

المتتاليات العددية

المتتاليات العددية :

نسمي متتالية عددية u كل دالة معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ أو جزء منها نحو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

اتجاه تغير متتالية عددية : لدراسة اتجاه تغير متتالية (U_n) ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$

إذا كان الفرق : $U_{n+1} - U_n > 0$ فإن المتتالية (U_n) متزايدة تماما .
إذا كان الفرق : $U_{n+1} - U_n < 0$ فإن المتتالية (U_n) متناقصة تماما .
إذا كان الفرق : $U_{n+1} - U_n = 0$ فإن المتتالية (U_n) ثابتة .

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n) معرفة بحددها العام يمكن دراسة اتجاه تغير دالتها المرفقة .
لدراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n) اذا كانت حدودها موجبة تماما نقارن $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1

ملاحظة :

تعريف متتالية حسابية :

نقول أن المتتالية (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 وأساسها r (r عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان
من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = U_n + r$ أو $U_{n+1} - U_n = r$

عبارة الحد العام لمتتالية حسابية :

متتالية حسابية حدها الأول U_p وأساسها r عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية (U_n)
هو : $U_n = U_p + (n - p)r$

مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

لتكن (U_n) متتالية حسابية ، لحساب المجموع : $S = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + \dots + U_n$
نطبق القانون : $S = (n - p + 1) \left(\frac{U_p + U_n}{2} \right)$. حيث n دليل الحد الأخير و p دليل الحد الأول .

تكون الأعداد a, b, c بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية حسابية إذا وفقط
إذا كان : $2b = a + c$ ، الوسط الحسابي للعددين a و c

الوسط الحسابي :

تعريف متتالية هندسية :

نقول أن المتتالية (V_n) متتالية هندسية حدها الأول V_0 وأساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم) إذا وفقط إذا كان
من أجل كل عدد طبيعي n : $V_{n+1} = V_n \times q$ أو $\frac{V_{n+1}}{V_n} = q$

عبارة الحد العام لمتتالية هندسية :

متتالية هندسية حدها الأول V_p وأساسها q عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (V_n)
هو : $V_n = V_p \times q^{n-p}$

مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية :

♠ لتكن (V_n) متتالية هندسية ، لحساب المجموع : $S = V_p + V_{p+1} + V_{p+2} + \dots + V_n$
نطبق القانون : $S = U_p \times \left(\frac{1 - q^{n+p-1}}{1 - q} \right)$ حيث n دليل الحد الأخير و p دليل الحد الأول .

♠ تكون الأعداد a, b, c بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية هندسية إذا و فقط إذا كان : $b^2 = a \times c$ ، يسمى العدد b^2 الوسط الهندسي للعددين a و c

الوسط الهندسي :

الرتابة والتقارب :

♠ إذا كانت المتتالية (U_n) متزايدة (متزايدة تماما) و محدودة من الأعلى فإن المتتالية (U_n) متقاربة .
♠ إذا كانت المتتالية (U_n) متناقصة (متناقصة تماما) و محدودة من الأسفل فإن المتتالية (U_n) متقاربة .

نهاية متتالية عددية :

♠ إذا كانت المتتالية (U_n) معرفة بحددها العام فإن نهايتها هي نهاية دالتها المرفقة .
♠ إذا كانت المتتالية (U_n) معرفة بعلاقة تراجعية فإن نهايتها هي المعادلة $f(l) = l$ بحيث $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$
♠ إذا كانت المتتالية (U_n) معرفة بعلاقة تراجعية فإن نهايتها هي فاصلة تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x$

♠ (U_n) و (V_n) متتاليتان متجاورتان معناه إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة
و نهاية الفرق بينهما يؤول إلى الصفر أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0$

المتتاليتان المتجاورتان :

التمثيل البياني لمتتالية معرفة بالعلاقة التراجعية $U_{n+1} = f(U_n)$:

- [1] رسم كلا من (C_f) بيان الدالة f المرفقة بالمتتالية (U_n) و $y = x$: (Δ) منتصف الربع الأول .
- [2] نحدد النقطة $A(u_0; 0)$ على حامل محور الفواصل ، ثم نبدأ بإسقاط النقطة A_0 وفق (oy) على (C_f) فنحصل على النقطة $M_0(u_0; u_1)$
- [3] نسقط النقطة M_0 المحصل عليها على المستقيم (Δ) وفق (ox) فنحصل على النقطة $N_1(u_1; u_1)$
- [4] نسقط النقطة N_1 المحصل عليها على (xx') وفق (oy) فنحصل على النقطة $A_1(u_1; 0)$
- [5] نكرر نفس الإنشاء مع A_1 فنحصل $M_1(u_1; u_2)$ و $N_2(u_2; u_2)$ و $A_2(u_2; 0)$
- [6] نكرر نفس الإنشاء مع A_2 فنحصل $M_2(u_2; u_3)$ و $N_3(u_3; u_3)$ و $A_3(u_3; 0)$
- [7] نحصل على النقط $A_n(u_n; 0)$ على حامل محور الفواصل وهي تمثل حدود المتتالية (U_n) على حامل محور الفواصل
- [8] نحصل على النقط $M_n(u_{n+1}; u_n)$ على المنحنى (C_f) وهي عبارة عن تمثيل المتتالية (U_n)

