

امتحان بلاكوربا تجريبي في مادة الرياضيات

المستوى : 3 ع ث

المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط) :

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية ، مع التبرير :

(1) من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر مجموع المتتالية الحسابية (U_n) المعروف بـ :

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = 4 - 4n^2$$

أساس المتتالية هو :

$$r = -2 \quad (أ) \quad r = -4 \quad (ب) \quad r = -8 \quad (ج)$$

(2) من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ عبارة مشتقة الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)$ هي :

$$f'(x) = \frac{-1}{4x+4\sqrt{x}} \quad (أ) \quad f'(x) = \frac{-3}{4x+4\sqrt{x}} \quad (ب) \quad f'(x) = \frac{-5}{4x+4\sqrt{x}} \quad (ج)$$

(3) مجموعة حلول المتراجحة : $\ln(2-x) + \ln(x+3) - \ln 4 \geq 0$ هي :

$$S = [1; 2] \quad (أ) \quad S =]-2; 1[\quad (ب) \quad S = [-2; 1] \quad (ج)$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 ، 0 ، -1 و خمس كرات سوداء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 0 ، 0 ، -1 لا نميز بينها عند اللمس . نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الكيس .
(I) نعتبر الاحداث التالية :

A " الحصول على كرية بيضاء واحدة فقط " ، B " الحصول على كرية بيضاء على الاقل "

C " الكريات الثلاثة المسحوبة لها نفس اللون " ، D " مجموع أرقام الكرات الثلاثة المسحوبة يساوي 0 "

(1) أحسب احتمال الاحداث : A ، B ، C

(2) بين أن : $P(D) = \frac{31}{120}$ و $P(C \cap D) = \frac{7}{120}$

(II) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل مخرج مجموع أرقام الكريات الثلاثة المسحوبة

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X

(ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(I) لتكن (U_n) المتتالية المعرفة بمحدها الاول $U_0 = \alpha$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$ - عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون المتتالية (U_n) ثابتة على $\mathbb{N}$

(II) في ما يلي نضع $U_0 = 0$

- (1) عين العدد الحقيقي b بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 1 + \frac{b}{U_n + 3}$
- (2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 < U_n \leq 0$
- (3) أ (بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n + 1)^2}{U_n + 3}$ ، ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية (U_n) ب (هل المتتالية (U_n) متقاربة ؟ برر إجابتك
- (4) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n = \frac{1}{U_n + 1}$ أ (بين أن المتتالية (V_n) حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب تعيين حددها الاول V_0 ب (أكتب عبارة V_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n ، و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- (5) أحسب المجموع S حيث : $S = \frac{8}{U_0 + 1} + \frac{8}{U_1 + 1} + \dots + \frac{8}{U_{2021} + 1}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $] -1; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$
- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$
 - (2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $] -1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
 - (3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $] -1; +\infty[$
- (II) f الدالة العددية المعرفة على المجال $] -1; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، فسر النتيجة بيانيا ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
 - (2) أ (بين أنه من أجل كل x من المجال $] -1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ب (استنتج إتجاه تغير الدالة f على المجال $] -1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها ج (بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
 - (3) أ (بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ب (أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ)
 - (4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة : $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 ، أحسب x_0
 - (5) أنشئ (Δ) ، (T) ، (C_f)
 - (6) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متميزين

إتتهى الموضوع الاول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية ، مع التبرير :

(1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x - 3$

على المجال $]0; +\infty[$ الدالة f :

أ () متزايدة تماما ب () متناقصة تماما ج () غير رتيبة

مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$ هي :

أ () $[\ln 2; e]$ ب () $[e^{-3}; e]$ ج () $[1; 3]$

(2) (V_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما ، حدها الاول V_0 و أساسها q حيث :

$$V_0 + V_1 = 30 \text{ و } V_0 \cdot V_2 = 576$$

$V_{n+1} - V_n$ يساوي :

أ () $18(4)^n$ ب () $3(4)^n$ ج () $3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

المجموع $S_n = \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) + \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\right)$ يساوي :

أ () $n \ln 4$ ب () $\ln(3(4)^n)$ ج () $\ln\left(\frac{1-n^2}{2}\right)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يتكون مكتب للدراسات من 20 مهندسا و مهندسة يتوزعون حسب الجنس و التخصص كما هو مبين في الجدول أسفله

الاناث	الذكور	التخصص
3	5	الاعلام
4	8	الهندسة المدنية

تم اختيار ثلاثة عناصر من هذا المكتب عشوائيا و في آن واحد للمشاركة في إحدى الدورات التكوينية

نعتبر الحادثتين : A " العناصر التي وقعها عليها الاختيار كلها من الاناث "

B " العناصر التي وقعها عليها الاختيار كلها من نفس التخصص "

(1) بين أن $P(A) = \frac{7}{228}$ ثم أحسب $P(B)$ و $P(A \cap B)$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد تخصصات العناصر التي وقع عليها الاختيار

أ () عين قيم المتغير العشوائي X

ب () عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[\frac{1}{2}; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$

(1) أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $[\frac{1}{2}; +\infty[$

(2) (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$

أ (برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 1$)

ب (بين أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة)

(3) أ (أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$)

ب (بين أنه من أجل كل عد طبيعي n : $U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (U_n))

(4) لتكن (V_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1}$

أ (بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . ، ثم أكتب عبارة V_n بدلالة n)

ب (أحسب المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{V_0 - 1}{U_0} + \frac{V_1 - 1}{U_1} + \dots + \frac{V_n - 1}{U_n}$)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x+3)e^x - 1$

(1) أ (احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$)

ب (أدرس إتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها)

(2) أ (بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0,8 < \alpha < -0,7$)

ب (استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$)

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$

و (C_f) هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أ (بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$)

ب (استنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها)

(3) أ (أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته)

ب (أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ))

ج (أكتب معادلة (T) مماس (C_f) الموازي للمستقيم (Δ))

(4) أنشئ (T) ، (Δ) و المنحنى (C_f) على المجال $] -\infty; 1]$ (يعطى $f(\alpha) \approx -0,7$)

(5) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = |x|(e^{|x|-2} - 1) + 1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ (بين أن الدالة h زوجية)

ب (تأكد أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$ فان : $h(x) = f(x-2) + 1$)

ج (اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f))

إتهى الموضوع الثاني