

مجلة الدالة الأسية النيبيرية

BAC 2022

ملخص الدروس

تمارين ليكالوريات جزائرية وأجنبية

ثانوي جميع العامية

3

◀ علوم تجريبية
◀ رياضيات
◀ تقني رياضي

من إعداد الأستاذين:

◀ وليد لهويجي
◀ بخدة امين

1.1 الدالة الأسية

1.1

i الدالة الأسية f هي الدالة الوحيدة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق: $f' = f$ و $f(0) = 1$ ونكتب $f(x) = \exp(x)$ أو $f(x) = e^x$

2.1 الخواص

2.1

$$e^x \neq 0, \quad e^1 = e \approx 2,71, \quad e^0 = 1$$

$$e^x > 0, \quad e^{x+y} = e^x \times e^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$(e^x)' = e^x, \quad e^0 = 1, \quad e^{nx} = (e^x)^n, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$x = y \text{ يعني } e^x = e^y$$

$$x \leq y \text{ يعني } e^x \leq e^y$$

$$x \geq y \text{ يعني } e^x \geq e^y$$

3.1 دراسة تغيرات الدالة الأسية

3.1

1 مجموعة التعريف لدينا: $f(x) = e^x$ وهي معرفة على $\mathbb{R}$ إذن $D_f =]-\infty; +\infty[$

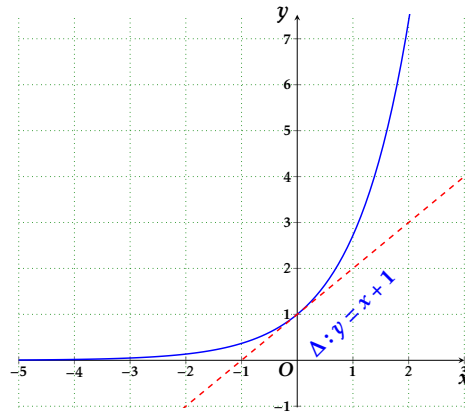
2 النهايات: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

3 اتجاه التغير: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = e^x > 0$ وبالتالي f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

4 جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		+	
$\exp(x)$	0	1	$+\infty$

5 التمثيل البياني



نتائج هامة

1 المنحنى (C) الممثل للدالة الأسية يقبل حامل محاور الفواصل كمستقيم مقارب لما x يؤول إلى $-\infty$

2 لدينا $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ إذن المنحنى (C) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا $y = x + 1$ معادلة له

3 من تعريف العدد المشتق لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{0+x} - e^0}{x} = \exp'(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{إذن :}$$

نتيجة

الدالة $x \mapsto x + 1$ هي أحسن تقريب تألفي للدالة $x \mapsto e^x$ بجوار 0 . أي من أجل كل x قريب من 0 لدينا : $e^x \approx x + 1$.

1

بسط العبارات التالية :

$$(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})^2, \frac{e^x + e^{-2x}}{e^{-2x}}, \frac{e^{-2x+3}}{e^{-2x}}, (e^x)^3 \times e^{-5x}$$

2

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$e^{x^2+x} - 1 = 0, e^{2x} + e^x - 6 = 0, e^{3x} + 5 = 0, e^{x+2} = e$$

$$\left| e^{\frac{3}{x}-1} - 5 \right| = 1, e^{-2x} - e^{x^2+1} = 0$$

حل في $\mathbb{R}$ المترجمات التالية :
 $e^{2x} > 2e^x - 1$ ، $e^{x+1} \leq e^{-\frac{2}{x}}$ ، $e^{x-x^2} \geq 1$ ، $e^{-2x+1} - e^{2x} < 0$

مجموعة تعريف دالة أسية

4.1

نضع $f(x) = e^{u(x)}$ حيث u دالة عددية
 مجموعة تعريف الدالة f هي نفسها مجموعة تعريف الدالة u إذن $D_f = D_u$

1 عين مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} , f(x) = e^{\frac{1}{x}} + 5 , f(x) = \sqrt{x} - 1 + e^{x^2} , f(x) = e^{x^2 + 5x + 2}$$

$$f(x) = \frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^{2x} - 3e^x + 2} , f(x) = \sqrt{e^{-2x} - e} , f(x) = x^2 + \frac{1}{e^{2x+1}}$$

$$f(x) = e^{e^x}$$

مشتقة دالة أسية

5.1

نضع $f(x) = e^{u(x)}$ حيث u دالة عددية
 إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على المجال I فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I وبالتالي :
 $f'(x) = u'(x) e^{u(x)}$

1 أحسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة

$$f(x) = 4e^{(x-1)\sqrt{x}} , f(x) = (x^2 + x - 1)e^x , f(x) = e^{\frac{1}{x}} , f(x) = e^{3x} - x$$

$$f(x) = \frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^{2x} - 3e^x + 2} , f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-x} + 1}$$

النهايات الشبهية

6.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^- \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

1 أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x - 3}{2e^x + 1} , \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{x} , \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-2x} , \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}} , \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^3 - 1} , \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} , \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{6x} - 3}{x} , \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2 - x}$$

دراسة إشارة العبارة $ae^{u(x)} + b$ حيث a و b أعداد حقيقية و u دالة عددية

$$b > 0 \text{ و } a > 0$$

$$b < 0 \text{ و } a < 0$$

a و b مختلفان في الإشارة

$$ae^{u(x)} + b > 0$$

$$ae^{u(x)} + b < 0$$

لدراسة إشارة العبارة
نحل المعادلتين
 $ae^{u(x)} + b = 0$
و $ae^{u(x)} + b < 0$

المتراجحات $ae^{u(x)} + b < 0$
و $ae^{u(x)} + b > 0$ باستعمال الخاصيتين :
① $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ تكافئ $u(x) = v(x)$
② $e^{u(x)} < e^{v(x)}$ تكافئ $u(x) < v(x)$

دراسة الدالة $e^{u(x)}$ حيث u دالة عددية معرفة و قابلة للإستقار على المجال D_u و a ، b و c أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$

$$D_{\exp \circ u} = D_u$$

إذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow b} e^x = c \text{ و}$$

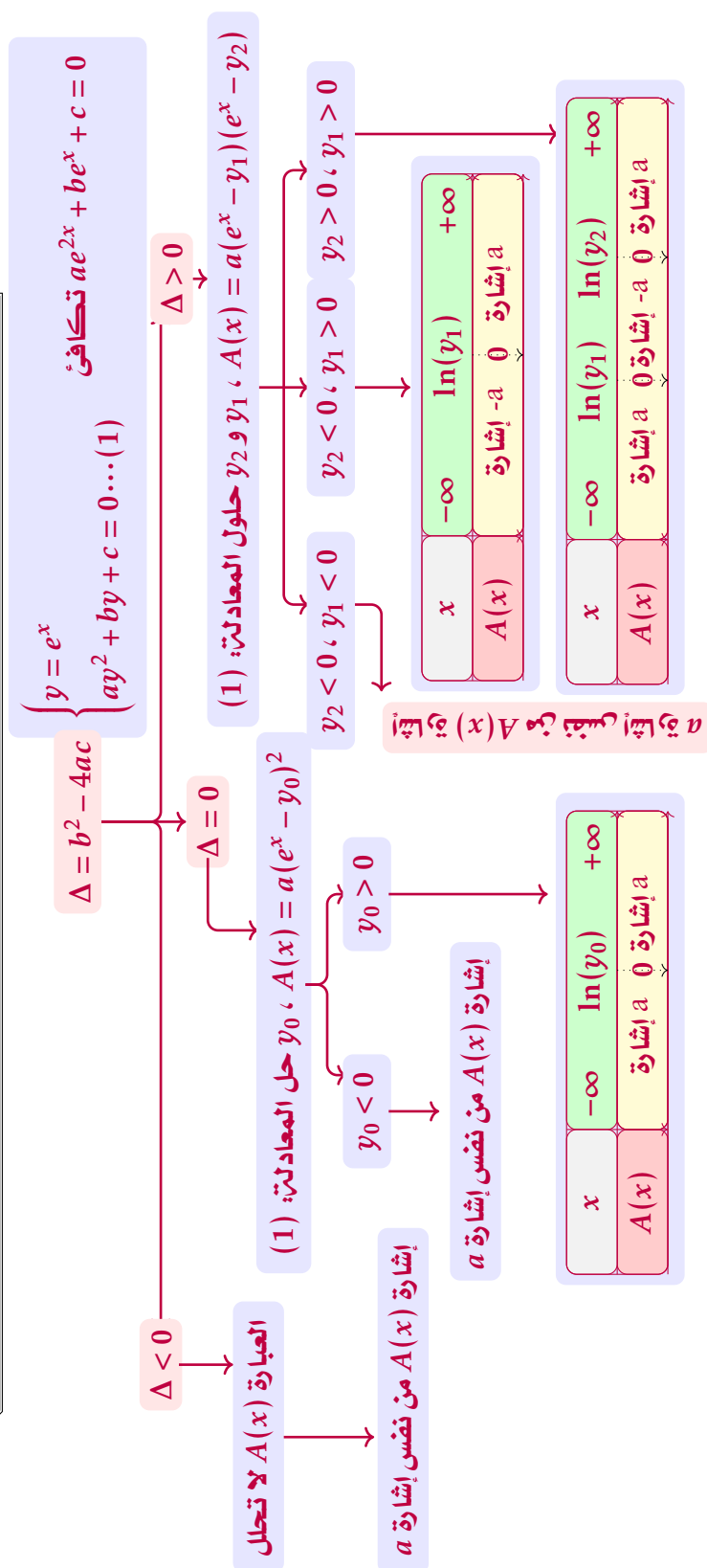
$$\lim_{x \rightarrow a} e^{u(x)} = c \text{ فإن:}$$

$$(\exp \circ u)(x) = e^{u(x)}$$

$$(e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$$

للدالتين $\exp \circ u$ و u نفس إتجاه التغير على D_u

دراسة إشارة c و a حيث: $A(x) = ae^{2x} + be^x + c$ أعداد حقيقية و $a \neq 0$



أدرس إشارة العبارات الآتية:

$\frac{1}{2}e^{2x-1}-2$ ③	$-e^{x^2+2}-3$ ②	$2e^{x+1}+1$ ①
$e^{2x}-7e^x+12$ ⑥	$-4e^{x+1}+12$ ⑤	$e^{2-x}-3$ ④
$(2x-1)e^{-x}+4e^{-x}$ ⑨	$e^{2x}-2e^x+3$ ⑧	$e^{2x}+e^x-6$ ⑦

إزالة حالات عدم التعيين

7.1

إزالة حالات عدم التعيين في الدالة الأسية

حالة $+\infty - \infty$

إخراج عامل مشترك مناسب عادة:

e^x عندما $x \rightarrow +\infty$ ويمكن e^{2x} أو e^{3x} أو ...

e^{-x} عندما $x \rightarrow -\infty$ ويمكن e^{-2x} أو ...

ونستفيد من المبرهنات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = 0 : n > 0$$

مثال توضيحي:

حساب النهاية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} + x$

حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty - \infty$

$$f(x) = e^{-x} + x$$

$$= e^{-x} \left[1 + \frac{x}{e^{-x}} \right]$$

(أخرجنا e^{-x} لأن $x \rightarrow -\infty$)

$$= e^{-x} [1 + xe^x]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty [1 + 0] = +\infty$$

حيث أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

حالة $\frac{\infty}{\infty}$

نخرج عامل مشترك مناسب من البسط والمقام إذا كان المقام أكثر من حد

نفرق الكسر إذا كان المقام حد واحد

ونستفيد من المبرهنات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

مثال توضيحي 1: حساب النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x}$$

حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$$

حيث أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

مثال توضيحي 2: حساب النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{e^x - 1}$$

حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{x - 1}{e^x - 1}$$

نخرج x كعامل مشترك من البسط، و e^x من المقام، ومنه

$$f(x) = \frac{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x} \right)}$$

$$= \frac{x}{e^x} \left[\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{e^x}} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \left[\frac{1 - 0}{1 - 0} \right] = 0$$

حيث أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

حالة $\frac{0}{0}$

نغير شكل الدالة f ونستفيد من المبرهنات:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

مثال توضيحي:

حساب النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$$

حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{3x}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

نبعد بين x و 3 ثم نضرب

البسط والمقام بالعدد (2)

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 0 f(x) = \frac{2}{3} (1) = \frac{2}{3}$$

حيث أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

حالة $(0)(\infty)$

لإزالتها ننشر (هك الأقواس) ونستفيد من المبرهنات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x =$$

$\begin{cases} 0^+ : \text{زوجي } n \\ 0^- : \text{فردى } n \end{cases}$

مثال توضيحي:

حساب النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \rightarrow -\infty (x - 1) e^x$$

حالة عدم التعيين من الشكل $(-\infty)(0)$

$$f(x) = (x - 1) e^x$$

$$= x e^x - e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$$

حيث أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

مثال 1:

حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^x$
حالة عدم التعيين من الشكل $(+\infty)(0)$

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x \\ = x^2 e^x + e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0 \text{ حيث أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 + 0 = 0$$

مثال 2:

حساب النهاية : $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x+2} - e}{x^2 - 1}$ ، حالة عدم التعيين من الشكل : $(0/0)$
 $f(x) = \frac{e^{x+2} - e}{x^2 - 1}$

$$f(x) = \frac{e(e^{x+1} - 1)}{x^2 - 1} \quad \text{1 يجب إظهار الواحد لذلك نخرج e كعامل مشترك}$$

$$2 \text{ يجب إظهار } (x+1) \text{ في المقام أي :}$$

$$f(x) = \frac{e(e^{x+1} - 1)}{(x+1)(x-1)} \\ = \frac{e}{x-1} \left[\frac{e^{x+1} - 1}{x+1} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{e}{-2}(1) = -\frac{e}{2}$$

$$\text{حيث أن } (\theta = x + 1, \theta \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow -1) , \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{e^\theta - 1}{\theta} = 1$$

مثال 3:

حساب النهاية : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^{5x} - 1}$ ، حالة عدم التعيين من الشكل (0/0).

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{5x} - 1} = \frac{\frac{e^{2x} - 1}{x}}{\frac{e^{5x} - 1}{x}}$$

$$= \frac{2 \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \right)}{5 \left(\frac{e^{5x} - 1}{5x} \right)}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{e^{\theta} - 1}{\theta} = 1 \text{ حيث أن } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2(1)}{5(1)} = \frac{2}{5}$$

مثال 4:

حساب النهاية : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{4x}}{5x}$ ، حالة عدم التعيين من الشكل (0/0).

$$f(x) = \frac{e^x - e^{4x}}{5x} = \frac{e^x(1 - e^{3x})}{5x}$$

$$= \frac{-e^x(e^{3x} - 1)}{5x} = \frac{-3e^x}{5} \left(\frac{e^{3x} - 1}{3x} \right)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{e^{\theta} - 1}{\theta} = 1 \text{ حيث أن } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{3}{5}(1) = -\frac{3}{5}$$

مثال 5:

حساب النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - e^x + 1$ ، حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty - \infty$.

$$f(x) = e^{2x} - e^x + 1$$

$$= e^x(e^x - 1) + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(+\infty) + 1 = +\infty$$

مثال 6:

حساب النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{5x} - e^{3x} + x^3$ ، حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty - \infty$.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{5x} - e^{3x} + x^3 \\ &= e^{3x}(e^{2x} - 1) + x^3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(+\infty - 1) + \infty = +\infty$$

مثال 7:

حساب النهاية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ، حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &= \frac{e^{-x} \left[\frac{e^x}{e^{-x}} - 1 \right]}{e^{-x} \left[\frac{e^x}{e^{-x}} + 1 \right]} \\ &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

8.1 المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية هي معادلة مجهول فيها دالة نرمرز إليها غالبا بالرمز $y, z, \dots$

كل معادلة تشمل الدالة ومشتقتها نسميها معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى .
حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ يعني البحث عن كل الدوال القابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ والتي تحقق : $f'(x) = af(x) + b$

المعادلات التفاضلية من
الشكل $y' = ay$ مع $a \neq 0$

a عدد حقيقي غير معدوم
حل معادلة $y' = ay$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto ce^x$ ، حيث c عدد حقيقي ثابت .

مثال

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $y' + 2y = 0$
لدينا : $y' + 2y = 0$ معناه $y' = -2y$
ومنه حلول هذه المعادلة هي الدوال : $x \mapsto ce^{-2x}$ حيث c عدد حقيقي ثابت

المعادلات التفاضلية من الشكل
 $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$

a عدد حقيقي غير معدوم
حل معادلة $y' = ay + b$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto ce^x - \frac{b}{a}$ ، حيث c عدد حقيقي ثابت .

مثال

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $y' = -3y + 2$
حلول هذه المعادلة هي الدوال $x \mapsto Ce^{-3x} + \frac{2}{3}$

التمرين الأول

1 حل المعادلات التفاضلية الآتية :

$$y' = 3y \quad ① \quad y' = 5y \quad ② \quad y' + 2y = 0 \quad ③ \quad 2y' + 3y = 0 \quad ④$$

2 في كل حالة عيّن حل معادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط المعطى :

أ) $y' = 2y$ ، الحل f يحقق الشرط $f(0) = 1$

ب) $y' + 5y = 0$ ، منحنى (C_f) للحل f يمر بالنقطة $A(-2; 1)$

ج) $y' + 2y = 0$ ، ميل المماس للمنحنى (C_f) للحل f في النقطة التي فاصلتها -2 يساوي $\frac{1}{2}$

3 حل المعادلات التفاضلية الآتية :

$$y + 3y' = 2 \quad ③ \quad 2y' = y - 1 \quad ② \quad y' = 2y + 1 \quad ①$$

$$2y + 3y' - 1 = 0 \quad ④$$

2 التمرين الثاني

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل مرة :

1 حلول المعادلات التفاضلية : $y' + \frac{1}{2}y - 4 = 0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x) = C e^{-0,5x} + 8$

2 نعتبر الجملة : $\begin{cases} y' = -7y + 35 \\ y(0) = 9 \end{cases}$ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$

بالشكل $f(x) = e^{-7x} + 7$ هي حل لهذه الجملة .

