



مشتقات دوال مألوفة :

مجال الاشتقاق	$f'(x)$	$f(x)$
$\mathbb{R}$	0	$k \quad (k \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	1	x
$\mathbb{R}$	a	$ax + b \quad (a \in \mathbb{R}^* \quad b \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$x^n \quad (n \geq 2; n \in \mathbb{N})$
$] -\infty; 0[$ و $] 0; +\infty[$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$] 0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$

محميات على المشتقات :

☆ من أجل كل $x \in D_f$ فإن $-x \in D_f$

☆ $f(-x) = -f(x)$

③ مركز تناظر :

يقبل (C_f) النقطة $A(a; b)$ كمركز تناظر إذا وفقط إذا كان :

☆ من أجل كل $x \in D_f$ فإن $2a - x \in D_f$

☆ $f(2a - x) + f(x) = 2b$

④ محور تناظر :

يقبل (C_f) المستقيم (Δ) الذي معادلته $x = a$ كمحور تناظر إذا وفقط إذا كان :

☆ من أجل كل $x \in D_f$ فإن $2a - x \in D_f$

☆ $f(2a - x) = f(x)$

⑤ إنشاء منحنى إنطلاقا من منحنى آخر :

a و b عدنان حقيقيان ، (C_f) و (C_g) التمثيلهما البياني في المستوي للـ f و g .

عبارة $g(x)$ بدلالة $f(x)$	إستنتاج التمثيل البياني لـ (C_g) انطلاقا من (C_f)
$g(x) = f(x + a) + b$	(C_g) صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a; b)$
$g(x) = -f(x)$	(C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل .
$g(x) = f(-x)$	(C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الترتيب .
$g(x) = -f(-x)$	(C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى مبدأ المعلم .
$g(x) = f(x)$	لما $x \geq 0$ فإن (C_g) منطبق على (C_f) . لما $x \leq 0$ فإن (C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الترتيب .
$g(x) = f(- x)$	لما $x \leq 0$ فإن (C_g) منطبق على (C_f) . لما $x \geq 0$ فإن (C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الترتيب .
$h(x) = f(x) $	لما $f(x) \geq 0$ فإن (C_g) منطبق على (C_f) . لما $f(x) \leq 0$ فإن (C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل .

⑥ المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة :

f و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي و m وسيط حقيقي .

☆ المعادلة $f(x) = m$:

هي مناقشة أفقية ، عدد حلول المعادلة هي عدد نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم $y = m$

المعادلة $y = m$ الموازية لمحور الفواصل (قم بسحب المسطرة أفقيا من أسفل إلى أعلى

ولاحظ عدد نقط تقاطعها مع (C_f))

★ ملاحظة : إن أطراف مجالات المناقشة هي ترتيب النقط التي تتغير عندها الحالات

المختلفة لعدد الحلول .

★ حالة عامة : في حالة معادلة $f(x) = u(m)$, ضع $f(x) = M$ وناقش عدد

الحلول حسب قيم M واستنتج منها قيم m .

☆ المعادلة $f(x) = ax + m$ (a عدد حقيقي ثابت غير معدوم) :

هي مناقشة مائلة ، عدد حلول هذه المعادلة هو عدد نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي

معامل توجيهه a (قم بسحب المسطرة وفق منحنى أي مستقيم في الشكل معامل توجيهه

a من أسفل إلى أعلى ولاحظ عدد نقط التقاطع .)

☆ المعادلة $f(x) = mx + b$:

هي مناقشة دورانية ، في هذه الحالة نبين أن جميع المستقيمات التي معادلاتها من الشكل

$y = mx + b$ تشمل نقطة ثابتة A .

عدد حلول هذه المعادلة هو عدد نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات التي تمر من A .

(قم بتدوير المسطرة بحيث مركز الدوران هو A من أسفل إلى أعلى ولاحظ عدد نقاط

التقاطع .)

★ ملاحظة : إن أطراف مجالات المناقشة هي معاملات توجيه المستقيمات المارة من

A التي تتغير عندها المختلفة لعدد الحلول .