نهاية متتالية هندسية :

♠ إذا كان $q > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty$
♠ إذا كان $q = 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 1$
♠ إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 0$
♠ إذا كان $q \leq -1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$ غير موجودة

✓ التمرين 01

♠ لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $U_n = 4n - 3$

- [1] ♦ أحسب U_0 ، U_1 ، U_2 .
- [2] ♦ بين أن (U_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r .
- [3] ♦ استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n) .
- [4] ♦ تحقق أن العدد 2021 حد من حدود المتتالية (U_n) ، ما رتبته ؟
- [5] ♦ أحسب المجموع : $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{506}$

✓ التمرين 02

♠ (U_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بالحدين : $U_{10} = 31$ و $U_{15} = 46$

- [1] ♦ عين أساسها و حدها الأول U_0 .
- [2] ♦ أكتب (U_n) بدلالة n .
- [3] ♦ بين أن العدد 6028 حد من حدود المتتالية (U_n) ، ما رتبته ؟
- [4] ♦ أحسب المجموع : $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{2009}$

✓ التمرين 03

♠ (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 وأساسها 5 حيث : $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 = 34$

- [1] ♦ أحسب U_0 .
- [2] ♦ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = 5n + 1$
- [3] ♦ عين العدد الطبيعي n حيث $U_{n+1} + U_n - 8n = 4033$
- [4] ♦ أحسب المجموع : $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{2013}$
- [5] ♦ لتكن المتتالية العددية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $V_n = 2U_n + 1$
أ) ♠ أدرس اتجاه تغير المتتالية (V_n) .
ب) ♠ أحسب المجموع : $S' = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{2013}$

✓ التمرين 04

♠ لتكن (U_n) المتتالية الحسابية التي أساسها 3 حدها الأول U_0 وتحقق : $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 = 10$

- [1] ♦ أحسب U_0 .
- [2] ♦ أكتب عبارة الحد العام (U_n) بدلالة n .
- [3] ♦ أحسب المجموع : $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{49}$
- [4] ♦ لتكن المتتالية العددية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $V_n = 2U_n + 1$
♦ أحسب المجموع : $S' = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{49}$

✓ التمرين 05

♠ (U_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $U_1 = 2$ وبالعلاقة : $U_2 - 2U_5 = 19$

- [1] ♦ أحسب الأساس r للمتتالية (U_n) .
- [2] ♦ أحسب الحد العاشر
- [3] ♦ أكتب (U_n) بدلالة n .
- [4] ♦ بين أن العدد (-2008) حد من حدود المتتالية (U_n) ، محددًا رتبته
- [5] ♦ أحسب المجموع : $S = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{671}$

✓ التمرين 06

♠ (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_1 وأساسها r حيث : $U_2 = \frac{1}{2}$ و $U_1 - U_3 = 5$

[1] ♦ بين أن $U_1 + U_3 = 1$ ، ثم عيّن الحد الأول U_1 .

[2] ♦ استنتج أن : $r = -\frac{5}{2}$ ، ثم أكتب (U_n) بدلالة n .

[3] ♦ أحسب بدلالة n المجموع $S_n : S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ ثم عيّن قيمة العدد n التي تكون من أجلها $S_n = \frac{657}{2}$

✓ التمرين 07

♦ نعتبر المتتالية الحسابية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول U_0 وأساسها r

[1] ♦ أحسب الحد U_4 ، علما أن : $U_3 + U_5 = 20$.

[2] ♦ أحسب الحد U_5 ، علما أن : $2U_4 - U_5 = 7$.

[3] ♦ استنتج قيمة r وأحسب U_0 .

[4] ♦ تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي $n : U_n = 3n - 2$

[5] ♦ أحسب بدلالة n المجموع $S_n : S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

[6] ♦ جد قيمة العدد الطبيعي n حيث $S_n = 33$

✓ التمرين 08

♦ (U_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول U_0 وأساسها q حيث : $U_1 = 6$ و $U_4 = 48$

[1] ♦ أحسب الأساس والحد الأول للمتتالية (U_n) .

[2] ♦ استنتج أن عبارة الحد العام للمتتالية (U_n) هي : $U_n = 3 \times 2^n$.

[3] ♦ علما أن $2^8 = 256$ ، بين أن العدد 768 هو حد من حدود المتتالية (U_n) .