3 الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x) = 3 e^{2x} \sin x$ هي حل للمعادلة التفاضلية : $y'' - 4y' + 5y = 0$

3 التمرين الثالث

نعتبر المعادلة التفاضلية : $y' = -3y + 4e^{-2x}$ (E)

1 عيّن العدد الحقيقي λ حتى تكون الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \lambda e^{-2x}$ حلاً للمعادلة (E)

2 بيّن أنّ الدالة f تكون حلاً لـ (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة $(f - g)$

حلاً للمعادلة التفاضلية : $y' = -3y$ (E')

3 حل المعادلة (E') ، ثم إستنتج حلول المعادلة (E)

4 التمرين الرابع

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) $y' - 2y = x e^x$ والدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$

بـ : $u(x) = (ax + b) e^x$

1 عيّن العددين الحقيقيين a و b علماً أنّ الدالة u هي حل للمعادلة (E)

2 حل المعادلة التفاضلية : $y' - 2y = 0$ (E')

3 بيّن أنّ الدالة v تكون حلاً لـ (E') إذا وفقط إذا كانت الدالة $(u + v)$

حلاً للمعادلة (E)

4 إستنتج حلول المعادلة (E)

5 عيّن الحل للمعادلة (E) الذي ينعدم عند 0

5 التمرين الخامس

نعتبر الدالة u المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $u(x) = \frac{e^x}{x}$ والمعادلة التفاضلية (E) : $y - y' = \frac{e^x}{x^2}$

1 بيّن أن الدالة u هي حل لـ (E)

2 بيّن أن الدالة v المعرفة على $]0; +\infty[$ تكون حلا للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة $(v - u)$ حلا للمعادلة التفاضلية (E') : $y - y' = 0$

3 إستنتج حلول المعادلة التفاضلية (E)

6 التمرين السادس

1 حل المعادلة التفاضلية (E) : $2y' + 3y = 0$

2 أ) عيّن كثير حدود من الدرجة الثانية f يحقق المعادلة التفاضلية (E') : $2y' + 3y = x^2 + 1$

ب) بيّن أن g حلا للمعادلة (E') إذا وفقط إذا كان $g - f$

حلا للمعادلة (E)

ج) إستنتج حلول المعادلة التفاضلية (E')

7 التمرين السابع

1 عيّن العدد الحقيقي a حتى تكون الدالة $f : x \mapsto a e^{-x}$ حلا للمعادلة

التفاضلية (E) : $y' + 3y = 2 e^{-x}$

2 نعرف الدالة h كمايلي : $h(x) = g(x) - a e^{-x}$ حيث g دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

• أثبت أن الدالة g حلا للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان h حلا للمعادلة التفاضلية $y' + 3y = 0$

3 حل المعادلة (E) وإستنتج مجموعة الحلول (E)

8 التمرين الثامن

ليكن n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2

1 (أ) حل المعادلة التفاضلية الأتية : (E) $y' - \frac{1}{n}y = 0$

(ب) عيّن العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = ax + b$

حلا للمعادلة التفاضلية : (E') $y' - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n(n+1)}$

(ج) • بيّن أن الدالة h تكون حلا للمعادلة (E') إذا وفقط إذا كان $(h - g)$ حلا للمعادلة (E)
• إستنتج حلول المعادلة (E')

• عيّن الحل f للمعادلة (E') الذي يحقق $f(0) = 0$

2 f_n دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}}$

(أ) وليكن (C_{f_n}) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
(أ) أدرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

(ب) أثبت أن منحنى الدالة f_n يبلغ قيمة كبرى M موجبة تماما يطلب تعيينها

(ج) بيّن أن المنحنى (C_{f_n}) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ_n) . أعط معادلة للمستقيم (Δ_n)
(هـ) أنشئ كلا من (Δ_2) و (C_{f_2})

9 التمرين التاسع

(I) نعتبر المعادلة التفاضلية (E) حيث : (E) $y' - y = e^x - x$

1 بيّن أن الدالة u حل للمعادلة (E) حيث u معرفة على $\mathbb{R}$

بـ : $u(x) = x e^x + x + 1$

2 v دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

بيّن أن الدالة $v + u$ حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة v

حل للمعادلة التفاضلية (E') حيث : (E') $y' - y = 0$

3 حل المعادلة التفاضلية (E') ، ثم إستنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (E)

4 عيّن الحل الخاص k للمعادلة التفاضلية (E) والذي يحقق $k(0) = 0$

(II) g دالة عددية معرفة على $[0; +\infty[$ بمايلي : $g(x) = (x - 1)e^x + x + 1$

1 أحسب $g'(x)$ لكل x من $[0; +\infty[$ ، ثم إستنتج أن الدالة g متزايدة تماما على $[0; +\infty[$

2 أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، بين أن : $g(x) \geq 0$ لكل x من $[0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كمايلي : $f(x) = \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2}$

وليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 بيّن أن f دالة فردية

2 أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفسر النتيجة بيانياً .

ب. برهن أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ماذا تستنتج بالنسبة إلى المنحنى (C_f) ؟

3 (أ) بيّن أن : $f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x - 1)^3}$ من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، ثم إستنتج إشارة $f'(x)$ على $]0; +\infty[$

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة f على $]0; +\infty[$

4 أنشئ المنحنى (C_f) على $\mathbb{R} - \{0\}$

1 باك جوان 2008 م (5.7 ن)

(I) نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي: $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$ حيث a و b عداد حقيقيان .
 المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول 1cm
 - عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1, 1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

(II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي: $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$ و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق

1 بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ وفسر هذه النتيجة بيانيا .

(نذكر أن $\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$)

2 أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها .

3 بين أن منحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين إحداثيها .

4 أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

5 أرسم (C_g)

6 H الدالة العددية المعرفة على $[-2; +\infty[$ كما يأتي: $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان

(أ عين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة: $x \rightarrow g(x) - 1$

(ب) استنتج الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند القيمة 0.

(II) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي: $k(x) = g(x^2)$
 باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها

2 باك جوان 2010 م (7 ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ ب: $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$
 نرمز (C_f) إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا

2 أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

3 (أ) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') . معادلتيهما على الترتيب: $y = x$ و $y = x + 1$.

(ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

4 بيّن أن النقطة $\omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5 (أ) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β

حيث : $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1,3 < \beta < -1,4$.

(ب) هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم Δ ؟

(ج) أرسم (Δ) و (Δ') . ثم المنحنى (C_f) .

(د) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد إشارة حلول

المعادلة : $(m-1)e^{-x} = m$

3 باك جوان 2011 م 2 (7 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^x - ex - 1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) أحسب $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها.

(ج) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

2 (أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -ex - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$.

(ب) أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(ج) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ ، تقبل في المجال $[1,75; 1,76]$ حلا وحيدا α .

(د) أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 2]$.

3 (أ) أحسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = \alpha$ و $x = 0$.

(ب) أثبت أنّ : $A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right) ua$ (حيث ua هي وحدة المساحات)

4 باك جوان 2012 م 2 (7 ن)

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - xe^x$.

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

2 أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها .

3 (أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $[-1; +\infty[$

(ب) تحقق أنّ $0.5 < \alpha < 0.6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي : $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$:
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2 لتكن f' مشتقة الدالة f . بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن : $f'(x) = -g(x)$ ،
استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$

ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3 بيّن أنّ $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$
(تدوّر النتائج إلى 10^{-2})

4 (أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$
(ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

5 (أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2
حيث $-1.5 < x_1 < -1.6$ و $1.5 < x_2 < 1.6$.
(ب) أنشئ (Δ) و (C_f) .

6 لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = (ax + b)e^x$
(أ) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$
على $\mathbb{R}$

(ب) استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$

5 باك جوان 2013 م (5.6 ن)

(I) الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ : $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحني (C).

2 أحسب $f'(x)$. بيّن أنّ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

x	$f(x)$
0, 20	0, 037
0, 21	0, 016
0, 22	-0, 005
0, 23	-0, 026
0, 24	-0, 048
0, 25	-0, 070

3 بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α .
باستعمال جدول القيم جد حصر العدد α .

1 أرسم المستقيمين المقاربين والمنحني (C) ، ثمّ أرسم المنحني (C') الممثل للدالة $|f|$.

2 عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $g(x) = f(2x - 1)$.
(عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1 أدرس تغيرات الدالة g على $]-\infty; 1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

(أ) تحقق أنّ $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثمّ بيّن أنّ : $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$.

(ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحني الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

(ج) تحقق من أنّ : $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

6 باك جوان 2015 م (7 ن)

I الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$.

1 أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

2 بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$

ثمّ تحقق أنّ : $0, 36 < \alpha < 0, 37$.

3 استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 (أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$.

(ب) إستنتج أنّ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha; +\infty[$.

2 أحسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3 أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

4 أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$.

5 أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}]$ ، نأخذ $0, 1 \approx f(\alpha)$.

(أ) تحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$$2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2} ;$$

(ب) إستنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

7 باك جوان 2016 م (7 ن)

I g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$

1 (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2 (أ) بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم

والآخر α حيث: $-1,52 < \alpha < 1,51$.

(ب) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (وحدة الطول $1cm$).

1 (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = -g(x)$.

(ج) شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ، (نأخذ $0,38 \approx f(\alpha)$)

(د) عين دون حساب: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

2 (أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(ج) بين أن للمنحنى (C_f) نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثيهما .

(د) أرسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2, +\infty[$.

(هـ) ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة

حلول المعادلة : $0 = (x^2 + 3x + 2) e^x + (m - x)$ على المجال $[-2; +\infty[$.

III h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = x + f(x)$

و $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

1 عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حتى تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

(أ) أحسب التكامل التالي : $A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما وفسر النتيجة هندسيا

(ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

8 باك جوان (الإستثنائية) 2016 م 2 (6 ن)

I لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2e^x - x^2 - x$

1 (أ) أحسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g'

(ب) بين أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$.

(ج) أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,37 < \alpha < -1,38$.

3 إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{x e^x g(x)}{(e^x - x)^2}$.

(ج) أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2 (أ) بين أن $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ، ثم إستنتج حصر العدد $f(\alpha)$

(ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

(ج) أنشئ المنحنى (C_f) . (تعطى $0,29 \approx f(\alpha)$)

9 باك جوان 2017 م2 (7 ن)

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$.
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ وأعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة
ثم أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 أ) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$ ،
ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها .

3 أكتب معادلة T المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

(II) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x) = 1 - xe^{1-x}$.

1 بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) \geq 0$ ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) .

2 بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.

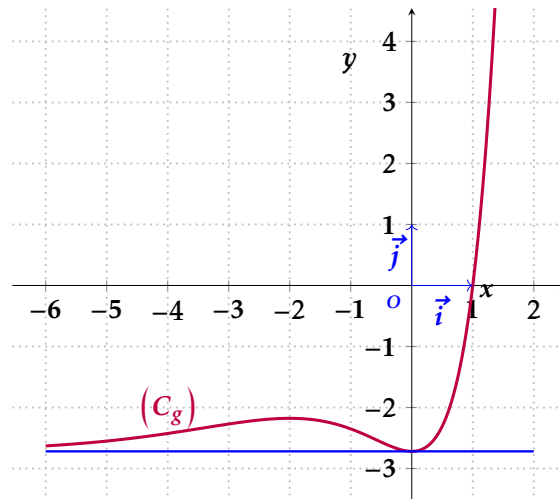
3 أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1; +\infty[$.

4 F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$.

تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم أحسب مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = 0$ و $x = 1$.

10 باك جوان (الإستثنائية) 2017 م2 (7 ن)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^2 e^x - e$.
 (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (كما هو موضح في الشكل)



1 أحسب $g(1)$

2 بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ ثم إستنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أحسب النهايات الآتية : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2 بين أن المنحنى (γ) الذي معادلته : $y = e^{-x} - 2$ والمنحنى (C_f) متقاربان بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (γ) .

3 بين أن: من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا : $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$.

4 إستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1; 0]$ و $[0; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; -1]$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

5 بين كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقا من منحنى الدالة : $x \mapsto e^x$
 ثم أرسم بعناية كلا من المنحنيين (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق .

6 ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) والمستقيمين اللذين معادليهما : $x = -e^n$ و $x = -e^{n+1}$.
 أحسب العدد الحقيقي I حيث $I = A(0) + A(1) + \dots + A(2016)$.

11 باك جوان 2018 م 1 (6 ن)

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$

(أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

(ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

(ج) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0,38 < \alpha < -0,37$
 ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(II) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$
 وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x+1))$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

(ج) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)
حيث : $y = 2x + 1$: (Δ)

2 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3 أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

4 أرسم (Δ) و (T) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) = 0.8$)

5 ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $x = (1-m)e^x$

6 أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$.

(ب) أحسب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمت التي معادلاتها $x = 1$ ، $x = 3$ ، $2x + 1$

1 باك جوان 2019 م 2 (7 ن) الحل موجود في الصفحة 64

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
تؤخذ وحدة الطول $2cm$

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g
المعرفتين على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = e^x - ex$ و $f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2$

1 أ) أدرس اتجاه تغير الدالة g .

(ب) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية.

2 أدرس اتجاه تغير الدالة f .

3 أحسب كلاً من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4 أدرس الوضع النسبي للمنحنين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

5 أرسم على المجال $[0; 2]$ المنحنين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (يعطى $e^2 - 2e \approx 2$)

6 أحسب بالسنتيمتر المربع ، مساحة الحيز المستوي المحدد

بالمنحنيين (C_f) و (C_g) .

7 h الدالة المعرفة على المجال $[-2; 2]$ كمايلي : $h(x) = \frac{1}{2} e x^2 - e^{|x|}$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق

(أ) بيّن أنّ h دالة زوجية .

(ب) من أجل $x \in [0; 2]$ أحسب $h(x) + f(x)$ ثمّ إستنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه .

باك جوان 2020 م 2 (7 ن)

12

(I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

في الشكل المرفق ، (Γ) المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2x^2 + 2x - 2x e^x$

(Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$ و (γ) المنحنى الممثل للدالة : $x \mapsto e^x$

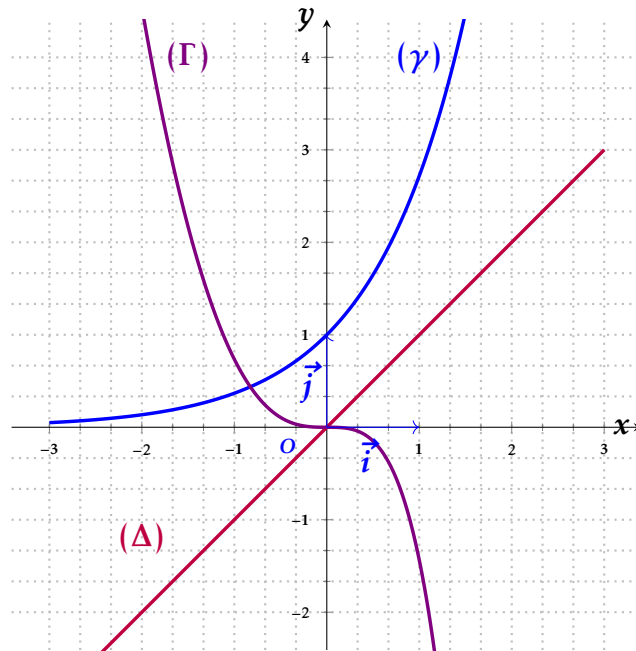
بقراءة بيانية :

1 برّر أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x - x > 0$.

2 حدّد تبعا لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ علما أنّ : $g(0) = 0$.

(II) الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -1 + \frac{2e^x}{e^x - x}$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.



1 بيّن أنّ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ وأحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثمّ فسر نتيجتي النهايتين هندسيا .

2 أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$.

ب. إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكل جدول تغيّراتها .

3 أ. أكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 0 .

ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f(x) - (2x+1) = \frac{g(x)}{e^x - x}$

ج. إستنتج الوضع النسبي لـ : (C_f) و (T) على $\mathbb{R}$ ، ماذا تمثل النقطة A بالنسبة إلى (C_f) ؟

4. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty; 1]$ ، ثم تحقق أن : $-0.6 < \alpha < -0.5$

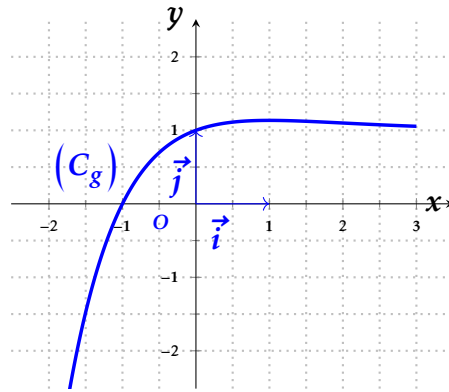
5. أنشئ المماس (T) والمستقيمين المقاربين ثم المنحنى (C_f) .

13. باك جوان 2021 م2 (7 ن)

I) الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + x e^{-x-1}$ ، تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الشكل المقابل)

1. أحسب $g(-1)$.

2. بقراءة بيانية ، حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$.



II) الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - (x+1) e^{-x-1}$ ، تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f(x) = x \left[1 - \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-x-1} \right]$

ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2. أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

ب. إستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $[-1; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty; -1]$ ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$

ج. بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتها .

4 أ. بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β

حيث: $0,3 < \alpha < 0,4$ و $-1,8 < \beta < -1,9$

ب. أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم أرسم المنحنى (C_f) على المجال $[-2; +\infty[$.

5 الدالة العددية h معرفة على المجال $[-2; 2]$ ب: $h(x) = -|x| + (|x| - 1)e^{|x|-1}$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. بين أن الدالة h زوجية.

ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-2; 0]$: $h(x) = f(x)$

ج. اشرح كيف يمكن رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه.

1 باك جوان 2008 م (7 ن)

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$ و C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أدرس تغيرات الدالة f .

2 (أ) بين أن C_f يقبل نقطة إنعطاف ω وأكتب معادلة لمماس C_f عند النقطة ω .
(ب) أثبت أن ω مركز تناظر للمنحنى C_f .

3 (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 3)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$.
(ب) استنتج أن C_f يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما.

4 (أ) بين أن C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2.77; -2.76[$.

(ب) أحسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم أرسم C_f ومستقيمه المقاربين.

(II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$
 C_g منحنى دالة g .

1 (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x) = f(-x)$.
(ب) استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول C_f إلى C_g .

2 أنشئ في نفس المعلم السابق C_g (دون دراسة الدالة g).

2 باك جوان 2010 م (7 ن)

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = (3 - x)e^x - 3$

1 أدرس تغيرات الدالة g .

2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث : $2.82 < \alpha < 2.83$.

3 استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

$$(II) f \text{ الدالة العددية المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كمايلي : } \begin{cases} f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ ، أكتب معادلة (T) مماس (C_f) عند المبدأ O .

2 (أ) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$ ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) بين أنه من أجل $x \neq 0$ فإن: $f'(x) = \frac{x^2 g(x)}{(e^x - 1)^2}$.

(ج) تحقق أن: $f(\alpha) = \alpha^2(3 - \alpha)$ ، ثم عين حصرا له.

(د) أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

3 أحسب $f(x) + x^3$ وإستنتج الوضعية النسبية لـ (C_f)

و (C) منحنى الدالة $x \mapsto -x^3$

بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x^3] = 0$ وفسر النتيجة هندسيا.

4 أنشئ في نفس المعلم المماس (T) والمنحنيين (C) و (C_f).

3 باك جوان 2011 م (7 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = (3x + 4)e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 (أ) أحسب f' ، f'' ، ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن: $f^n(x) = (3n + 4)e^x$

حيث: f' ، f'' ، $\dots$ ، f^n المشتقات المتتالية للدالة f .

(ب) إستنتج حل المعادلة التفاضلية: $y'' = (3x + 16)e^x$

2 (أ) بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ وفسر النتيجة هندسيا

(ب) أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها

3 (أ) أكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ω التي فاصلتها $-\frac{10}{3}$.

(ب) بين أن ω هي نقطة إنعطاف المنحنى (C_f)

(ج) أرسم (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty; 0]$.

4 أ) x عدد حقيقي من المجال $]-\infty; 0]$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_{-1}^x t e^t dt$ ، ثم إستنتج دالة

أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0]$.

ب) λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$

أحسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)

والمستقيمات التي معادلاتها : $y = 0$ ، $x = -\frac{4}{3}$ ، $x = \lambda$ ،

ثم جد $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$

4 باك جوان 2012 م (8 ن)

I) g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = 2 - x e^x$.

1 أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2 بيّن أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$

ثم تحقق أن: $0,8 < \alpha < 0,9$.

3 عيّن ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \frac{2x+2}{e^x+2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1 بيّن أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسر النتيجة الهندسية .

2 أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) بيّن أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب للمنحنى

3 أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ') و (Δ)

حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

4 أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ ،

ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f .

ب) بيّن أن: $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

5 أرسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .

6 ناقش ، بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$.

(III) (U_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $U_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n : U_{n+1} = f(U_n)$.

1 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq U_n \leq \alpha$

2 باستعمال (Δ) و (C_f) مثل على محور الفواصل الحدود : U_0, U_1, U_2 ثم خمن اتجاه تغير (U_n) .

3 برهن أن المتتالية (U_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

5 باك جوان 2013 م (8 ن)

(I) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$

1 (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(نأخذ : $g(1 - \sqrt{2}) \approx -0,25$ و $g(1 + \sqrt{2}) \approx 1,43$)

2 (أ) بين أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن أحدهما معدوم والآخر α ، حيث : $-0,8 < \alpha < -0,7$.

(ب) استنتج إشارة $g(x)$ ، حسب قيم العدد الحقيقي x .

(II) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - (x + 1)^2 e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1 (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(ب) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ ، مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(ج) أدرس وظيفية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

2 (أ) بين أنه ، من أجل كل عدد حقيقي $x : f'(x) = g(x)$

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$. تأخذ : $(f(\alpha) \approx -0,9)$

3 (أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين ، معامل توجيه كل منهما يساوي 1

يطلب تعيين معادلة لكل منهما .

(ب) مثل (Δ) والمماسين والمنحنى (C_f) .

(ج) ناقش بيانها ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة ذات المجهول $x : (x+1)^2 + m e^x = 0$.

4 الدالة H معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}$.

(أ) يبين أن: H دالة أصلية للدالة: $x \mapsto (x+1)^2 e^{-x}$.

(ب) أحسب بالسنتيمتر المربع، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = -1$.

(III) (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$ (تذكر أن العدد α يحقق: $g(\alpha) = 0$)

1 برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1 \leq u_n \leq \alpha$.

2 يبين أن المتتالية (U_n) متناقصة.

3 استنتج أن (U_n) متقاربة، ثم أحسب نهايتها.

6 باك جوان 2014 م (6 ن)

I g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = (2-x)e^x - 1$

1 أدرس تغيرات الدالة g

2 يبين أن للمعادلة: $g(x) = 0$ حلان α و β

حيث: $-1, 1 < \alpha < -1, 2$ و $1, 8 < \beta < 1, 9$

3 استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$
(C_f) المنحنى الممصل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وفسر النتيجة هندسيا.

2 يبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$

وإستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3 يبين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ وإستنتج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$

4 أحسب $f(1)$ ثم أرسم المنحنى (C_f) .

5 λ عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1

(أ) أحسب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$ حيث: $a(\lambda) = \int_1^\lambda [f(x) - 1] dx$

(ب) أحسب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$

f الدالة المعرفة بـ: $f(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x
من المجال $] -\infty; 0[$: $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$
 (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد
والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أدرس إستمرارية الدالة f عند 0 من اليسار.

2 أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ ، تفسر النتيجة هندسياً.

3 (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

4 (أ) بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$.

(ب) إستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) بجوار $-\infty$.
يطلب تعيين معادلتها.

5 g الدالة المعرفة على المجال $] -\infty; 0[$ بـ: $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

(أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

6 (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $] -\infty; 0[$: $f(x) > x$.

(ب) إستنتج وظيفية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(ج) أنشئ المنحنى (C_f) .

7 (u_n) المتتالية العرّفة بـ: $u_0 = -3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

(أ) بين أنه من أجل كل عدد

طبيعي n : $u_n < 0$.

(ب) حدّد اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(ج) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم عيّن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

8 m عدد حقيقي. h_m الدالة ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على

المجال $] -\infty; 0[$ بـ: $h_m(x) = x e^{\frac{1}{x}} - mx$

(أ) أحسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m .

(ب) باستعمال المنحنى (C_f) ، ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m
عدد حلول المعادلة $h'_m(x) = 0$

8 باك جوان 2016 م2 (7 ن)

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $\phi(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$

1 أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x)$.

(ب) أدرس اتجاه تغير الدالة ϕ ثم شكل جدول تغيراتها .

2 بيّن أن المعادلة : $\phi(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلاً α يختلف عن 1

ثم تحقق أن : $2,79 < \alpha < 2,80$

3 إستنتج إشارة $\phi(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f و g الدالتان العدديتان المرفقتان على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$f(x) = (2x - 1)e^{-x+1} \text{ و } g(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$$

(C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O : \vec{i}, \vec{j})$.

1 أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2 بيّن أن للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1

ثم جد معادلت له .

3 أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f)

4 أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - g(x) = \frac{(2x - 1)\phi(x)}{x^2 - x + 1}$

(ب) أدرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ على $\mathbb{R}$

ثم إستنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

(ج) باستعمال مكاملة بالتجزئة ، أحسب بدلالة العدد الحقيقي x : $\int_1^x f(t)dt$

(د) أحسب مساحته الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = 2$ ، $x = 1$

(III)

1 أ) أحسب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$. أعط تخميناً لعبارة $f^{(n)}(x)$

حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

2 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$$f^n(x) = (-1)^n [2x - (2n + 1)] e^{1-x}$$

3 (U_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$$u_n = f^{(n)}(1) \text{ كمايلي :}$$

(أ) أحسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم K ، المجموع : $u_k + u_{k+1}$

(ب) إستنتج بدلالة n ، المجموع : $u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}$

9 باك جوان 2017 م (7 ن)

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (-x^3 + 2x^2) e^{-x+1}$
 (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، إستنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) يطلب تعيين معادلتها له .

(ب) بيّن أنّ : من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = x(x^2 - 5x + 4) e^{-x+1}$
 ثم إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها .

2 أكتب معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 .

3 h الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كمايلي : $h(x) = x^2 e^{-x+2}$

أدرس إتجاه تغيّر الدالة h ثم إستنتج إشارة $h(x)$ ، حدّد عندئذ وظيفية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $[0; +\infty[$.

4 أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[0; +\infty[$.

5 نعتبر m وسيط حقيقي والمعادلة ذات المجهول الحقيقي x

$$(E) \dots f(x) = m(x - 2)$$

ناقش بيانها حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) .

6 g الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

إعتمادا على السؤال رقم (1) ، شكل جدول تغيّرات الدالة g .

10 باك جوان (الإستثنائية) 2017 م (7 ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

حيث : $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$. (C) تمثيلها البياني

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها .

3 أثبت أن المنحنى (C) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثيهما ، أحسب $f(-2)$ ، ثم أرسم المنحنى (C) .

II) ليكن m وسيط حقيقي ، نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$

كمايلي : $f_m(x) = (x^2 + mx + 1) e^{-x}$ وليكن (C_m) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

1 أثبت أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω يطلب تعيين إحداثيهما .

2 أدرس اتجاه تغير الدالة f_m وإستنتج قيم m التي من أجلها تقبل الدالة f_m قيمتين حديتين يطلب تعيينهما .

3 M_n نقطة من المنحنى (C_m) فاصلتها x_m حيث : $x_m = 1 - m$.

أثبت أنه عندما m يمسح $\mathbb{R}$ فإن M_n تنتمي إلى منحنى

يطلب تعيين معادلت له .

4 أدرس حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، حيث : $m \neq 2$ ، الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (C_m) .

5 أحسب بدلالة العدد الحقيقي الموجب تماما α ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين

(C) و (C_3) والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = \alpha$ و $x = 0$

ثم أحسب : $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$

11 باك جوان 2018 م 2 (7 ن)

I الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = (1 + x + x^2) e^{-\frac{1}{x}} - 1$

1 بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{(x+1)(2x^3+1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$. وإستنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

2 بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,9 < \alpha < 1$

وإستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x} + (1+x) e^{-\frac{1}{x}}$

و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(ب) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ واستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها .

2 بيّن أنّ : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-\frac{1}{x}} - x) = -1$ (يمكن وضع $t = -\frac{1}{x}$ ثم استنتج أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

3 h الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = \frac{1}{x} - 1 + e^{-\frac{1}{x}}$.

(أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ وأدرس إتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على $]0; +\infty[$.

(ب) تحقّق أنّ : $f(x) - x = (1+x)h(x)$ ثم استنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4 أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) . (نأخذ $f(\alpha) \approx 1,73$) .

5 (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام u_n

$$u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}$$

(أ) أكتب u_n بدلالة n ثم بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول u_1 .

(ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = \left(\frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$$

1 بأك جوان 2019 م (7 ن) الحل موجود في الصفحة 67

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx}$

حيث K وسيط حقيقي.

ليكن (C_k) التمثيل البياني للدالة f_k في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 بيّن أن كل المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما .

2 أحسب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ و $+\infty$

(ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي K) .

3 (أ) أحسب $f'_k(x)$ ، ثم حدّد حسب قيم الوسيط الحقيقي K إتجاه تغير الدالة f_k .

(ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل K عدد حقيقي موجب تماما .

4 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي K الأوضاع النسبية

للمنحنيين (C_k) و (C_{k+1}) .

II الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x+1)^2 e^{-2x}$
 نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد
 والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 شكل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم المنحنى (C_f) على المجال $[-\frac{3}{2}; +\infty[$.

2 أ) بيّن أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما α
 حيث: $-1, 27 < \alpha < 1, 28$.

ب) عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل
 المعادلة: $\left| \frac{x+1}{e^x} \right| = \left| \frac{m+1}{e^m} \right|$ حلا وحيدا.

3 g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) + (x+1)e^{-2x}$.

أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$
 ثم استنتج دالة أصلية لـ g على $\mathbb{R}$.

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة، أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) ومحور
 الفواصل
 والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = -1$

12 باك سبتمبر 2020 م (7 ن)

I الدالتان العدديتان g و h معرفتان على المجال $]-\infty; 0]$ كمايلي: $g(x) = -2e^x$ و $h(x) = x(e^x + 1)$.
 حدّد إشارة كل من $h(x)$ و $g(x)$ على المجال $]-\infty; 0]$.

II الدالة العددية f معرفة على المجال $]-\infty; 0]$ بـ: $f(x) = (x-3)e^x + \frac{1}{2}x^2$
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أ. بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty; 0]$: $f'(x) = h(x) + g(x)$
 ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty; 0]$.

2 أحسب $f(0)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3 بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty; 0]$
 ثم تحقق أن: $-1, 5 < \alpha < -1, 4$.

4 (p) هو التمثيل البياني للدالة: $x \rightarrow \frac{1}{2}x^2$ على المجال $]-\infty; 0]$.

أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x^2 \right]$ ثم فسّر النتيجة بيانيا.
 ب. أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (p) و (C_f) على المجال $]-\infty; 0]$.

5 ليكن m وسيطا حقيقيا ، ناقش بيانيا و حسب قيم m عدد حلول المعادلة : $|f(x)| = e^m$ في $]-\infty; 0]$.

1 باك جوان 2009 م (7 ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1}$.
ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أحسب $f(x) + f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x

ثم إستنتج أن النقطة $\omega(0; 1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

2 أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$ ثم إستنتج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

3 أ) بين أن المستقيم ذي المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)

عند $(+\infty)$.

ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)]$ ، إستنتج المستقيم المقارب للمنحنى (C_f)

عند $(-\infty)$.

4 بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا α بحيث $-1, 7 < \alpha < -1, 6$

5 أرسم (C_f) من أجل $x \in \mathbb{R}$

6 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x} + 1}$

7 أ) أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)

والمستقيمات ذات المعادلات : $y = x + 2$ و $x = 0$ و $x = \alpha$

ب) بين أن $A(\alpha) = \ln(-\alpha)$ ثم إستنتج حصرا للعدد $A(\alpha)$.

2 باك جوان 2010 م (7 ن)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة : $f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)}$

ليكن (C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 عين العددين الحقيقيين a و b بحيث : $f(x) = ax + \frac{b}{3(e^x - 1)}$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$

2 احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجالات تعريفها.

3 بيّن أن f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها
ثم شكل جدول تغيراتها.

4 أ) (D) و (D') المستقيمان اللذان معادلتهما على الترتيب $y = x + \frac{4}{3}$ و $y = x$

بين أن (D) و (D') مقاربان لـ (C_f) ، ثم حدد وضعيته بالنسبة لكل منهما.

ب) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_0 و x_1

حيث: $0,91 < x_0 < 0,9$ و $-1,65 < x_1 < -1,66$

ج) احسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(-x) + f(x)$

ثم فسّر النتيجة هندسيا.

د) أرسم (D) و (D') و (C_f) .

هـ) m عدد حقيقي، (D_m) المستقيم المعرّف بالمعادلة $y = x + m$

ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$

5 نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = [f(x)]^2$

ادرس تغيرات الدالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x .

3 باك جوان 2011 م (5.7 ن)

(I) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أدرس تغيرات الدالة f .

2 عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

3 بيّن أن للمنحنى (C_f) نقطة إنعطاف ω يطلب تعيينها

ثم أكتب معادلة مماس (C_f) عندها.

4 لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = f(x) - x$.

أ) أدرس تغيرات الدالة g .

ب) بيّن أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث: $2,7 < \alpha < 2,8$.

5 أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) = 0$.

ب) أرسم المماس والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = x$ والمنحنى (C_f) .

(II) (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$
ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1 باستخدام (C_f) والمستقيم (Δ) مثل u_0 و u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل .

2 بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n < \alpha$.

3 بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

4 استنتج أن (u_n) متقاربة وبيّن أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

4 باك جوان 2012 م2 (7 ن)

I g هي الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$.