[4] ♦ أحسب المجموع S حيث : $S = U_0 + U_1 + \dots + U_7$

✓ التمرين 09

♦ (U_n) متتالية عددية معرفة على بحدها الأول $U_1 = 7$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n : U_{n+1} = 2U_n + 1$

[1] ♦ أحسب U_2 ، U_3 ، U_4 .

♦ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعرف المتتالية (V_n) كما يلي : $V_n = U_n + 1$

[1] ♦ أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول V_1 .

[2] ♦ أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (V_n) بدلالة n ثم استنتج (U_n) بدلالة n

[3] ♦ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$ ثم عيّن قيمة n علما أن $S_n = 1016$

[4] ♦ استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث : $S'_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$

✓ التمرين 10 BAC2009 علوم تجريبية

♦ (U_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول U_1 وأساسها q حيث : $\begin{cases} U_1 + 2U_2 + U_3 = 32 \\ U_1 \times U_2 \times U_3 = 216 \end{cases}$

[1] ♦ أحسب U_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول U_1 .

[2] ♦ أكتب عبارة الحد العام (U_n) بدلالة n .

[3] ♦ أحسب S_n حيث : $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ ، ثم عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = 728$

✓ التمرين 11

♦ (U_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $\begin{cases} U_0 = \alpha & ; & (\alpha \in \mathbb{R}) \\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - \frac{8}{9} & ; & (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

[1] ♦ عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (U_n) ثابتة .

[2] ♦ برهن بالتراجع أنه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (U_n) ثابتة .

[3] في كل ما يلي : $\alpha = 2$ ونعرف المتتالية العددية (V_n) كما يلي : $V_n = U_n + \frac{8}{3}$

أ) أثبت أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول V_0

ب) أكتب عبارة الحد العام (V_n) بدلالة n ، وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

✓ التمرين 12 BAC2014 علوم تجريبية

لكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - \frac{4}{3}$

و (V_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $V_n = U_n + 4$

[1] بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

[2] أكتب كلا من (V_n) و (U_n) بدلالة n

[3] أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) على $\mathbb{N}$.

[4] أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

لكن (W_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $W_n = 5\left(\frac{1}{V_n + 5} - 1\right)$

[1] بين أن المتتالية (W_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

[2] احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - W_n)$

✓ التمرين 13

لكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$

[1] أحسب الحدود U_1 ، U_2 ، U_3 ، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

[2] أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \geq 3$

ب) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة ، ثم استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة .

[3] نعتبر (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $V_n = U_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي

أ) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) أكتب عبارة (V_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة (U_n) بدلالة n ، ثم استنتج نهاية المتتالية (U_n)

✓ التمرين 14 BAC2014 علوم تجريبية

لكن α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1

(U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $U_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \alpha U_n + 1$

لكن (V_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $V_n = U_n + \frac{1}{\alpha - 1}$

[1] بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها α .

ب) أكتب بدلالة n و α عبارة (V_n) ، ثم استنتج بدلالة n و α عبارة (U_n)

ج) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون من أجلها المتتالية (U_n) متقاربة

[2] نضع $\alpha = \frac{3}{2}$

لكن $T_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ و $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ حيث : T_n و S_n المجموعين n بدلالة n

✓ التمرين 15

لكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $\begin{cases} U_1 = e^2 \\ U_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{U_n} \end{cases}$

[1] أحسب الحدود U_2 ، U_3 .

[2] أثبت بالتراجع أن : $U_n > \frac{1}{e}$

[3] برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

[4] نعتبر (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$ كما يلي : $V_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln(U_n)$

أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

ب) عبر عن (V_n) بدلالة n ، ثم استنتج أن $U_n = e^{6(\frac{1}{2})^{n-1}}$

ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

[5] أحسب الجداء : $S_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$

✓ القرن 16 BAC2015 علوم تجريبية

لكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $U_0 = e^2 - 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $U_{n+1} = (1 + U_n)e^{-2} - 1$

[1] أحسب U_1 ، U_2 ، U_3 .

[2] أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 0 + 1$

[3] بين أن المتتالية (U_n) متناقصة . هل هي متقاربة ؟ علل .

[4] نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = 3(1 + U_n)$

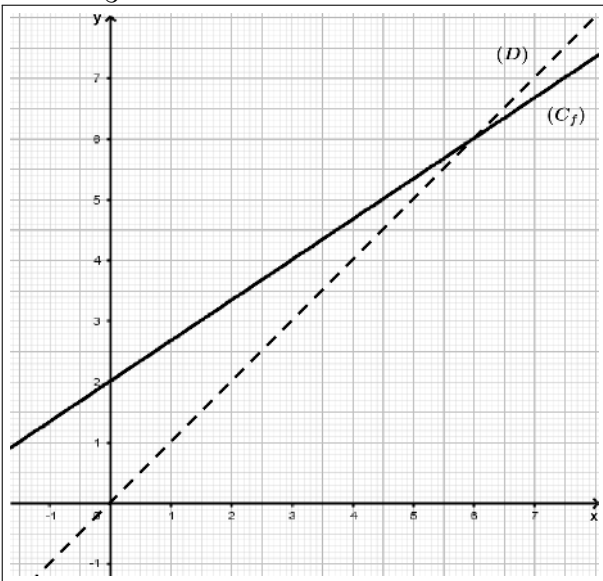
أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) أكتب (V_n) و (U_n) بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