1 أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

2 بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α
حيث : $1,59 < \alpha < 1,60$.

3 استنتج إشارة $g(x)$.

(II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$.
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد
والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1 بيّن أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتهما
على الترتيب $y = -1$ و $y = 0$.

(أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-2x)}$
(ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(ج) أحسب $f(1)$ ، ثم استنتج ، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$.

2 (أ) بيّن أن $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha-1}$ ، حيث α هو العدد المعرف
في السؤال 2 من الجزء I) .

(ب) استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})
ج - أرسم (C_f) .

3 ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول
المعادلة : $2x - 2 = (e^x - 2x)(m + 1)$

4 هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = [f(x)]^2$.

- (أ) أحسب $h'(x)$ بدلالة كل من $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$.
(ب) - شكل جدول تغيرات الدالة h .

5 باك جوان 2013 م 2 (5.7 ن)

I الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x-1)e^x$.

1 أدرس تغيرات الدالة g .

2 بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $1 + (x-1)e^x \geq 0$.

II f هي الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x} & x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1 (أ) بيّن أن f مستمرة على $[0; +\infty[$.

(ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2 (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2} ;$$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

III n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ ، الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$

$$f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x ;$$

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{i}, \vec{j})$.

1 أدرس اتجاه تغير الدالة f_n على المجال $[0; +\infty[$.

2 أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$.

3 أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

4 بيّن أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثياتها .

5 (أ) بيّن أنه ، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0, 3; 0, 4[$ بحيث : $f_1(\alpha_1) = 0$.

(ب) بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن : $f_n(\alpha_1) < 0$.

ثم برهن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]\alpha_1; 1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

6 أ) بالإعتماد على الجزء II ، بيّن أنه ، من أجل كل

$$x \in]0;1] : \frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1 .$$

ب) استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$: $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$ ثم $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

ج) جد نهاية المتتالية (α_n) .

6 باك جوان 2014 م 2 (6 ن)

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x-1)e^x$
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 عيّّن نهاية f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

2 أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها

3 أ) بيّن أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$

ثم تحقق أن: $1,27 < \alpha < 1,28$

ب) معادلة T مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

وحدد وضعيت (C_f) بالنسبة إلى (T)

ج) أرسم (T) و (C_f)

4 غيّّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها المعادلة $(x-1)e^x - (m-1)e^m = -1$ حلا واحدا في $\mathbb{R}$

5 h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (|x|+1)e^{-|x|}$ و (C_h) تمثيلها البياني

أ) بيّن أن h دالة زوجية

ب) أرسم (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f)

6 g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (ax+b)e^x$ حيث a و b عددان حقيقيان

عيّن a ، b حتى يكون : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) = f'(x)$

7 باك جوان 2015 م 2 (7 ن)

g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x+2)e^x - 2$.

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

2 أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

3 أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x + 3 - (x+1)e^x$.
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 (أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x) = -g(x)$.

(ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(ج) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x + 3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ ، ثم أدرس وضعيته (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3 (أ) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β

حيث : $0,92 < \alpha < 0,93$ و $-1,55 < \beta < -1,56$.

(ب) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; \frac{3}{2}]$.

4 (أ) بيّن أن الدالة $x \mapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$.

(ب) أحسب العدد A مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = \alpha$ و $x = 0$

(ج) جد حصرا للعدد A .

8 باك جوان 2017 (الإستثنائية) م 2 7 ن

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = 1 - 2xe^{-x}$

-أدرس إتجاه تغير الدالة g ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = (x+1)(1+2e^{-x})$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{j}\| = 1cm$

1 (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(ب) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها

2 (أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x-x)] = 1$ ثم استنتج معادلة (Δ) ، المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f)

(ب) أدرس وضعيته المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

3 أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي (Δ) يطلب تعيين

معادلتها له .

4 باستعمال المنحنى (C_f) ، عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = x + m$ حلين مختلفين.

5 ليكن α عددا حقيقيا موجبا، نرسم $\mathbb{A}(\alpha)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها على الترتيب: $y = x + 1$

$$x = \alpha, x = -1$$

- أحسب $\mathbb{A}(\alpha)$ بدلالة α ، ثم $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathbb{A}(\alpha)$

9 باك جوان 2018 م (7 ن)

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; 1[$ بـ: $f(x) = \frac{x}{x-1} e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا وأحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

2 بيّن أنّه من أجل كل x من $]-\infty; 1[$: $f'(x) = \frac{(-x^2 + x - 1)e^{-x}}{(x-1)^2}$ وأدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3 أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر.

ب) h دالة عددية معرفة على المجال $]-\infty; 1[$ بـ: $h(x) = e^{-x} + x - 1$.
أدرس اتجاه تغير الدالة h ثم إستنتج أنّه من أجل كل x من $]-\infty; 1[$: $h(x) \geq 0$

4 بين أنّه من أجل كل x من $]-\infty; 1[$: $f(x) + x = \frac{xh(x)}{x-1}$

ثم إستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) . فسر النتيجة بيانيا

5 أكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل مبدأ المعلم O والنقطة $A(-2; \frac{2}{3}e^2)$

ثم أرسم المستقيمين (T) و (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $]-2; 1[$

6 أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $[-1; 0]$: $\frac{x}{x-1} \leq f(x) \leq e^{-x}$

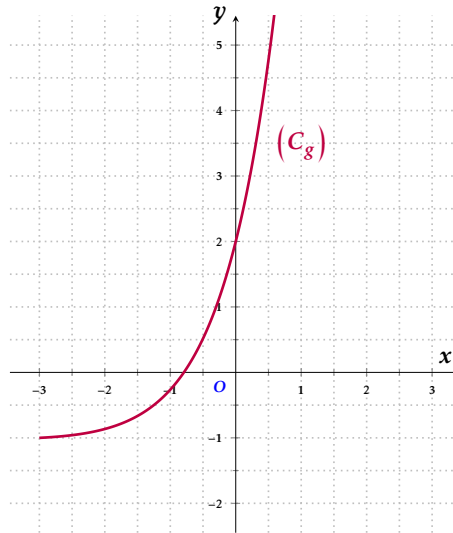
ب) تحقق أنّه من أجل كل x من $[-1; 0]$: $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$

ثم بين أن: $1 - \ln(2) \leq \int_{-1}^0 f(x) dx < e - 1$

7 m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx$ ، $x \in [-2; 1[$

1 **باك جوان 2019 م 2 (7 ن)** **الحل موجود في الصفحة 65**

(I) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = (x + 3)e^x - 1$ و (C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل .



بقراءة بيانية:

(أ) حدّد إشارة $g(-1)$ و $g(-\frac{1}{2})$.

(ب) إستنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $]-1; -\frac{1}{2}[$ بحيث $g(\alpha) = 0$ ثم تحقّق أنّ : $-0.8 < \alpha < -0.7$.

(ج) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = (x + 2)(e^x - 1)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 بيّن أنّه من كلّ عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$ ،

ثم كلّ جدول تغيرات الدالة f .

3 (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$ ثم إستنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلتة له.

(ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

(ج) أكتب معادلتة لـ : (T) مماس (C_f) الموازي للمستقيم (Δ) .

4 أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 1]$ (يعطى $f(\alpha) \approx -0.7$)

5 أحسب $f(x) - g(x)$ ثم إستنتج دالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6 الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x) = |x|(e^{|x|-2} - 1) + 1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

(أ) بيّن أن الدالة h زوجية.

(ب) تأكد أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$ فإن $h(x) = f(x - 2) + 1$.

(ج) اشرح كيف يمكن رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسم (C_h)

على المجال $[-3; 3]$.

10 باك سبتمبر 2020 م (7 ن)

الدالة العددية f معرفة على المجال $[-1; +\infty[$ ب: $f(x) = x - 1 + \frac{1}{4}(2e^{-x} - 1)^2$ المنحنى البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1 أ. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1; +\infty[$:

$$f'(x) = (1 - e^{-x})(2e^{-x} + 1)$$

ب. أدرس إشارة $f'(x)$ وإستنتج إتجاه تغير الدالة f

2 أ. بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = x - \frac{3}{4}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

3 بيّن أن المنحنى البياني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة له .

4 بيّن أن المنحنى البياني (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيينها.

5 أرسم (Δ) ، (T) والمنحنى البياني (C_f) .

6 ليكن m وسيطا حقيقيا . عيّن مجموعة قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة : $f(x) = x + m$ حلين مختلفين .

11 باك جوان 2021 م (7 ن)

(I) الدالة العددية g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = x^2 - 5 + e^{x-1}$

1 بين أن الدالة g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$

2 أ. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,71 < \alpha < 1,72$

ب. إستنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب x إشارة $g(x)$

(II) الدالة العددية f معرفة على $[0; +\infty[$ ، بـ: $f(x) = x + 1 + (-x^2 - 2x + 3)e^{1-x}$.
(C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f'(x) = g(x)e^{1-x}$

ب. إستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $[\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $[0; \alpha]$

ج. بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

2 بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C) ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

3 بين أن (C) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في نقطة A يطلب تعيين فاصلتها (لايطلب كتابة معادلة (T))

4 أ. بين أن (C) يقبل نقطة إنعطاف وحيدة فاصلتها $(1 + \sqrt{6})$

ب. أرسم (Δ) ، (T) و (C) (نأخذ : $f(\alpha) \approx 1,1$ ، $f(\sqrt{5}) \approx 1,4$ و $f(1 + \sqrt{6}) \approx 3,1$)

5 الدالة العددية h معرفة على المجال $]-\infty; 0]$ بـ: $h(x) = -x + 1 + (-x^2 + 2x + 3)e^{1+x}$
(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0]$: $h(x) = f(-x)$

ب. إشرح كيفية رسم (C_h) إنطلاقا من (C) ثم أرسمه .

1 نص التمرين الحل موجود في الصفحة 70

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$.

1 (أ) عيّن نهاية الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

(ب) أدرس اتجاه تغير الدالة وشكل جدول تغيراتها.

2 أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) لتكن الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$.
نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 عيّن نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2 بيّن أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يُطلب تعيين معادلت له.

3 أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4 برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = g(x)$.

5 استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

6 أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = -\frac{1}{2}$.

7 بيّن أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β حيث $-3.5 < \alpha < -3$ و $0.5 < \beta < 1$.

8 أنشئ (Δ) و (T) و (C_f) .

9 ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = x + m$.

(III) h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي : $h(x) = \frac{1 + 3x - e^{\frac{2}{x}}}{x}$.

1 بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

2 أحسب $h'(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h وشكل جدول تغيراتها.

2 نص التمرين الحل موجود في الصفحة 73

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (2x + 1)e^x - 1$.

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

2 أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

3 أحسب $g(0)$ وحدد إشارة $g(x)$.

II نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty; 1]$ بـ : $f(x) = x \cdot (1 - e^x)^2$. (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب لـ (C_f) .

3 أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

4 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 1]$ لدينا : $f'(x) = (e^x - 1) \cdot g(x)$.

5 استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها.

6 أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها.

7 أكتب معادلة (T) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1.

8 أنشئ (Δ) ، (T) و (C_f) .

III h الدالة المعرفة على $[-1; 1]$ بـ : $h(x) = x \cdot (1 - e^{|x|})^2$.

1 أدرس قابلية اشتقاق الدالة h عند 0 . ماذا تستنتج؟

2 بين أن h دالة فردية. ثم استنتج طريقة لرسم منحناها دون دراسة تغيراتها.

3 أنشئ (C_h) منحنى الدالة h في نفس المعلم السابق.

3 نص التمرين الحل موجود في الصفحة 76

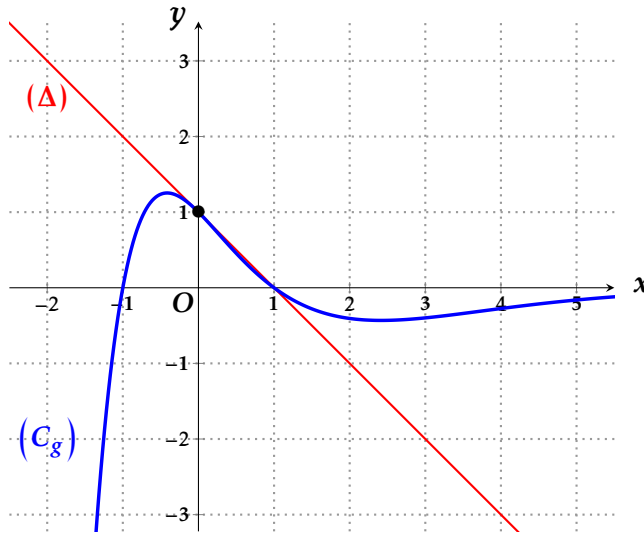
I الشكل المقابل هو (C_g) التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (1 + ax^2)e^{bx}$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Δ) المماس لـ (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة 0. بقراءة بيانية:

1 أحسب $g(0)$ ، $g(-1)$ و $g'(0)$.

2 أكتب معادلة (Δ) .

3 عيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

4 بالاستعانة بالمعطيات السابقة تحقق أن: $g(x) = (1 - x^2)e^{-x}$.



(II) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم أثبت أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ وفسر النتيجة هندسيا.

2 بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ وشكل جدول تغيراتها.

3 عيّن دون حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

4 استنتج معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5 بين أن المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا α على $]-\infty; -1]$ ثم تحقق أن $\alpha \in [-2; -1]$.

6 بيّن أن α يحقق العلاقة : $\alpha = -1 - \sqrt{2} e^{\frac{\alpha}{2}}$.

7 أنشئ (T) و (C_f) على المجال $[-2; +\infty[$.

8 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = \ln(m)$.

(III) h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f(x^2) - 1$.

• باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة

4 نص التمرين الحل موجود في الصفحة 79

(I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2 - 2e^{-x} - x$.

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2 عيّن اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

3 بين أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.59 < \alpha < 1.6$.

4 أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ تبعا لقيم x .

(II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ ، $f(x) = \frac{-e^x + 1}{x^2}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 عيّن نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ ثم عند 0 وفسر النتيجة بيانيا.

2 بيّن من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم أن: $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{x^3}$

3 أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4 تحقق أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(-2 + \alpha)}$

5 أحسب $f(5)$ ثم أنشئ (C_f) (نأخذ: $f(\alpha) \approx -1.5$)

6 ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^2 e^m - m^2 e^x = x^2 - m^2$.

(III) لتكن الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ ، $h(x) = \frac{|-e^{-x} + 1|}{x^2}$ وليكن (C_h) تمثيلها البياني.

1 بيّن أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $h(x) = f(-x)$

2 إستنتج كيفية إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) ، ثم أنشئ (C_h)

5 نص التمرين الحل موجود في الصفحة 83

m عدد حقيقي موجب تماما، نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ ، $f_m(x) = x - 1 + x e^{mx}$ نرمز بـ (C_{f_m}) للمنحنى الممثل للدالة f_m في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (I نعتبر الدالة g_m المعرفة على $\mathbb{R}$ ، $g_m(x) = 1 + (1 + mx)e^{mx}$

1 أحسب الدالة المشتقة g'_m للدالة g_m ، ثم أدرس إشارتها

2 شكل جدول تغيرات الدالة g_m ، ثم إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g_m(x) > 0$

II 1 (أ) بيّن أن جميع المنحنيات (C_{f_m}) تمر بنقطة ثابتة I يطلب تعيين إحداثياتها.

(ب) أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x)$

(ج) بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_{f_m}) بجوار $-\infty$

(د) أدرس الوضع النسبي لـ (D) و (C_{f_m})

2 أدرس اتجاه تغير الدالة f_m ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3 (أ) عيّن معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_{f_m}) عند النقطة التي ترتيبتها -1

(ب) بيّن أن النقطة $A_m\left(-\frac{2}{m}; -\frac{2}{m}(1 + e^{-2}) - 1\right)$ نقطة إنعطاف للمنحنى (C_{f_m}) .

4 بيّن أن المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_m حيث $0 < \alpha_m < 1$

- 5 (أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f_m(x) + f_{-m}(-x) = -2$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_{f_m}) و $(C_{f_{-m}})$ حيث $(C_{f_{-m}})$ منحنى ممثل للدالة المعرفة بـ: $f_{-m}(-x)$.
 (ب) أنشئ كلا من (Δ) ، (D) و (C_{f_1}) . ثم أنشئ $(C_{f_{-1}})$ انطلاقاً من (C_{f_1}) (نقبل أن $\alpha_1 \approx 0,4$ ، $f_1(2) \approx$)
 (16)

(III) نعتبر الدالة F المعرفة على R بـ $F(x) = f_1(x^2)$.

(C_F) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم السابق

1 استنتج اتجاه تغير الدالة F (دون حساب الدالة المشتقة للدالة F)

2 أدرس الوضع النسبي لـ (C_{f_1}) و (C_F) من أجل $x \in [0; +\infty[$ ثم أنشئ (C_F) على $\mathbb{R}$

3 ناقش حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماماً m عدد حلول المعادلة : $e^{F(x)} = m$

1

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$.
 (C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ، ثم بيّن أنّ المستقيم الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

2 (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x تكون : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$.

(ب) استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$ ، وأنّ المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$.

3 حدّد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المقاريين .

4 أدرس اتجاه تغير الدالة f ، وشكل جدول تغيراتها .

5 أنشئ المنحني (C) والمستقيمات المقاربتين .

6 ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول

$$(1 - m)(e^x + 1) - 2e^x = 0$$

2

نعتبر الدالتان f_0 و f_1 المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f_0(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

و $f_1(x) = \frac{1}{1 + e^x}$. وليكن (C_0) و (C_1) منحنيهما البيانيين في

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(I)

1 أحسب نهاية f_0 عند $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم استنتج المستقيمات المقاربية للمنحني (C_0) .

2 بيّن أن النقطة $K(0; \frac{1}{2})$ هي مركز التناظر للمنحني (C_0) .

3 أدرس تغيّرات الدالة f_0 .

4 عيّن معادلة المماس (T) للمنحني (C_0) عند النقطة K .

5 (أ) بيّن أنه لدراسة وضعيّة (T) بالنسبة إلى (C_0) يكفي دراسة إشارة

$$g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$$

(ب) أحسب كلا من $g'(x)$ و $g''(x)$ ، ثم عيّن مع التبرير إشارة $g''(x)$

$g(x)$ ، $g'(x)$ ، وذلك حسب قيم x .

(ج) استنتج وضعيّة المنحني (C_0) بالنسبة إلى المماس (T) .

(د) أنشئ المماس (T) والمنحني (C_0) .

(II)

1 بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x تكون النقطتان : $M(x; f_0(x))$

$$y = \frac{1}{2}$$

2 شكّل جدول تغيّرات الدالة f_1 ، ثم أنشئ المنحني (C_1) في نفس المعلم السابق

3

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = e^x - x - 1$.

1 أحسب نهايات الدالة g عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2 أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ، وشكّل جدول تغيّراتها .

3 أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

(II)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$.

(C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ ، ثم فسّر النتائج هندسياً .

2 أحسب $f'(x)$ ، ثم أدرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكّل جدول تغيّراتها .

3 (أ) عيّن معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

(ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى المماس (T) .

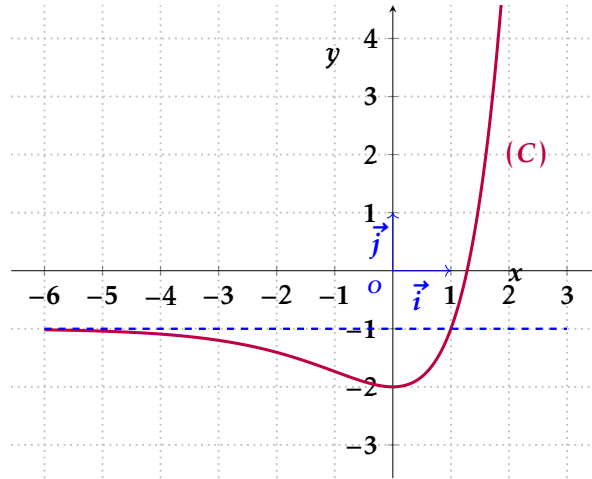
4 انشئ المماس (T)، والمستقيمات المقاربتة، والمنحني (C).

5 m وسيط حقيقي، ناقش بياناً وحسب قيم m حلول المعادلة: $f(x) = mx$.

4

(I) في الشكل المقابل: (C) هو المنحني الممثل للدالة g المعرفة

$$g(x) = (ax + b)e^x + c \text{ على } \mathbb{R} \text{ بـ :}$$



1 بقراءة بيانيت:

(أ) عيّن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ، ثم استنتج قيمة c.

(ب) عيّن نهاية الدالة g عند $+\infty$.

(ج) عيّن كلاً من: $g(0)$ و $g'(0)$ ، ثم استنتج قيمتي كل من a و b.

2 نفرض فيما يلي: $g(x) = (x - 1)e^x - 1$.

(أ) شكّل جدول تغيّرات الدالة g.

(ب) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α محصور

بين: 1, 2 و 1, 3.

(ج) استنتج إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$

وليكن (C_f) منحناها البياني في م.م.م.م.م. $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم حدّد المستقيم المقارب بجوار $+\infty$.

2 بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

3 أدرس إتجاه تغيّر الدالة f، وشكّل جدول تغيّراتها.

4 بيّن أنّ: $f(\alpha) = \alpha - 1$ ، ثم استنتج حصراً لـ $f(\alpha)$.

5 أنشئ المنحني (C_f) .

6 ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول

المعادلة : $f(x) = f(m)$.

5

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
(I)

1 برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 1$ مقارب للمنحني (C) .

2 (أ) أحسب : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ ، وذلك من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$.

(ب) ماذا يمكن إستنتاجه بالنسبة للدالة f ، وبالنسبة للمنحني (C) ؟ .

3 بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$ تكون : $f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$.

4 أدرس تغيّرات الدالة f ، وشكل جدول تغيّراتها .

(II)

نعتبر g الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

1 بيّن أنه في المجال $[0; +\infty[$ المعادلتان : $g(x) = 0$ و $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ متكافئتان .

2 برهن أن المعادلة $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ تقبل حلاً وحيداً α

حيث : $0,39 < \alpha < 0,40$.

3 نفرض (T_a) هو المماس للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة a

حيث : $a > 0$.

(أ) بيّن أن المماس (T_a) يشمل المبدأ O ، إذا وافقت

إذا كان : $f(a) - xf'(a) = 0$.

(ب) إستنتج أن المماس (T_a) المار بالمبدأ يمس المنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة α .

(ج) أنشئ المماس (T_a) ، والمنحني (C) .

4 بقراءة بيانية ، أعط عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx$ ، وذلك حسب قيم الوسيط الحقيقي m .

تعطى النتيجة : $f'(\alpha) \approx 2,029$.

(I)

n عدد طبيعي غير معدوم ، نعتبر الدالة المعرفة على $]-1; +\infty[$

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}}{(1+x)^n} ;$$

(C_n) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدته $1cm$.

1 (أ) أحسب نهايات الدالة f_n عند حدود مجال التعريف .

(ب) أحسب $f'_n(x)$ و ادرس إشارتها .

(ج) أنشئ جدول تغيرات الدالة f_n .

2 بيّن أن جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها .

3 (أ) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) .

(ب) أرسم بدقة وفي نفس المعلم المنحنيين (C_1) و (C_2) .

(I) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx ;$$

1 أكتب $f'_n(x)$ بدلا لـ $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$.

2 (أ) بيّن أن المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متناقصة .

(ب) إستنتج أن المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة .

3 (أ) بيّن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ و $0 \leq x \leq 1$

$$\frac{e^{-1}}{(1+x)^n} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{(1+x)^n} ;$$

(ب) إستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$$\frac{e^{-1}}{n-1} \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right] \leq I_n \leq \frac{1}{n-1} \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right] ;$$

(ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

4 (أ) إعتمدا على السؤال (1/II)

$$I_n + nI_{n+1} = 1 - \frac{e^{-1}}{2^n} ;$$

(ب) إستنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.

(ج) أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي A المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) والمستقيمين $x = 0$ و

$x = 1$.

(I) الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :
 $g(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$

1 (أ) احسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g

(ج) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $\ln 4 \leq \alpha < \ln 6$
 (د) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

2 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = 2(1 - e^{-u_n})$$

(أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n < \alpha$.

(ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} - u_n = g(u_n)$$

استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

(ج) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(II) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$

$$f(x) = \frac{1 - e^x}{x^2}$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ فسر النتيجة بيانيا .

(ب) تحقق أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha - 2)}$

2 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{x^3}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3 أنشئ (C_f) (نأخذ $\alpha = 1, 5$) .

(III) F الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $F(0) = -\ln 2$ ومن أجل

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1 - e^t}{t^2} dt, \quad x > 0$$

1 باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنه من أجل $x > 0$ ،

$$F(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2x} - \frac{e^x - 1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

2 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$

$$e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$$

3 احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ ثم استنتج أن الدالة F مستمرة عند القيمة 0 من اليمين .

8 I لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (3 - 2x)e^x + 2$.

1 ادرس تغيرات الدالة g .

2 يبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا جيدا α حيث $1.68 < \alpha < 1.69$.

3 استنتج إشارة $g(x)$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1}$ وليكن (C) المنحني الممثل لها في المستوى المنسوب الي معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، (الوحدة : $2cm$) .

1 اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x + 1)^2}$.

2 يبين أن $f(\alpha) = 4\alpha - 5$ ، ثم اعط حصر للعدد $f(\alpha)$.

3 ادرس تغيرات الدالة f .

4 اثبت ان المنحني (C) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل نرمز له بالرمز (Δ) .

- ادرس الوضعية النسبية للمنحني (C) والمستقيم (Δ) .

5 اكتب معادلة المماس (D) للمنحني (C) في النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.
- انشئ المستقيمان (D) و (Δ) والمنحني (C) .

6 لتكن h الدالة المعرفة على $(]-\infty, \alpha])$ بـ : $(hof)(x) = x$

(أ) باستعمال نظرية اتجاه تغير دالة مركبة ادرس تغيرات الدالة h
ثم شكل جدول تغيراتها .

(ب) احسب $h'(1)$ العدد المشتق للدالة h في النقطة ذات الفاصلة 1 .

(ج) اكتب معادلة المماس للمنحني $(\mathcal{H})$ الممثل للدالة h في النقطة ذات الفاصلة 1 .

(د-) انشئ المنحني $(\mathcal{H})$ الممثل للدالة h في المعلم السابق .

7 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول

$$me^x - 4x + m + 2 = 0$$

بكالوريا الجزائر 2006 بالتصرف حسب المنهاج الحالي

1 الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 10 - 8x + e^x$.

(أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) > 18 - 24\ln 2$.

2 الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{2x}{e^x + 1}$.

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، حيث : $\|\vec{i}\| = 1cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm$.

(أ) (1) احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{9 + e^x g(x)}{4(e^x + 1)^2}$

(ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

(ب) (أ) أثبت أن المنحني (C) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (Δ) معادلته $y = \frac{1}{4}x$ عند $+\infty$ والآخر

(Δ') معادلته $y = \frac{9}{4}x$ عند $-\infty$.

(ب) ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) .

(ج) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = 1 + e^x - xe^x$.

(أ) ادرس تغيرات الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(ب) بين أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0; +\infty[$

ثم تحقق أن $1.2 < \alpha < 1.3$.

(ج) استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

(د) (أ) بين أن المنحني (C) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) في النقطة التي

فاصلتها α .

(ب) بين أن : $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$ وأن : $f(\alpha) = \frac{9}{4}\alpha - 2$.

(ج) اكتب معادلة للمماس (T) .

(هـ) (أ) مثل (Δ) ، (Δ') ، (T) و (C) .

(ب) نأخذ : $f(\alpha) \approx 0.9$ ونقبل أن (Δ') يقع تحت (C) في المجال $]-\infty, 0]$ ويقع فوق (C) في المجال $[0; +\infty[$

(ب) ناقش بيانها ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد إشارة حلول المعادلة : $f(x) = \frac{1}{4}x + m$

(و) من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$ ، نعتبر النقطة K من محور الفواصل فاصلتها x . المستقيم

الموازي لمحور الترتيب والذي يشمل النقطة K يقطع المنحني (C) في المقطة M والمستقيم

(Δ) في النقطة N ، نضع : $\varphi(x) = MN$

(أ) بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $\varphi(x) = \frac{2x}{e^x + 1}$.

(ب) عين فاصلته النقطة M حتي تكون المسافة MN عظمى .

1 g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

(أ) ادرس تغيرات الدالة g .

(ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلا وحيدا α

حيث $0,94 < \alpha < 0,941$.

(ج) إستنتج حسب رقم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

2 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$.

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم

متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، (الوحدة : $2cm$) .

(1) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = e^{-x}g(x)$.

(ب) ادرس تغيرات الدالة f .

(ب) بين أن : $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$ ، ثم إستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(ج) (أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 2x - 5$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

(ب) ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(د) أنشئ (C) .

(هـ) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = |2x - 5|(1 - e^{-x})$.

- اشرح كيفية لرسم المنحنى الممثل للدالة h انطلاقا من المنحنى (C)

ثم انشئه .

3 من أجل كل عدد طبيعي n اكبر من او يساوي 3 ، نعتبر النقط A_n ، B_n و C_n ذات الفاصلة n التي

تنتمي على الترتيب، إلى محور الفواصل، المستقيم (Δ) ، والمنحنى (C) .

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_n = \frac{C_n B_n}{A_n B_n}$.

(أ) بين أنه من أجل كل $n \geq 3$: $u_n = \frac{2n - 5 - f(n)}{2n - 5}$.

(ب) بين أن المتتالية (u_n) هندسية أساسها e^{-1} ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow 0} u_n$.

m عدد حقيقي موجب تماما ، نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$

بـ : $f_m(x) = x - 1 + x e^{mx}$

نرمز بـ (C_{f_m}) للمنحنى الممثل للدالة f_m في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(I) نعتبر الدالة g_m المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g_m(x) = 1 + (1 + mx) e^{mx}$

1 أحسب الدالة المشتقة g'_m للدالة g_m ، ثم ادرس إشارتها

2 شكل جدول تغيرات الدالة g_m ، ثم إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g_m(x) > 0$

II 1 أ. بيّن أن جميع المنحنيات (C_{f_m}) تمر بنقطة ثابتة I يطلب تعيين إحداثياتها .

ب. أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x)$

ج. بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_{f_m}) بجوار $-\infty$

د. أدرس الوضع النسبي لـ (D) و (C_{f_m})

2 أدرس اتجاه تغير الدالة f_m ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3 أ. عيّن معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_{f_m}) عند النقطة التي ترتيبتها -1

ب. بيّن أن النقطة $A_m\left(-\frac{2}{m}; -\frac{2}{m}(1 + e^{-2}) - 1\right)$ نقطة إنعطاف للمنحنى (C_{f_m}) .

4 بيّن أن المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_m حيث $0 < \alpha_m < 1$

5 أ. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f_m(x) + f_{-m}(-x) = -2$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_{f_m}) و $(C_{f_{-m}})$

حيث $(C_{f_{-m}})$ منحنى ممثل للدالة المعرفة بـ : $f_{-m}(-x)$

ب. أنشئ كلا من (Δ) ، (D) و (C_{f_1}) . ثم أنشئ $(C_{f_{-1}})$ انطلاقا من (C_{f_1}) (نقبل أن $\alpha_1 \approx 0,4$ ، $f_1(2) \approx$ 16)

(III) نعتبر الدالة F المعرفة على R بـ $F(x) = f_1(x^2)$

(C_F) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق

1 إستنتج اتجاه تغير الدالة F (دون حساب الدالة المشتقة للدالة F)

2 أدرس الوضع النسبي لـ (C_{f_1}) و (C_F) من أجل $x \in [0; +\infty[$ ثم أنشئ (C_F) على R

3 ناقش حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما m عدد حلول المعادلة : $e^{F(x)} = m$

حلّول بعض التمارين

✓ حل التمرين رقم 1 :

1

(أ) الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $g'(x) = e^x - e$.

$g'(x) = 0$ معناه $x = 1$ ، $g'(x) > 0$ معناه $x > 1$ ، $g'(x) < 0$ معناه $x < 1$ ومنه g متزايدة تماماً على المجال $]1, +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 1]$.

(ب) بما أن g متزايدة تماماً على المجال $]1, +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 1]$ فإن $g(1)$ قيمة حديّة صغرى إذن $g(x) \geq g(1)$ لكن $g(1) = 0$ ومنه $g(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x .

2

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = e^x - ex$ أي $f'(x) = g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ، ومنه $f'(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x فهي متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

3

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4

لدينا $f(x) - g(x) = e(-\frac{1}{2}x^2 + x)$.

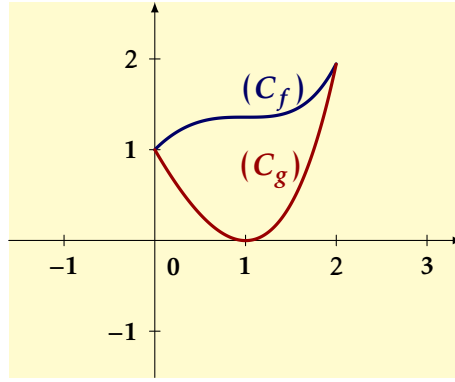
إشارة $f(x) - g(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x) - g(x)$	-	0	+	-

ومنه (C_f) فوق (C_g) في المجال $]0, 2[$ وتحت في المجالين $]-\infty, 0[$ و $]2, +\infty[$ ويتقاطعان في النقطتين $A(0, 1)$ و $B(2, e^2 - 2e)$.