ج) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $\ln V_0 + \ln V_1 + \ln V_2 + \dots + \ln V_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

✓ القرن 17

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثلثا المستقيمين (D) و (C_f) معادلتها على الترتيب : $y = x$ و $y = \frac{2}{3}x + 2$



[1] لكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $U_0 = \frac{5}{2}$ ومن أجل كل

عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 2$

أ) أنقل الشكل ثم مثل على محور القواصل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 و U_4 بدون حسابها مبررا خطوط الرسم

ب) ضع تخيينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها .

[2] أ) برهن بالتراجع أن أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \geq 6$

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

[3] نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة بـ : $V_n = U_n - 6$

أ) برهن أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

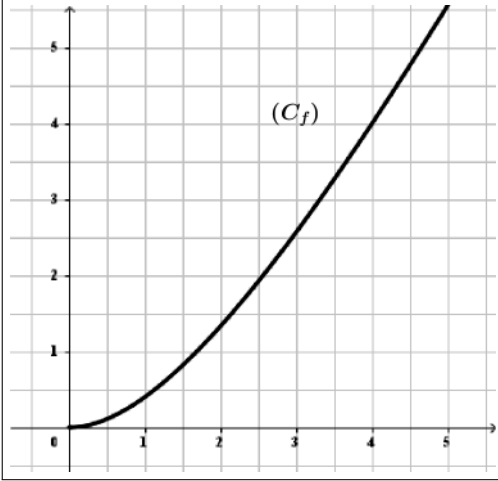
ب) عبر عن (V_n) بدلالة n واستنتج (U_n) بدلالة n ،

ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

ج) أحسب المجموع : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$ واستنتج المجموع $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$

✓ التمرين 18 BAC2014 رياضيات

♠ الدالة العددية f معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$. (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. كما هو مبين في الشكل أدناه .



[1] بين أن الدالة f متزايدة تماما .

[2] (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $U_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$ المستقيم الذي معادلته $y = x$

أ) باستعمال المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) مثل على محور الفواصل الحدود U_0, U_1, U_2, U_3 و U_4 دون حسابها .

ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها .

[3] أ) برهن بالتراجع أن أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq 3$

ب) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة .

ج) استنتج أن (U_n) متقاربة .

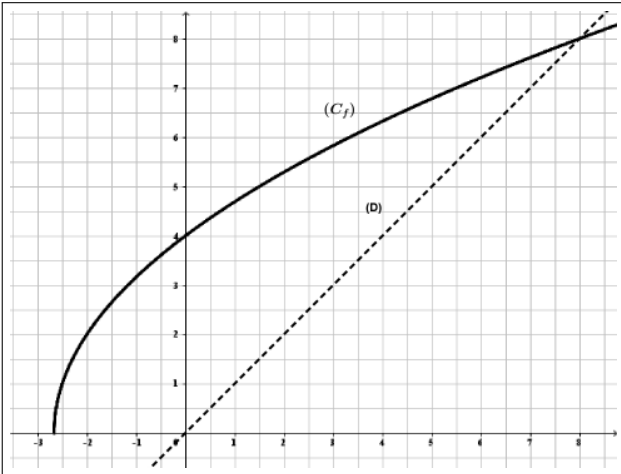
[4] أ) ادرس إشارة العدد $7U_{n+1} - 6U_n$ واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{6}{7}U_n$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq 3 \left(\frac{6}{7}\right)^n$

ج) أحسب نهاية المتتالية (U_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$

✓ التمرين 19 BAC2015 تقني رياضي

♠ نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بـ $U_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \sqrt{6U_n + 16}$



[1] الدالة المعرفة على المجال $[-\frac{8}{3}; +\infty[$ كما يلي :

$h(x) = \sqrt{6x+16}$ و (C_f) تمثيلها البياني و (D)

المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

أ) أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود U_0, U_1, U_2, U_3 بدون حسابها مبرراً خطوط الإنشاء

ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها .

[2] أ) برهن بالتراجع أنه أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n < 8$

ب) بين أن : $U_{n+1} - U_n = \frac{(8 - U_n)(U_n + 2)}{\sqrt{6U_n + 16} + U_n}$

ج) استنتج اتجاه تغير (U_n) .

[3] أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - U_n)$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

✓ التمرين 20

♠ (U_n) متتالية حسابية متناقصة معرفة على $\mathbb{N}$ بـ U_0 أساسها r حيث : $\begin{cases} U_1 + U_2 + U_3 = 24 \\ U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 210 \end{cases}$

- [1] ♦ أحسب U_2 والأساس r لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول U_0 .
- [2] ♦ أكتب عبارة الحد العام (U_n) بدلالة n ، ثم أحسب U_{2021} .
- [3] ♦ أحسب المجموع T_n بدلالة n حيث : $T_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$
- ♠ نعتبر (V_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $V_n = e^{14-3n}$ (حيث e أساس اللوغاريتم النيبيري)
- [1] ♦ بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول .
- [2] ♦ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ ، ماذا تستنتج ؟
- [3] ♦ أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$
- [4] ♦ أحسب الجداء : $P_n = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_n$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

✓ التمرين 21 ◀

- ♠ (U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة حيث : $\begin{cases} \ln U_4 - \ln U_2 = 2 \\ \ln U_1 + \ln U_6 = 9 \end{cases}$
- [1] ♦ عين أساسها q و حدها الأول U_1 .
- [2] ♦ أكتب عبارة الحد العام (U_n) بدلالة n ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.
- [3] ♦ أحسب المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
- ♠ (V_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $V_n = \ln U_n + \ln U_{n+1}$
- [1] ♦ بين أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r و حدها الأول .
- [2] ♦ أحسب بدلالة n المجموع : $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

✓ التمرين 22 ◀

- ♠ (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{4} \\ U_{n+1} = (U_n)^2 + \frac{U_n}{2} \end{cases}$
- [1] ♦ أحسب الحدود U_1 ، U_2 .
- [2] ♦ أثبت بالتراجع أن : $0 < U_n \leq \frac{1}{4}$
- [3] ♦ بين أن (U_n) متناقصة تماما .
- [4] ♦ هل المتتالية (U_n) متقاربة ؟ علل ؟
- [5] ♦ أ) بين أن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} \leq \frac{3}{4} U_n$
- ب) استنتج أن $U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

✓ التمرين 23 ▶ BAC2018 تقني رياضي ◀

- ♠ لتكن (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بجدها العام : $U_n = 2(3)^n$
- و (V_n) متتالية عددية معرفة بجدها الأول $V_0 = 4$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_{n+1} = 5V_n + U_n$
- ♠ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $W_n = \frac{V_n}{U_n} + \frac{1}{2}$
- [1] ♦ أن المتتالية (W_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ يطلب تعيين وحدها الأول .
- [2] ♦ أكتب عبارة الحد العام (W_n) بدلالة n ، ثم استنتج أن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_n = 5^{n+1} - 3^n$

سلسلة المتفوق في الرياضيات

Bac 2022

تمارين ومسائل في المتتاليات

الجزء الثاني

BY LALAOUNA ALI MOUNIR

تمرين 1

(u_n) و (v_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين بـ : $u_0 = 5$ ، $u_1 = 31$ ، $v_0 = -1$ و $v_1 = -11$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{cases} u_{n+2} = 12u_{n+1} - 35u_n \\ v_{n+2} = 12v_{n+1} - 35v_n \end{cases}$$

ولكن المتتاليتين العدديتين (x_n) و (y_n) المعرفتين من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $y_n = u_n - v_n$ و $x_n = u_n + v_n$

1/ احسب x_0 و x_1 ثم برهن أن المتتالية (x_n) هندسية أساسها 5

2/ برهن أن المتتالية (y_n) هندسية بنفس طريقة السؤال 1/

3/ احسب x_n و y_n بدلالة n ثم عبر عن u_n و v_n بدلالة n .

تمرين 2

• المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$

1/ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0;1]$ بـ : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

• احسب $f'(x)$ ثم استنتج الحد الأول u_0

2/ ا) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة .

ب) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n غير المعدوم : (1) $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)}$ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

3/ من أجل $n \geq 3$ نضع $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx$

ا) تحقق أن من أجل $n \geq 3$: $u_n + u_{n-2} = I_n$

ب) باستعمال التكامل بالتجزئة على I_n بين أن من أجل $n \geq 3$: $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$

ت) استنتج أن من أجل $n \geq 3$: (2) $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$

ج) بوضع $v_n = nu_n$ وباستعمال المتباينتين (1) و (2) بين أن (v_n) متقاربة نحو عدد حقيقي يطلب تعيينه .