5

الرسم :

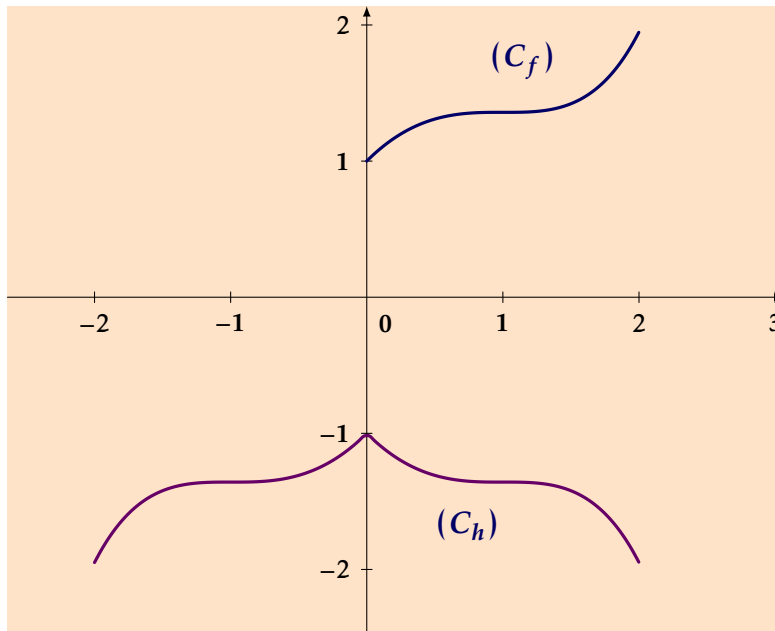


6 مساحة الحيز المحدد بين (C_f) و (C_g) هي $\mathcal{A} = \int_0^2 [f(x) - g(x)] dx$ أي $\mathcal{A} = \int_0^2 -\frac{1}{2}e \cdot x^2 + e \cdot x dx$ ومنه $\mathcal{A} = \left[-\frac{1}{6}e \cdot x^3 + \frac{1}{2}e \cdot x^2 \right]_0^2 = 2e - \frac{4}{3}e$ أي $\mathcal{A} = 8e - \frac{16}{3}e$ أي $\mathcal{A} = \frac{8e}{3} \text{ cm}^2$.

7 (أ) من أجل كل x من المجال $[-2, 2]$ لدينا $-x$ عنصر من المجال $[-2, 2]$ و $h(-x) = \frac{1}{2}e \cdot x^2 - e^{|-x|}$ ، لكن $|x| = |-x|$ ومنه $h(-x) = \frac{1}{2}e \cdot x^2 - e^{|x|} = h(x)$ مما يدل على أن الدالة h زوجية.

(ب) من أجل $x \in [0, 2]$ أي $h(x) + f(x) = 0$ أي $h(x) = -f(x)$ على المجال $[0, 2]$ ، إذن (Γ) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل عندما يكون $x \in [0, 2]$ ، ثم نناظر هذا الجزء بالنسبة إلى حامل محور الترتيب نتحصل على الجزء الباقي من (Γ) على المجال $[-2, 0]$.

📐 - الرسم :



✓ حل التمرين رقم 1 :

(I) لدينا : $g(x) = (x+1)(x+e) - e(x \ln x)$ حساب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [(x+1)(x+e) - e(x \ln x)] = e$

لأن $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$

بما أن الدالة g متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = e$ فإن الدالة g موجبة على $]0; +\infty[$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln(x+1) + \frac{e \ln x}{x+1}$.

1 (أ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln(x+1) + \frac{e \ln x}{x+1} \right] = -\infty$ حساب النهاية:

إثبات أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e \ln x}{x+1} = 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(ب) إثبات المشتقة: $f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{e(x+1) - ex \ln x}{(x+1)^2}$ أي أن $f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{e}{x} \frac{(x+1) - ex \ln x}{(x+1)^2}$

ومنه $f'(x) = \frac{(x+e)(x+1) - ex \ln x}{x(x+1)^2} = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$ إذن $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$

(ج) إشارة المشتقة موجبة على $]0; +\infty[$ ومنه الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2 معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 و $f(1) = \ln 2$ و $f'(x) = \frac{1+e}{2}$

ومنه $(T): y = \left(\frac{1+e}{2} \right) x - \left(\frac{1+e}{2} \right) + \ln 2$.

3 (أ) بما أن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; +\infty[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α .

(ب) لدينا $f(0.7) = -0.04$ و $f(0.8) = 0.25$ ومنه $0.7 < \alpha < 0.8$.

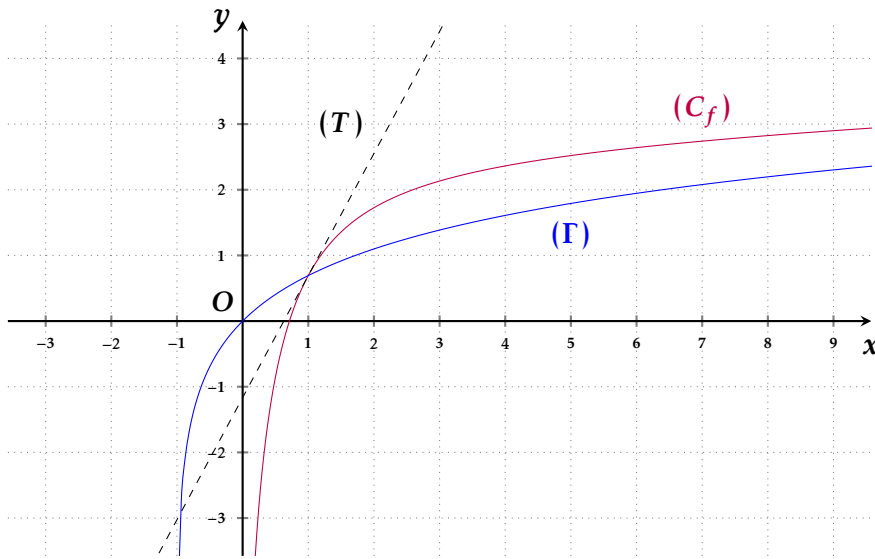
4 (أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x+1)] = 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e \ln x}{x+1} = 0$

التفسير الهندسي للنتيجة هو أن المنحنى (Γ) مقارب للمنحنى (C_f) جهة $+\infty$.

(ب) دراسة الوضعية بين (Γ) و (C_f): لدينا $f(x) - \ln(x+1) = \frac{e \cdot \ln x}{x+1}$ إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ ومنه:

x	0	1	$+\infty$
$f(x)y$	-	0	+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1; f(1))$	(C_f) فوق (Δ)

(ج) رسم المنحنيين (C_f) و (Γ) والمستقيم (T) ؛



5 نلاحظ من البيان أن المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1+e}{2}x - m$ يكون قاطع للمنحنى (C_f) في نقطتين متميزتين لما $-m < -\frac{1+e}{2} + \ln 2$ أي $m > \frac{1+e}{2} - \ln 2$ ومنه يكون للمعادلة $f(x) = \frac{1+e}{2}x - m$ حلين متميزين.

6 نقبل على المجال $[1; +\infty[$ أن $\ln x < x + 1$.

(أ) إثبات أن $\ln 2 < f(x) < e + \ln(x+1)$ ليكن $x \in [1; +\infty[$

ومنه $\frac{\ln x}{x+1} < 1$ يعني أن $\frac{e \cdot \ln x}{x+1} < e + \ln(x+1)$ ومنه $\frac{e \cdot \ln x}{x+1} + \ln(x+1) < e + \ln(x+1)$ أي أن $f(x) < e + \ln(x+1) \dots (1)$.
الدالة f متزايدة على المجال $[0; +\infty[$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$:

$f(1) < f(x) \dots (2)$

من (1) و (2) نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$: $\ln 2 < f(x) < e + \ln(x+1)$

(ب) التحقق بالاشتقاق : $[(x+1)\ln(x+1) - x]' = \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1} - 1 = \ln(x+1)$ ومنه الدالة $x \mapsto [(x+1)\ln(x+1) - x]$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x+1)$.

(ج) مساحة الحيز هي S :

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$: $\ln 2 < f(x) < e + \ln(x+1)$ ومنه

$$\int_{e-2}^{e^2-1} \ln 2 dx < \int_{e-2}^{e^2-1} f(x) dx < \int_{e-2}^{e^2-1} [e + \ln(x+1)] dx$$

أي أن $(e^2 - e) < S < e(e^2 - e) + [(x+1)\ln](x+1) - x]_{e-2}^{e^2-1}$

أي أن $(e^2 - e) < S < e^3$.

حل التمرين رقم 1 :

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx}$ حيث K وسيط حقيقي.

1 إثبات أن كل المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين :

لدينا : $f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx}$ أي : $f_{k+1}(x) = (x+1)^2 e^{-(k+1)x}$ وبما أن النقطة ثابتة مهما تغير

الوسيط k فسيكون ترتيب النقطة ثابت مهما كان k .

$$f_{k+1}(x) - f_k(x) = 0 \text{ أي } (x+1)^2 e^{-(k+1)x} - (x+1)^2 e^{-kx} = 0$$

$$\text{ومنه : } e^{-kx} (x+1)^2 (e^{-x} - 1) = 0 \text{ وعليه } \begin{cases} (x+1)^2 = 0 \\ (e^{-x} - 1) = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = -1 \\ e^{-x} = 1 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

إذن : جميع المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين هما : $A(-1;0)$ و $B(0;1)$.

2 حساب النهايات :

- لما $k > 0$ يكون : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-kx} = 0$ بالتزايد المقارن.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-kx} = +\infty$$

- لما k معدوم : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

- لما $k < 0$ يكون : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-kx} = 0$ بالتزايد المقارن.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-kx} = +\infty$$

$$(1) \quad f'_k(x) = (x+1)(-kx - k + 2) e^{-kx} \quad \text{حساب المشتقة :} \quad f'_k(x) = 2(x+1) e^{-kx} - k(x+1)^2 e^{-kx} \quad \text{أي أن} \quad f'_k(x) = (x+1)(-kx - k + 2) e^{-kx}$$

المناقشة :

- لما k معدوم : $f'_0(x) = 2(x+1)$ موجبة على المجال $[-1; +\infty[$ ومنه الدالة f_0 متزايدة تماما

على هذا المجال ، وسالبة على $]-\infty; -1]$ ومنه الدالة f_0 متناقصة تماما على هذا المجال.

- لما k حقيقي موجب تماما : فإن $f'_k(x) = 0$ يكافئ $x = -1$ أو $x = \frac{-k+2}{k}$ و $\frac{-k+2}{k} \geq -1$

و $f'_k(x) \geq 0$ يكافئ x ينتمي للمجال $\left[-1; \frac{-k+2}{k}\right]$ ومنه f_k متزايدة على هذا المجال.

و $f'_k(x) \leq 0$ يكافئ x ينتمي إلى إحدى المجالين $]-\infty; -1]$ أو $\left[\frac{-k+2}{k}; +\infty\right[$ ومنه f_k متناقصة على هذين المجالين.

- لما k حقيقي سالب تماما : فإن $f'_k(x) = 0$ يكافئ $x = -1$ أو $x = \frac{-k+2}{k}$ و $\frac{-k+2}{k} \leq -1$

و $f'_k(x) \geq 0$ يكافئ x ينتمي إلى إحدى المجالين $]-\infty; \frac{-k+2}{k}]$ أو $[-1; +\infty[$ ومنه f_k متزايدة على هذين المجالين.

و $f'_k(x) \leq 0$ يكافئ x ينتمي إلى المجال $\left[\frac{-k+2}{k}; -1\right]$ ومنه f_k متناقصة على هذا المجال.

(ب) $\hookrightarrow$ لما k حقيقي موجب تماما : جدول تغيراتها

x	$-\infty$	-1	$\frac{-k+2}{k}$	$+\infty$
$f'_k(x)$	-	0	+	-
$f_k(x)$	$+\infty$	$f_k(-1)$	$f_k\left(\frac{-k+2}{k}\right)$	0

4 دراسة الوضع النسبي بين (C_k) و (C_{k+1}) :

$$\text{ندرس إشارة الفرق نجد : } f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx} \left[\frac{1 - e^x}{e^x} \right]$$

نلاحظ أن إشارة الفرق من إشارة : $1 - e^x$.

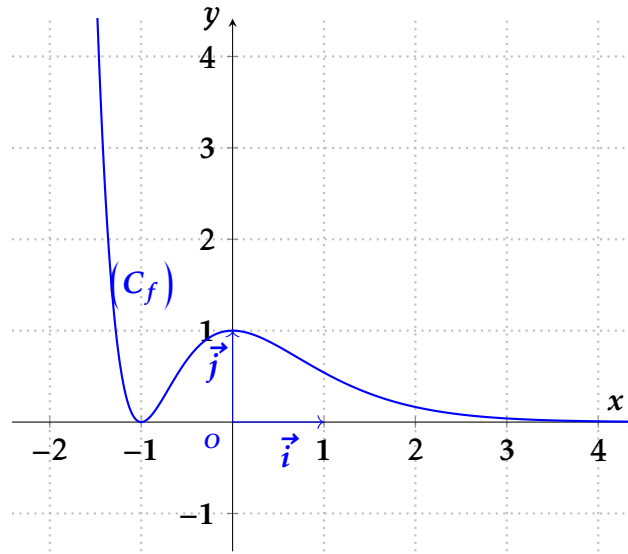
- الفرق ينعدم عند 0 و -1 أي أن المنحنيين (C_k) و (C_{k+1}) يتقاطعان في النقطتين A و B (س1).
- الفرق يكون موجب على $]-\infty; 0]$ أي أن المنحنى (C_{k+1}) يقع فوق المنحنى (C_k) .
- الفرق يكون سالب على $]0; +\infty[$ أي أن المنحنى (C_{k+1}) يقع تحت المنحنى (C_k) .

(II) لدينا $f(x) = (x+1)^2 e^{-2x}$.

1 **تشكيل جدول تغيرات الدالة f:** على المجال $[-\frac{3}{2}; +\infty[$

x	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\frac{e^3}{4}$	0	1	0	

2 **إنشاء المنحنى (C_f) :**



2 **بيان أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$:**

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و $f(x) = 1$ تعني $f(x) - 1 = 0$ ، لنضع $h(x) = f(x) - 1$
 الدالة h مستمرة ومتناقصة على المجال $]-\infty; -1]$ و $h(-1.27) = -0.08$ ، $h(-1.28) = 0.01$ ،
 إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيداً α حيث: $-1.28 < \alpha < -1.27$.

ومن جهة أخرى لدينا: $g(0) = f(0) - 1 = 0$ أي: $h(0) = 1 - 1 = 0$ أي أن الحل الآخر معدوم.

(ب) **تعيين قيم m:** لدينا: $\left| \frac{x+1}{e^x} \right| = \left| \frac{m+1}{e^m} \right|$ أي: $\frac{|x+1|}{e^x} = \frac{|m+1|}{e^m}$ أي: $|x+1|e^{-x} = |m+1|e^{-m}$ **لدينا $f(x) = f(m)$** حلول هذه الأخيرة

هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = f(m)$ وعليه : قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = f(m)$ حلا وحيدا ومن خلال ملاحظة البيان نجد أنها محققة لما يكون $m \in]-\infty; \alpha[$.

(3) **بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x :** يكون $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$

• $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$ ومنه $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = e^{-2x} - 2(x+1)e^{-2x} + 2(x+1)e^{-2x} - e^{-2x}$
- يمكن الآن إستنتاج دالة أصلية لـ g على $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$
وعليه $g(x) = -\frac{1}{2}g'(x) + \frac{1}{2}e^{-2x}$ أي أن الدالة الأصلية هي: $G(x) = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c$

(ب) **باستعمال المكاملة بالتجزئة حساب مساحة الحيز المستوي :**

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \left[-\frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-2x} \right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 (x+1) e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} + \int_{-1}^0 g(x) dx$$

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x+1) e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2}(x+1) e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right]_{-1}^0$$

ومنه $\int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^2 = \frac{-5+e^2}{4}$ إذن المساحة هي $\frac{-5+e^2}{4} \text{ u.a}$

✓ حل التمرين رقم 1 :

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
 $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

(1) أ- تعيين نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-1 + e^{2x} + 2xe^{2x}] = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [1 - e^{2x} - 2xe^{2x}] = 1$

ب- تعيين اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة :

$$g'(x) = -2e^{2x} - 2e^{2x} - 4xe^{2x} = -4e^{2x}[1+x]$$

- دراسة إشارة $g'(x)$: $g'(x) = 0$ معناه

$$-4e^{2x}[1+x] = 0 \text{ حيث } -4e^{2x} < 0 \text{ إذن } x = -1$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$		-	0	+
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		$f(-1)$	+	$-\infty$

1 حساب $g(0) = 1 - 1 = 0$:
ومنه إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$		+	-

(II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$

1 حساب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 + \frac{3}{x} - e^{2x} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

2 نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^{2x} = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 3$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

3 دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) : $(e^{2x} > 0)$

$$f(x) - y = -xe^{2x}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)y$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0; f(0))$	(C_f) تحت (Δ)

4 نبين أن $f'(x) = g(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x} = g(x)$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(0) = 3$	$-\infty$

5 كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند $x_0 = -1/2$:

$$y = f'(-1/2)(x + 1/2) + f(1/2) = x + 3 + 0.5e^{-1}$$

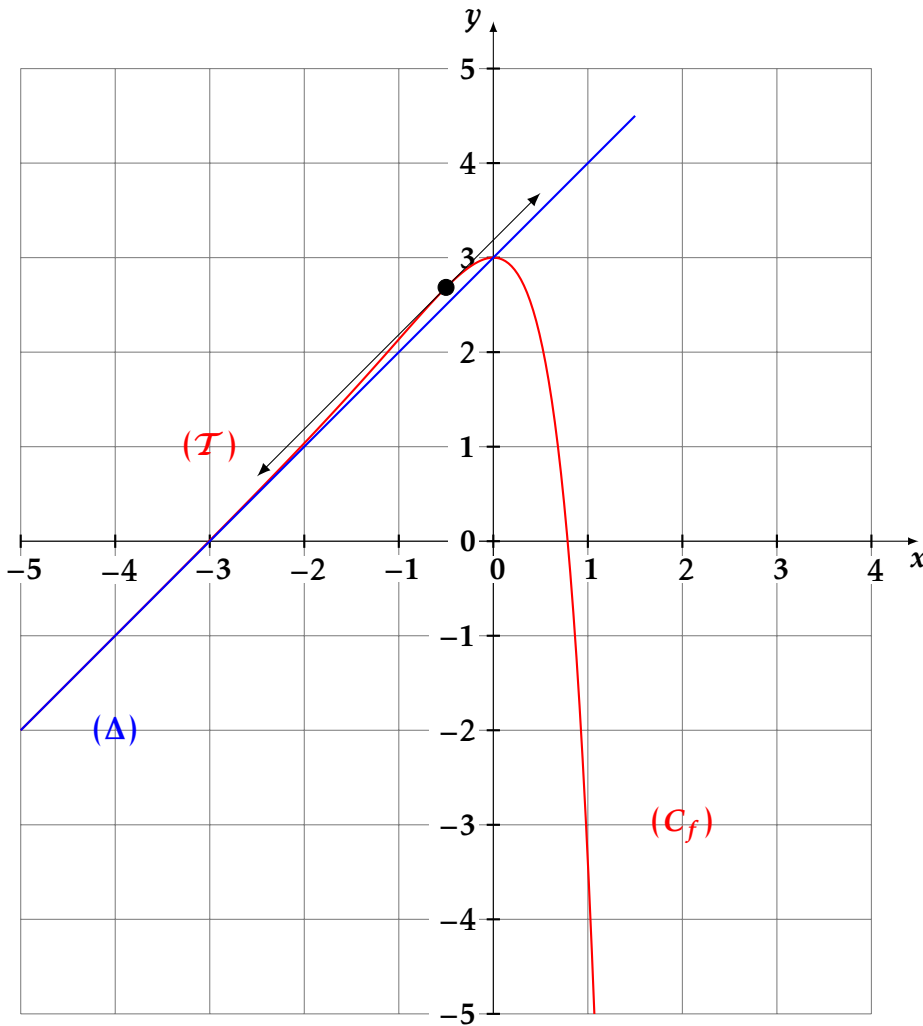
6 نبيّن أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين α و β :

الدالة f مستمرة ورتيبة تماماً على المجالين : $[-3.5; 3]$ و $[0.5; 1]$.

$$f(0.5) \times f(1) < 0, f(-3.5) \times f(3) < 0$$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين α و β حيث $-3.5 < \alpha < -3$ و $0.5 < \beta < 1$.