تمرين 3

1) $g(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$: $x \in]0; +\infty[$ المعرفة على المجال $g(x)$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي

• 1 - احسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g

ج- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $\ln 4 \leq \alpha < \ln 6$

د - استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 2(1 - e^{-u_n})$.
- أ - بين أن $1 \leq u_n < \alpha$ ، n عدد طبيعي .
- ب - تحقق أن $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ ، n عدد طبيعي ، ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .
- ج - بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمرين 4

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$ و (c) تمثيلها في معلم متعامد ومتجانس
1. أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.
 ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)
- ج/ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (D)
2. أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$.
 ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و بين أن المستقيم (D') الذي معادلته $y = -x + \ln 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)
- ج/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (D')
3. ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها
4. ارسم (D) و (D') و (C)
5. نضع : $I = \int_2^3 [f(x) - x] dx$
- 1- فسر هندسيا العدد I
- 2- بين أنه من أجل كل $x \in [0, +\infty[$ ، $\ln(1 + x) \leq x$
- 3- أستنتج أن $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx$ واعط حصرا للعدد I سعته 0.02

تمرين 5

- I $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$ دالة معرفة على المجال $[2, +\infty[$ كما يلي :
 احسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[2, +\infty[$.
- II (u_n) متتالية معرفة بـ : $u_0 = \frac{5}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$
1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 < u_n < 3$.
2. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n^2 < \frac{9}{10}(u_n^2 + 1)$.
3. أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ، هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟
4. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n^2}{u_n^2 + 1}(u_n - 2)$.
5. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمرين 6

- (u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_1 = 3$
 و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = \ln(2e^{u_n})$
 1- أثبت أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها
 2- أحسب u_n بدلالة n
 3- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :
 $u_1 + u_2 + \dots + u_n = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)n^2 + \left(3 - \frac{\ln 2}{2}\right)n$
 4- (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = e^{u_n}$
 أ. أحسب $v_1; v_2; v_3$ ثم عين v_n بدلالة n
 ب. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.
 ج. أحسب الجداء $\Pi = v_1 v_2 \dots v_n$

تمرين 7

- نعتبر الدالة φ المعرفة على المجال $[0, 2]$ بالعلاقة : $\varphi(x) = \frac{2x+3}{x+2}$
 (1) أدرس تغيرات الدالة φ على المجال $[0, 2]$
 (b) برهن أنه إذا كان $x \in [0, 2]$ فإن $\varphi(x) \in \left[\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right]$
 (2) (u_n) $_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية عددية معرفة بالعلاقة : $u_n = \int_0^2 \varphi(x) e^{\frac{x}{n}} dx$
 (a) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن : $\frac{3}{2}n(e^{\frac{2}{n}} - 1) \leq u_n \leq \frac{7}{4}n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$
 (b) برهن أنه إذا كانت (u_n) تقبل نهاية l فإن $3 \leq l \leq \frac{7}{2}$ (نذكر أن : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$)
 (3) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; 2]$ فإن : $\varphi(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$
 - استنتج أن التكامل : $I = \int_0^2 \varphi(x) dx$
 (4) (a) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; 2]$ فإن : $1 \leq e^{\frac{x}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$
 (b) استنتج أن : $I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$
 (c) عين النهاية l للمتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة

تمرين 8

- I. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n + 1$
 (1) احسب u_1, u_2, u_3
 (2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^n - 1$
 (w_n) و (v_n) متتاليتان عديتان معرفتان على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + 3$ و $w_n = 2^n$
 (3) احسب بدلالة n : S_n, S'_n و S''_n
 حيث : $S''_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

II. نعتبر في هذا الجزء من أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن جميع حدود المتتاليتين (u_n) و (v_n) من $\mathbb{N}$

- (1) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعديدين u_n و v_n
- (2) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 3
- (ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي نحقق $v_n \equiv 0[3]$
- (ج) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تجعل الحدين u_n و v_n أوليين فيما بينهما
- (3) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن: $S''_n \equiv S'_n[3]$

تمرين 9

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على المعرفة $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_1 = -1$ و $u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$

1. (أ) اثبت بالتراجع ان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n < 3$.
 - (ب) استنتج ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما.
 - (ج) بين ان المتتالية (u_n) متقاربة مع تحديد نهايتها.
 2. نعتبر (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = n(3 - u_n)$
 - (أ) بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
 - (ب) اكتب v_n ثم u_n بدلالة العدد الطبيعي غير معدوم n .
 - (ج) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع و الجداء التاليين:
- $$P_n = v_1 \times v_2 \times v_3 \times \dots \times v_n, \quad S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$$

تمرين 10

1. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$
 - أ — برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $0 \leq u_n < u_{n+1} < 2$, ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.
 - (يمكنك استعمال اتجاه تغير الدالة المرفقة للمتتالية (u_n))
 - ب — برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2 - u_n)$, واستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n ,
- $$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0, \quad 0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
2. (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$
 - أ — برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$, يطلب تحديد حدها الأول.
 - ب — اكتب كلاً من v_n و u_n بدلالة n , ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمرين 11

- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 3$ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$.
- (1) أحسب الحدود u_1 و u_2 و u_3 ثم برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.
 - (2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ثم استنتج أنها متقاربة معينا نهايتها.
 - (3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n^2 - 1$
 - أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
 - ب- أكتب بدلالة n كلا من u_n و v_n ثم أحسب $\lim u_n$.
 - ج- أحسب بدلالة n كلا من المجموع التالية $S_n = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$ و $T_n = v_0 + 2v_1 + 2^2v_2 + \dots + 2^n v_n$ و $L_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \ln(v_2) + \dots + \ln(v_n)$

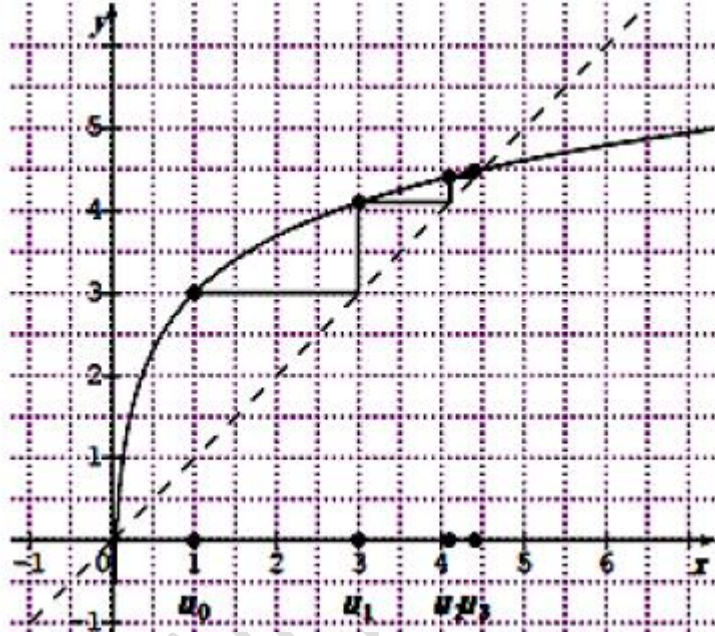
تمرين 12

- لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{5x}{2x+3}$
- 1- بين أن f متزايدة تملأ على المجال $]1; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها
- نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بـ : $U_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{5U_n}{2U_n+3}$
- 2- (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 1$
 - (ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متقاربة
- نعرف من أجل كل عدد طبيعي n المتتالية (V_n) كما يلي : $V_n = 1 - \frac{1}{u_n}$
- 3- (أ) بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول
 - (ب) عبر عن V_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n
 - نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = V_0^2 + V_1^2 + \dots + V_n^2$
 - (ج) احسب بدلالة n قيمة المجموع S_n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

تمرين 13

- I. نعتبر الدالة g المعرفة على $[1; 10]$ بـ : $g(x) = 3 - x + \ln(x)$.
- (أ) ادرس تغيرات الدالة g على المجال $[1; 10]$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 - (ب) بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α في المجال $[1; 10]$ ، ثم تحقق أن $4,50 < \alpha < 4,51$.
 - (ج) استنتج، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$ على $[1; 10]$.
- II. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- حيث f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالشكل : $f(x) = 3 + \ln x$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أ) مثل على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) ، لاحظ أن المنحنى (C_f) هو صورة منحنى الدالة $\ln$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0; 3)$.

- (2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $1 \leq u_n < \alpha$.
 ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ واستنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
 ج) هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ علل.
 د) استنتج بالضبط نهاية المتتالية (u_n) .

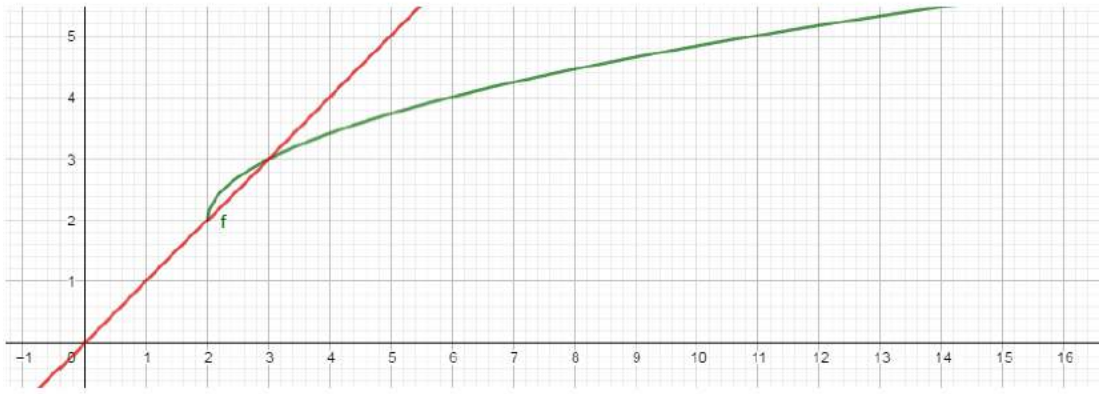


تمرين 14

$$\begin{cases} U_0 = 11 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n - 2} + 2 \end{cases} : n \in \mathbb{N} \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N}$$