7 رسم (Δ) ، (T) و (C_f) :



8 المناقشة البيانية : لدينا $f(x) = x + m$ إذن هي مناقشة ماثلة ومنه :

• $m \in]3.18; +\infty[$ لا توجد حلول.

• $m = 3.18$ يوجد حل مضاعف.

• $m = 3$ يوجد حل وحيد معدوم .

• $m \in]3; 3.18[$ يوجد حلان سالبين.

• $m < 3$ يوجد حل وحيد موجب

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي :

$$h(x) = (1 + 3x - e^{\frac{2}{x}}) \times \frac{1}{x}$$

1 نبيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

$$h(x) = \frac{1 + 3x - e^{\frac{2}{x}}}{x} = \frac{1}{x} + 3 - \frac{1}{x} e^{\frac{2}{x}}$$

$$h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ ومنه}$$

2 حساب $h'(x)$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

- دراسة إشارة $h'(x)$:

• لدينا من أجل $x > 0$ ، $\frac{1}{x} > 0$ ومنه $g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ (من جدول إشارة الدالة g) ومنه $h'(x) > 0$.
ومنه الدالة h متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

• لدينا من أجل $x < 0$ ، $\frac{1}{x} < 0$ ومنه $g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ (من جدول إشارة الدالة g) ومنه $h'(x) < 0$.
ومنه الدالة h متناقصة تماما على المجال $] -\infty; 0[$.

جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$		-	+
$h(x)$	3		1
		$-\infty$	$-\infty$

✓ حل التمرين رقم 2 :

I) لدينا : $D_g = \mathbb{R}$ ، $g(x) = e^{-x} + x - 1$

1 حساب $g'(x)$ تعيين اتجاه تغير الدالة g على $D_g = \mathbb{R}$: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = -e^{-x} + 1$

- تعيين اتجاه تغير الدالة g :

$$g'(x) = 0 \text{ يكافئ } -e^{-x} + 1 = 0 \text{ ومنه } e^{-x} = 1 \text{ أي } x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $] -\infty; 0]$.

2 تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \geq 0$

من أجل $] -\infty; 0]$: $x \in] -\infty; 0]$ لأن $g(x) \geq g(0)$ ومنه $g(x) \geq 0 \dots (1)$

من أجل $[0; +\infty[$: $x \in [0; +\infty[$ لأن $g(x) \geq g(0)$ ومنه $g(x) \geq 0 \dots (2)$

من (1) و (2) ينتج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

أو: $g(0)$ قيمة حدية محلية صغرى ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \geq g(0) = 0$.

- استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{-x} + x \geq 1$

لدينا: $g(x) \geq 0$ يكافئ $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ ومنه $e^{-x} + x \geq 1$.

(II)

1 تبين أن مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x} + x \geq 1$ أي أنه $e^{-x} + x \neq 0$.

إذن $D_f =] -\infty; +\infty[$

2 التحقق من أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$

$$f(x) = \frac{x}{e^{-x} + x} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{e^{-x} + x}} = \frac{1}{\frac{e^{-x}}{x} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$$

3 حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{xe^x} = -\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^-$$

$$\text{وبالتالي } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} = 0^- \text{ أي } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{xe^x} = 1 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$$

$$\text{وبالتالي } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} = 1 \text{ أي } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

• التفسير البياني: عند $-\infty$: (C_f) يقبل مستقيم مقاربا أفقيا (Δ) معادلته: $y = 0$

عند $+\infty$: (C_f) يقبل مستقيم مقاربا أفقيا معادلته: $y = 1$.

4 f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x) = \frac{1(e^{-x} + x) - (-e^{-x} + 1)(x)}{(e^{-x} + x)^2} = \frac{e^{-x} + xe^{-x}}{(e^{-x} + x)^2}$$

$$\text{إذن } f'(x) = \frac{e^{-x}(x+1)}{(e^{-x} + x)^2}$$

5 دراسة إشارة $f'(x)$ ثم تشكيل جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{(e^{-x} + x)^2} (x + 1) \quad \text{لدينا :}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x + 1$ لأن $e^{-x} > 0$ والمقام موجب تماما، إذن :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$		$- \quad 0 \quad +$	

ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
$f(x)$	0	$\searrow \quad \nearrow$	1
		$\frac{1}{1-e}$	

6 معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة O :

لدينا $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ ، إذن معادلة المماس

هي $y = x$ أي $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

7 التحقق من أن $x - f(x) = \frac{g(x)}{g(x) + 1}$

$$x - f(x) = x - \frac{x}{e^{-x} + x} = \frac{x(e^{-x} + x - 1)}{e^{-x} + x} = \frac{x(e^{-x} + x - 1)}{e^{-x} + x - 1 + 1}$$

$$x - f(x) = \frac{g(x)}{g(x) + 1} \quad \text{أي}$$

• إشارة $x - f(x)$:

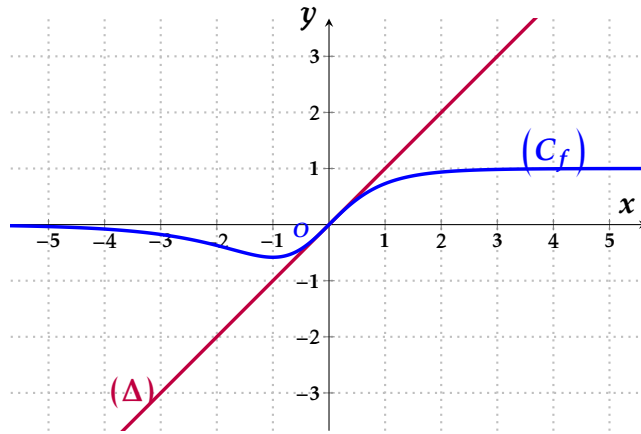
لدينا $g(x) \geq 0$ ومنه $g(x) + 1 \geq 1$ ومنه $g(x) + 1 > 0$ ، إذن إشارة $x - f(x)$ من إشارة x .

إذا كان $x < 0$ فإن $x - f(x) < 0$ ، $x > 0$ فإن $x - f(x) > 0$ وإذا كان $x = 0$ فإن $x - f(x) = 0$.

8 الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0; f(0))$	(C_f) تحت (Δ)

9 رسم (C_f) و (Δ)



10 المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $\frac{x e^x}{x e^x + 1} - 1 = m$:

$$\text{لدينا } \frac{x e^x}{x e^x + 1} - 1 = m \text{ يكافئ } \frac{x e^x}{x e^x + 1} = m + 1$$

يكافئ $\frac{x}{x + e^{-x}} = m + 1$ أي $f(x) = m + 1$. حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = m + 1$ ، نميز الحالات التالية:

- إذا كان $m \geq 0$ المعادلة ليس لديها حلول
- إذا كان $-1 < m < 0$ للمعادلة حل وحيد موجب
- إذا كان $m = -1$ للمعادلة حل وحيد معدوم $x_0 = 0$.
- إذا كان $\frac{1}{1-e} - 1 < m < -1$ للمعادلة حلين سالبين متميزين.
- إذا كان $m = \frac{1}{1-e} - 1$ للمعادلة حل واحد سالب هو $x_1 = -1$
- إذا كان $m < \frac{1}{1-e} - 1$ المعادلة ليس لديها حلول

✓ حل التمرين رقم 3 :

① الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (1 + ax^2)e^{bx}$

بقراءة بيانية:

1 حساب $g(-1) = 0$ ، $g(0) = 1$ و $g'(0) = \frac{1-0}{0-1} = -1$

2 كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة 0 : $y = -x + 1$: (Δ) .

3 إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

4 بالاستعانة بالمعطيات السابقة نتحقق أن: $g(x) = (1 - x^2)e^{-x}$.

لدينا: $g(x) = (1 + ax^2)e^{bx}$

ومنه $g(-1) = (1 + a)e^{-b} = 0$ مع $e^{-b} \neq 0$ أي $1 + a = 0$ ومنه $a = -1$.

ومن جهة أخرى $g'(x) = (abx^2 + 2ax + b)e^{bx}$

وبالتالي $g'(0) = b \cdot e^0 = -1$ ومنه $b = -1$.

إذن $g(x) = (1 - x^2)e^{-x}$.

II الف الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$.

1 حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)^2 e^{-x} = +\infty$$

إثبات أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1)^2 e^{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x} = 0$$

التفسير البياني:

$y = 0$ (حامل محور الفواصل) مستقيم مقارب $\uparrow$ (C_f) عند $(+\infty)$.

2 نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x) = g(x)$:

$$f'(x) = 2(x + 1)e^{-x} - (x + 1)^2 e^{-x}$$

$$= (x + 1)e^{-x} [2 - (x + 1)]$$

$$= (x + 1)(1 - x)e^{-x} = (1 - x^2)e^{-x} = g(x)$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وبالتالي:

الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[-1; 1]$ ومتناقصة تماماً على المجالين: $]-\infty; -1]$ و $[1; +\infty[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		$f(1)$		$f(-1)$	0

3 تعيين دون حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = f'(0) = g(0) = 1$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$

التفسير الهندسي:

الدالة f قابلة للإشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة 0 وتقبل مماساً معامل توجيهه 1.

4 استنتاج معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0: من السؤال السابق لدينا:

$$(T): y = x + 1$$

5 نبيّن أن المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلاً وحيداً α : لما $x \leq -1$ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماماً على $]-\infty; -1]$ ولدينا : $[0; +\infty[= f(]-\infty; -1])$ حيث $2 \in [0; +\infty[$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلاً وحيداً α على $]-\infty; -1]$.

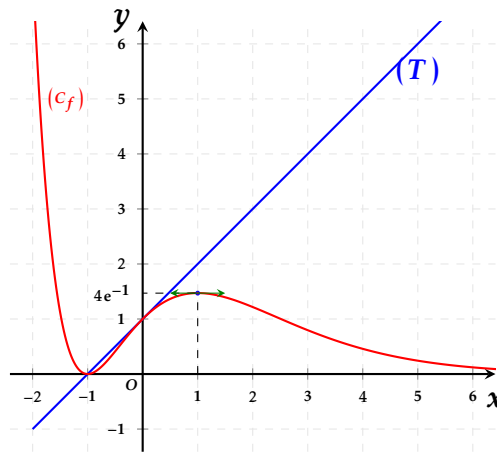
6 التحقق أن $\alpha \in [-2; -1]$:

لدينا : $f(-2) = 7.39$ و $f(-1) = 0$ بما أن $0 \leq 2 \leq 7.39$ فإن $-2 \leq \alpha \leq -1$.

7 نبيّن أن α يحقق العلاقة : $\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$

لدينا : $f(\alpha) = 2$ يكافئ $2e^{-\alpha} = (\alpha + 1)^2$ ومنه $(\alpha + 1)^2 = 2e^{\alpha}$ وبالتالي : $|\alpha + 1| = \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$ بما أن $\alpha \in [-2; -1]$ فإن : $|\alpha + 1| = -(\alpha + 1)$ أي : $-(\alpha + 1) = \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$ ومنه : $\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.

8 إنشاء (T) و (C_f) على المجال $[-2; +\infty[$.



9 نناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد إشارة حلول المعادلة $f(x) = \ln(m)$: نضع $M = \ln(m)$ أي $f(x) = M$ المناقشة أفقية موازية لمحور الفواصل.

• لما $M < 0$ يكافئ $m < 1$ لا توجد حلول.

• لما $M = 0$ يكافئ $m = 1$ يوجد حل وحيد سالب تماماً.

• لما $0 < M < 1$ يكافئ $1 < m < e^1$ يوجد حلان سالبان تماماً وحل وحيد موجب تماماً.

• لما $M = f(0) = 1$ يكافئ $m = e^1$ يوجد حلان مختلفان في الإشارة وحل آخر معدوم.

• لما $1 < M < f(1)$ يكافئ $e^1 < m < e^{f(1)}$ يوجد حلان موجبان تماماً وحل وحيد سالب تماماً.

• لما $M = f(1)$ يكافئ $m = e^{f(1)}$ يوجد حلان مختلفان في الإشارة.

• لما $f(-2) \geq M > f(1)$ يكافئ $e^{f(-2)} \geq m > e^{f(1)}$ يوجد حل وحيد سالب تماماً.

III h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f(x^2) - 1$

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، نعين اتجاه تغير الدالة h ثم نشكل جدول تغيراتها.

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $h'(x) = 2x \cdot f'(x^2)$

$h'(x) = 0$ يكافئ $2x \cdot f'(x^2) = 0$ ومنه : $2x = 0$ أو $f'(x^2) = 0$ يعني أن $x = 0$ أو $x^2 = 1$ أو $x^2 = -1$ (مرفوض) . ومنه $h'(x) = 0$ لما : $x = 0$ أو $x = 1$ أو $x = -1$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x^2)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$2x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

ومنه الدالة h متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; -1]$ و $[0; 1]$ ومتناقصة تماما على المجالين $[-1; 0]$ و $[1; +\infty[$.
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$h(x)$		$h(-1)$	$h(0)$	$h(1)$	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x^2) - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^2) - 1 = -1$$

✓ حل التمرين رقم 4 :

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = 2 - 2e^{-x} - x$

1 حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - 2e^{-x} - x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - 2e^{-x} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{2}{x} + 2 \frac{e^{-x}}{-x} - 1 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$$

2 دراسة اتجاه تغير دالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g' حيث : $g'(x) = 2e^{-x} - 1$

$$g'(x) = 0 \text{ تكافئ } 2e^{-x} - 1 = 0 \text{ تكافئ } e^{-x} = \frac{1}{2} \text{ تكافئ } -x = -\ln 2$$

$$\text{أي } x = \ln 2$$

- دراسة إشارة $g'(x)$:

$$g'(x) > 0 \text{ تكافئ } 2e^{-x} - 1 > 0 \text{ تكافئ } e^{-x} > \frac{1}{2} \text{ تكافئ } -x > -\ln 2$$

$$\text{أي } x < \ln 2$$

$$\text{إذن } g'(x) \geq 0 \text{ من أجل } x \in]-\infty; \ln 2] \text{ و } g'(x) \leq 0$$

$$\text{من أجل } x \in [\ln 2; +\infty[$$

إذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \ln 2]$ ومتناقصة تماما

على المجال $[\ln 2; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$-\infty$	0	$1 - \ln 2$	0	$-\infty$

3 إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.59 < \alpha < 1.6$

لدينا الدالة مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1.59, 1.6]$ (رتيبت)

$$\text{ولدينا } 0 < g(1.59) \times g(1.6) = 0.0021 \times (-0.0037)$$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة وشرط الرقابة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.59 < \alpha < 1.6$

4 إستنتاج إشارة $g(x)$

$$\text{لدينا : } g(0) = 2 - 2e^0 - 0 = 0$$

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$	
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

(II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ ب: $f(x) = \frac{-e^x + 1}{x^2}$

1 حساب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ ثم عند 0

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-e^x + 1}{x^2} \right) = 0$$

المستقيم ذي المعادلة $y = 0$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-e^x + 1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{e^x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = -\infty$$

$$\text{لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-e^x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{-1}{x} = -\infty$$

$$\text{لأن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-e^x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{-1}{x} = +\infty$$

$$\text{لأن : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty$$

المستقيم ذي المعادلة $x = 0$ مقارب لـ (C_f)

2 إثبات من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم أن : $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{x^3}$
الدالة f قابلة لاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة $f'(x)$ حيث :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-e^x(x^2) - 2x(-e^x+1)}{x^4} = \frac{-x^2 e^x + 2x e^x - 2x}{x^4} \\ &= \frac{-x e^x + 2e^x - 2}{x^3} = \frac{e^x(-x + 2 - 2e^x)}{x^3} = \frac{e^x g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

3 دراسة اتجاه تغير الدالة f

بما أن $e^x > 0$ فإن : إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $\frac{g(x)}{x^3}$
جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
x^3	-	0	+	+
$g(x)$	-	0	+	-
$f'(x)$	+	+	0	-
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty \searrow -\infty$	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; 0]$ و $]0; \alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha; +\infty[$.

4 التحقق أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(-2+\alpha)}$

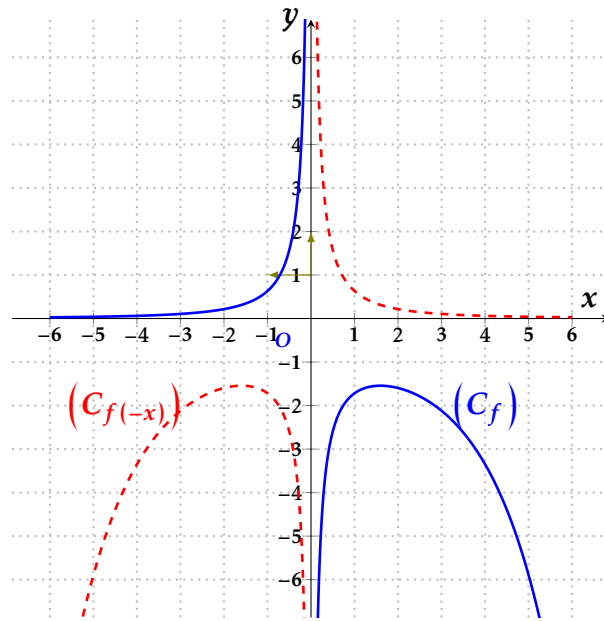
لدينا : $g(\alpha) = 0$ يعني $2 - 2e^{-\alpha} - \alpha = 0$ يكافئ $-2e^{-\alpha} = -2 + \alpha$

$$e^{\alpha} = \frac{-2}{-2+\alpha} \text{ ومنه}$$

إذن

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{-e^{\alpha}+1}{\alpha^2} = \frac{-\left(\frac{-2}{-2+\alpha}\right)+1}{\alpha^2} = \frac{\left(\frac{2-2+\alpha}{-2+\alpha}\right)}{\alpha^2} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2(-2+\alpha)} = \frac{1}{\alpha(-2+\alpha)} \end{aligned}$$

5 إنشاء (C_f) $f(5) = -5,9$



6 المناقشة البيانية حسب الوسيط الحقيقي m للمعادلة

$$(E) \dots x^2 e^m - m^2 e^x = x^2 - m^2$$

$$-m^2 e^x + m^2 = -x^2 e^m + x^2 \text{ تكافئ } x^2 e^m - m^2 e^x = x^2 - m^2$$

$$\frac{-e^x + 1}{x^2} = \frac{-e^m + 1}{m^2} \text{ تكافئ } m^2(-e^x + 1) = x^2(e^m + 1)$$

أي $f(x) = f(m)$ ومنه حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = f(m)$.

عدد إشارة الحلول	m	$f(m)$
حل وحيد سالب تماما	$m \in]-\infty; 0[$	$f(m) \in]0; +\infty[$
حليين متمايزين موجبيين	$m \in]0; \alpha[\cup]\alpha; +\infty[$	$f(m) \in]-\infty; f(\alpha)[$
حل موجب تماما	$m = \alpha$	$f(m) = f(\alpha)$

(III) لتكن الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = \frac{|-e^{-x} + 1|}{x^2}$

1 تبين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $h(x) = f(-x)$

لدينا من أجل $x \in]-\infty; 0[$: فإن $f(x) > 0$

من أجل $x \in]0; +\infty[$: فإن $(-x) \in]-\infty; 0[$ ومنه $f(-x) > 0$

إذن : من أجل من $x \in]0; +\infty[$

$$h(x) = |f(-x)| = f(-x)$$

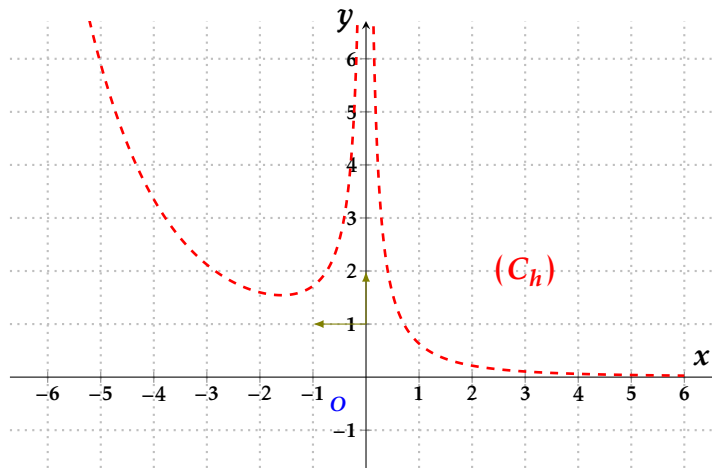
من أجل من $x \in]-\infty; 0[$ فإن $h(x) = |f(-x)| = -f(-x)$

2 إنشاء (C_h) :

$$h(x) = \frac{|-e^{-x}+1|}{x^2} = \left| \frac{-e^{-x}+1}{(-x)^2} \right| = |f(-x)|$$

لدينا : $h(x) = |f(-x)|$ تناظر (C_h) بالنسبة لمحور الترتيب $f(-x)$ نتحصل على $(C_{f(-x)})$ ثم ننشئ منحنى دالة القيمة المطلقة لـ $f(-x)$ أي (C_h) .

$$f(x) \longrightarrow f(-x) \longrightarrow |f(-x)|$$



✓ حل التمرين رقم 5 :

(I)

1 الدالة g_m قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g'_m حيث
 $g'_m(x) = me^{mx} + me^{mx}(1+mx) = me^{mx}(2+mx)$
 إشارة $g'_m(x)$ من نفس إشارة $(2+mx)$ لأن $me^{mx} > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{m}$	$+\infty$
$g'_m(x)$	-	0	+

2 حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{mx} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} mx e^{mx} = \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} g_m(x) = 1$$

جدول تغيرات الدالة g_m

x	$-\infty$	$-\frac{2}{m}$	$+\infty$
$g'_m(x)$	-	0	+
$g_m(x)$	1	$1 - e^{-2}$	$+\infty$

الإستنتاج من أجل كل عدد حقيقي x أن $g_m(x) > 0$

لدينا $1 - e^{-2} > 0$ قيمة حدية صغرى للدالة g_m أي من أجل كل عدد حقيقي x : $g_m(x) > 1 - e^{-2} > 0$

(II)

1 إثبات أن جميع المنحنيات (C_{f_m}) تمر بنقطة ثابتة I

من أجل كل $m, m' \in \mathbb{R}$ بحيث $m \neq m'$ لدينا: $(C_{f_m}) \cap (C_{f_{m'}}) = I$ حيث I نقطة ثابتة مستقلة عن m
 إذن لإيجاد إحداثيات النقطة $I(x_0; y_0)$ نحل المعادلة $f_m(x_0) - f_{m'}(x_0) = 0$
 أي $x_0(e^{mx_0} - e^{m'x_0}) = 0$ ومنه $x_0 - 1 + x_0e^{mx_0} - (x_0 - 1 + x_0e^{m'x_0}) = 0$
 يعني $x_0 = 0$ أو $e^{mx_0} - e^{m'x_0} = 0$ يعني $mx_0 - m'x_0 = 0$ أي $x_0(m - m') = 0$ وهذا يعني أن $x_0 = 0$ لأن $m \neq m'$

$$I(0, -1) \text{ ومنه } y_0 = f_m(x_0) = f_m(0) = -1 \text{ و}$$

حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1 + xe^{mx}) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 + xe^{mx}) = +\infty$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{mx} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{m} \times mxe^{mx} = \frac{1}{m} \times 0 = 0$$

إثبات أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_{f_m}) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f_m(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{mx} = 0 \text{ ومنه المستقيم ذي المعادلة } y = x - 1 \text{ مقارب مائل للمنحنى } (C_f) \text{ بجوار } -\infty$$

دراسة الوضع النسبي لـ (D) و (C_{f_m})

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_m(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	(C_{f_m}) تحت (D)	(C_{f_m}) يقطع (D) في النقطة $(0; f_m(-1))$	(C_{f_m}) فوق (D)

2 دراسة اتجاه تغير الدالة f_m

الدالة f_m قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f'_m حيث :

$$f'_m(x) = 1 + mxe^{mx} + e^{mx} = 1 + (1 + mx)e^{mx} = g_m(x)$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $g_m(x) > 0$ ومنه الدالة f_m متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات الدالة f_m

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_m(x)$		+	
$f_m(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$

3 تعيين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_{f_m}) عند النقطة التي ترتبها -1

$$f_m(x) = -1 \text{ تكافئ } x - 1 + xe^{mx} = -1 \text{ تكافئ } x(1 + e^{mx}) = 0 \text{ تكافئ } x = 0$$

$$y = f'_m(0)(x - 0) + f(0) = 2x - 1$$

تبيان أن النقطة $A_m\left(-\frac{2}{m}; -\frac{2}{m}(1 + e^{-2}) - 1\right)$ نقطة إنعطاف للمنحنى (C_{f_m}) .

لدينا $f_m''(x) = g_m'(x)$ تنعدم من أجل $x = -\frac{2}{m}$ وتغير إشارتها من السالب إلى الموجب ومنه النقطة $A_m\left(-\frac{2}{m}; -\frac{2}{m}(1+e^{-2})-1\right)$ أي (C_f) هي نقطة إنعطاف للمنحنى

④ إثبات أن المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_m حيث $0 < \alpha_m < 1$

لدينا f_m مستمرة ورتيبة تماما على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0; 1]$ ولدينا $f_m(0) \times f_m(1) = (-1) \times e^m < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة و شرط الرقابة نستنتج أن المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_m في المجال $0 < \alpha_m < 1$

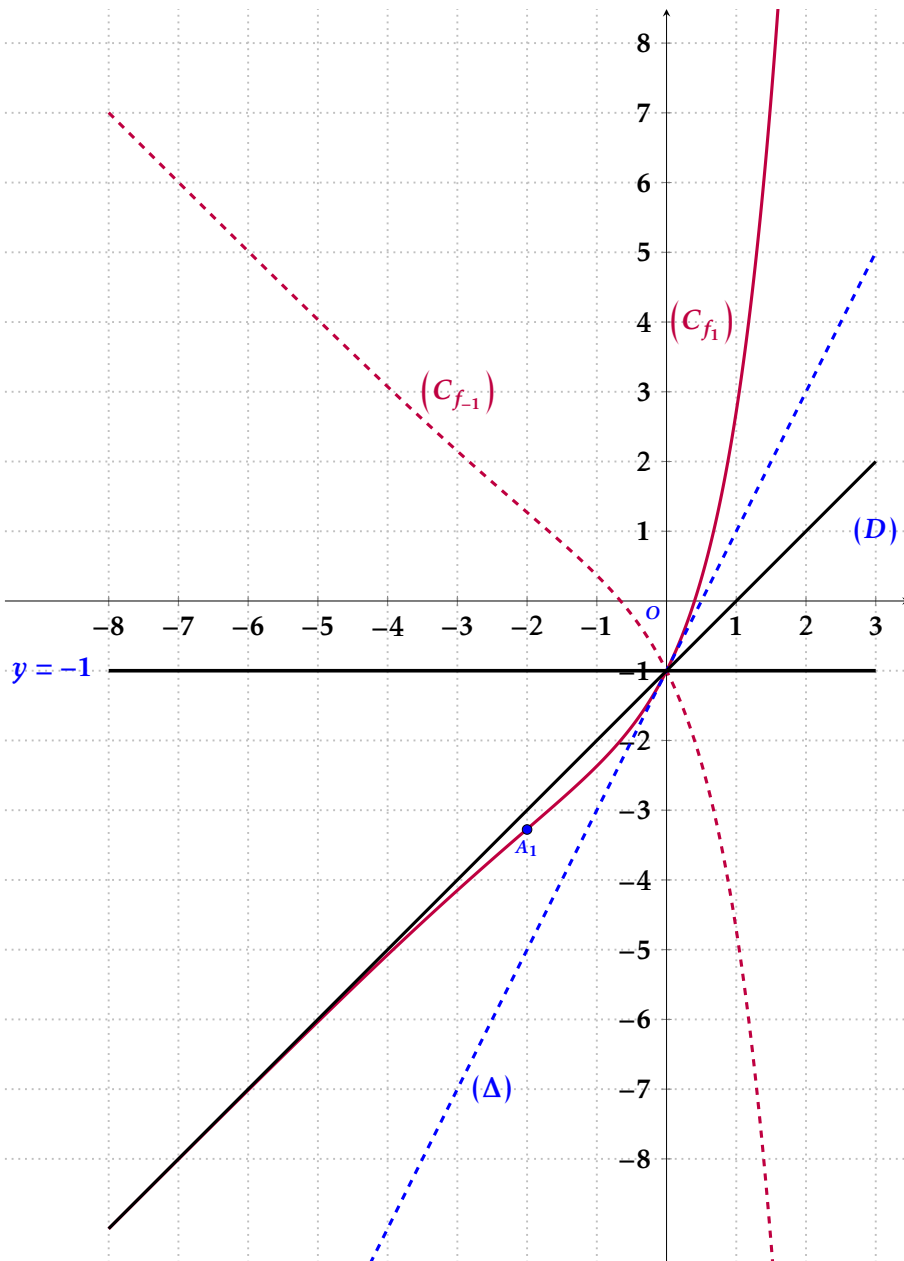
⑤ إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f_m(x) + f_{-m}(-x) = -2$

إذن نستنتج أن المنحنيين $f_m(x) + f_{-m}(-x) = x - 1 + xe^{mx} + (-x - 1 - xe^{-m(-x)}) = -2$

و (C_{f_m}) و $(C_{f_{-m}})$ متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y = -1$

إنشاء كلا من (Δ) ، (D) ، (C_{f_1}) وأنشئ $(C_{f_{-1}})$: النقطة $A_1(-2; -3 - 2e^{-2})$ نقطة إنعطاف للمنحنى

(C_{f_1})



① (III) إستنتاج اتجاه تغير الدالة F

الدالة F هي مركب الدالتين $x \mapsto x^2$ و $x \mapsto f_1(x)$ ولدينا الدالة f_1 متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ ومنه إتجاه تغير الدالة F هو من نفس إتجاه تغير الدالة $x \mapsto x^2$ ، إذن الدالة F متناقصة تماماً من أجل $x \in]-\infty; 0]$ ومتزايدة تماماً من أجل $x \in [0; +\infty[$

② أدرس الوضع النسبي لـ (C_{f_1}) و (C_F) من أجل $x \in [0; +\infty[$

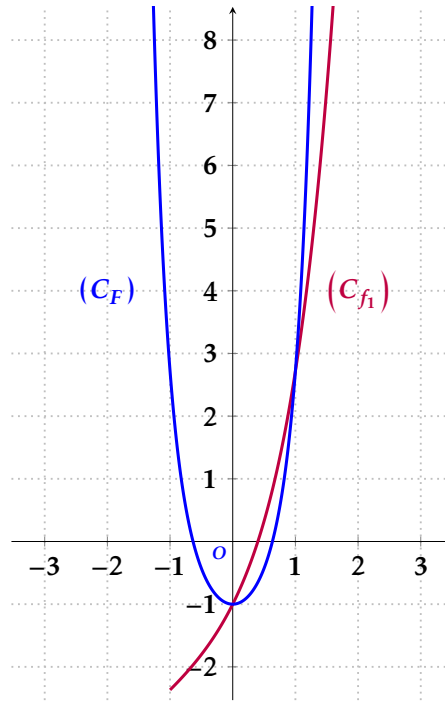
لدينا من أجل $x = 0$ أو $x = 1$ فإن $x^2 = x$ ومنه $f_1(x^2) = f_1(x)$ إذن (C_{f_1}) يقطع (C_F) في النقطتين $A(0, -1)$ و $B(1, 1)$

لدينا من أجل $x \in]0; 1[$: $x^2 < x$ ومنه $f_1(x^2) < f_1(x)$ ومنه (C_F) يقع تحت المنحنى (C_{f_1}) من أجل $x \in]0; 1[$

لدينا من أجل $x \in]1; +\infty[$: $x < x^2$ ومنه $f_1(x) < f_1(x^2)$ ومنه (C_F) يقع فوق المنحنى (C_{f_1}) من أجل $x \in]1; +\infty[$

③ إنشاء (C_F)

لدينا الدالة F دالة زوجية ومنه منحناها البياني متناظر بالنسبة إلى حامل محور الترتيب



مناقشة حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماماً m عدد حلول المعادلة : $e^{F(x)} = m$

$e^{F(x)} = m$ تكافئ $F(x) = \ln(m)$ إذن حلول المعادلة $F(x) = \ln(m)$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_F)

مع عائلة المستقيمات $D_m : y = \ln(m)$

من أجل $\ln(m) \in]-\infty; -1[$ أي $m \in]0; e^{-1}[$ لا يوجد حل

من أجل $\ln(m) = -1$ أي $m = e^{-1}$ يوجد حل $x_0 = 0$

من أجل $\ln(m) \in]-1; +\infty[$ أي $m \in]e^{-1}; +\infty[$ يوجد حلين متمايزين مختلفين في الإشارة