- (C_f) المنحنى الممثل للدالة f المرفقة بالمتتالية (U_n) و (Δ) المنصف الأول ذي المعادلة: $y = x$.
- أ. مثل الحدود U_0, U_1, U_2, U_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل. (على الوثيقة المرفقة)
 ب. أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) .
 - أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 \leq U_n \leq 11$.
 - أ. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n - 2}(1 - \sqrt{U_n - 2})$.
 - أ. بين أن المتتالية (U_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$.
 ب. استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة، و عين نهايتها.
 - أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(U_n - 3)$.

ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n - 3 \leq 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.



تمرين 15

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n$.

(1) احسب u_2 ، u_3 و u_4 .

(2) (أ) بَيِّن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_n > 0$.

(ب) ادرس اتجاه تغيُّر المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

(ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) .

(3) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نضع $v_n = \frac{u_n}{n}$.

(أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية بطلب تعيين أساسها ووجدتها الأول v_1 .

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n = \frac{n}{2^n}$.

(4) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln(x) - x \ln 2$.

(أ) عَيِّن نهاية الدالة f عند $+\infty$. (ب) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

تمرين 16

1. لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بـ: $U_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = e + \sqrt{U_n - e}$.

أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $e < U_n < e + 1$.

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - e)(e + 1 - U_n)}{\sqrt{U_n - e} + U_n - e}$ ثم استنتج اتجاه تغيُّر المتتالية (U_n) .

ت. استنتج أن (U_n) متقاربة واحسب نهايتها.

2. لتكن المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $V_n = e \ln(U_n - e)$.

أ. بين أن المتتالية (V_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$. احسب V_0 .

ب. عبر عن V_n بدلالة n ثم بين أن $U_n = e(1 + e^{\ln(3-e) \times (\frac{1}{2})^{n-1}})$ واحسب نهاية (U_n) مرة ثانية.

3. نضع: $S_n = \ln(3 - e) + \ln(3 - e) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots \ln(3 - e) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$P_n = \left(\frac{u_0}{e} - 1\right) \times \left(\frac{u_1}{e} - 1\right) \times \left(\frac{u_2}{e} - 1\right) \times \dots \times \left(\frac{u_n}{e} - 1\right) \text{ و}$$

احسب P_n ثم بين أن $P_n = e^{S_n - n - 1}$

تمرين 17

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ،

نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ،

(1) أحسب u_1 و v_1 .

(2) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ، ثم عبّر عن الحد العام v_n بدلالة n .

(3) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ،

بين أن : $S_n = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

تمرين 18

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 + \sqrt[3]{u_n - 1}$

(1) باستعمال الاستدلال بالتراجع بين ان: من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$

(2) أ- تحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \left(\sqrt[3]{u_n - 1}\right)\left(1 - \sqrt[3]{u_n - 1}\right)\left(1 + \sqrt[3]{u_n - 1}\right)$

ب- بين ان المتتالية (u_n) متزايدة، ثم استنتج انها متقاربة.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(u_n - 1)$

أ- بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد اساسها وحدها الاول.

ب- عين عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n . ج- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمرين 19

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = \frac{11}{4}$ و $u_{n+1} = 3u_n - 4$ ، (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 4u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي

(ملف 20) : بالأسفل

(1) أحسب الحدود u_1, u_2 .

(2) برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

(3) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية.

(4) بوضع $\alpha = -8$:

(أ) أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(ب) هل المتتالية (u_n) محدودة ؟ علّل .

(ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4^2} + \dots + \frac{u_n}{4^n}$.

أحسب المجموع S_n ، ثم بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{17}{3}$.

تمرين 20

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_1 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}$

(1) أحسب u_2 و u_3 .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $u_n \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$

(3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(4) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، أحسب نهايتها .

(5) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_n = v_n - \alpha$.

(أ) أوجد العدد الحقيقي α بحيث تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحددها الأول.

(ب) نضع $\alpha = -\frac{1}{3}$: أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n عبارة u_n .

➤ أحسب بدلالة n ، المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

➤ أحسب بدلالة n ، الحداء : $P_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$.

تمرين 21

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0; 2]$ بـ : $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; 2]$.

(2) أثبت أنه إذا كان $x \in [1; 2]$ فإن $f(x) \in [1; 2]$.

(3) مثل (C_f) والمستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ على المجال $[0; 2]$.

II. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على N كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

(1) أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 دون حسابها.

(ب) خمن اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

(2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leq 2$

(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(ت) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية l يطلب تعيينها.

(3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(u_n - 1)$

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ت) نضع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

➤ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $n < S_n < n + 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ ، ثم أحسب كلا من $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$