

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

1) احسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

2) احسب $g'(x)$ و ادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة g

3) برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن $0,35 \leq \alpha \leq 0,36$ (4) استنتج إشارة g على $\mathbb{R}$

(II) نعتبر الآن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$

ونسمي (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الرسم 2cm)

1) احسب نهايتي الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

2) احسب $f'(x)$ ثم ادرس إشارتها على $\mathbb{R}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها

4) أ) بين أن $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$ ب) باستعمال حصر العدد α عين حصر لـ $f(\alpha)$

5) برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$ ثم حدد وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ)

6) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 0 7) أرسم كل من (Δ) ، (T) ، ثم (C).

التمرين الثاني :

(I) نعتبر g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $g(x) = x^2 - \ln x^2$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم يكون: $g(x) > 0$

(II) نعتبر الآن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) احسب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ، ثم فسر النتائج بيانيا.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي من $\mathbb{R}^*$ تكون: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

ج) برهن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) ذو المعادلة $y = x$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

3) أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $-x \in \mathbb{R}^*$ و $f(x) + f(-x) = 0$ ، ماذا تستنتج؟ فسر النتيجة بيانيا.

ب) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,3 < \alpha < 0,4$ ، ثم استنتج أنها تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصره.

4) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة لـ كليهما.

ب) أنشئ كلا من: (T_1) ، (T_2) ، (Δ) والمنحنى (C_f) .

5) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = \left[\frac{\ln(x+1)}{x+1} + (x+1) + \frac{2}{x+1} \right] + 2$

البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.. بين أنه يوجد تحويل نقطي يحول المنحنى (C_f) إلى المنحنى (C_h) . (الإنشاء غير مطلوب).

التمرين الثالث:

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.
1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2) احسب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثم بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فان: $g(x) > 0$

(II) نعتبر الآن الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فان: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1.

4) بين ان (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث $y = x - 1$ معادلة له ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) .

5) ارسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحنى (C).

6) m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم حيث: $y = mx - m$ معادلة له.

أ) تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي m فان النقطة $A(1; 0)$ تنتمي الى المستقيم (Δ_m) .

ب) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = mx - m$.

التمرين الرابع:

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x-1)e^{2x} - 1$

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ) بين أن: المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث: $1,10 < \alpha < 1,11$.

ب) ادرس إشارة $g(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (2x-3)(e^{2x} - 2)$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ) احسب كلا من: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) بين أن: المستقيم (D) ذا المعادلة المختصرة $y = -4x + 6$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة الى المستقيم (D).

2) أ) بين أن: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 4g(x)$.

ب) استنتج أن: f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \alpha[$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) اكتب معادلة ديكارتية لـ (T) مماس (C) في النقطة ذات الفاصلة 1. (نقبل أن: (C) يقع أعلى من (T))

3) بين أن: $f(\alpha) = -\frac{(2\alpha-3)^2}{\alpha-1}$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

4) أ) عين احداثيات نقط تقاطع (C) مع كل من حائلي محوري الاحداثيات.

ب) انشئ (D) و (T) ثم مثل (C). (نأخذ: $f(\alpha) \approx -5,6$).

5) نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $k(x) = |2x-3|(e^{2x} - 2)$ و (Γ) تمثيلها البياني في نفس المستوي السابق.

اشرح كيفية تمثيل (Γ) انطلاقا من (C)، ثم مثله.

6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(x^2)$

دون تعيين عبارة الدالة h ادرس اتجاه تغيرها على $\mathbb{R}$. ثم شكل جدول تغيراتها.

$$g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x} \quad (I)$$

1) حساب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{x^2 - 2x + 2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}{\frac{e^x}{x^2}} = 1$$

2) حساب $g'(x)$ ودراسة إشارتها ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة g :
الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -[(2x - 2)e^{-x} - e^{-x}(x^2 - 2x + 2)] \\ &= -[2x - 2 - x^2 + 2x - 2]e^{-x} = [x^2 - 4x + 4]e^{-x} = (x - 2)^2 e^{-x} \end{aligned}$$

نستنتج انه من اجل كل $x \in \mathbb{R}$ فان $g'(x) \geq 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
جدول التغيرات:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		0	$+$
$g(x)$	$-\infty$		1

3) اثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم التحقق أن $0,35 \leq \alpha \leq 0,36$:

الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ ومن خلال جدول التغيرات نستنتج انها رتيبة تماما على $\mathbb{R}$ ومن اجل كل $x \in \mathbb{R}$ فان

$$g(x) \in]-\infty; 1[\text{ و } g(x) \in]-\infty; 1[\text{ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فانه يوجد عدد حقيقي وحيد } \alpha \text{ بحيث } g(\alpha) = 0$$

التحقق ان $0,35 \leq \alpha \leq 0,36$: لدينا $g(0,35) \simeq -0,02$, $g(0,36) \simeq 0,02$ اي $g(0,35) \times g(0,36) < 0$ اذن
حسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج ان $0,35 \leq \alpha \leq 0,36$.

4) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$: من خلال ما سبق نستنتج ان إشارة $g(x)$ تكون حسب ما يلي:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		0	$+$

$$f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x} \quad (II)$$

1) حساب نهايتي الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{x^2 + 2}{x} e^{-x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{x^2 + 2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{1 + \frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x^2}} = +\infty$$

2) حساب $f'(x)$ ثم دراسة إشارتها على $\mathbb{R}$:

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f'(x) = 1 + 2xe^{-x} - e^{-x}(x^2 + 2) = 1 + (2x - x^2 - 2)e^{-x} = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x} = g(x)$$

نستنتج ان اشارة $f'(x)$ من نفس اشارة $g(x)$ اذن:

x	$-\infty$	α	$+\infty$	
f'(x)		-	0	+

3) استنتاج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم تشكل جدول تغيراتها :

نستنتج ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$.
جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	$+\infty$	
f'(x)		-	0	+
f(x)	$+\infty$		$f(\alpha)$	$+\infty$

4) أ) تبين أن $f(\alpha) = \alpha - 1 + (\alpha^2 + 2)e^{-\alpha}$: $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$ (1)

ولدينا $g(\alpha) = 0$ ومنه $1 - (\alpha^2 - 2\alpha + 2)e^{-\alpha} = 0$ ومنه $e^{\alpha} - (\alpha^2 - 2\alpha + 2) = 0$ ومنه $e^{\alpha} = \alpha^2 - 2\alpha + 2$ ومنه $\alpha^2 + 2 = e^{\alpha} + 2\alpha$

بالتعويض في (1) نجد : $f(\alpha) = \alpha - 1 + (e^{\alpha} + 2\alpha)e^{-\alpha} = \alpha - 1 + 1 + 2\alpha e^{-\alpha} = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$ وهو المطلوب.

ب) تعين حصارا لـ $f(\alpha)$ لدينا $0,35 \leq \alpha \leq 0,36$ ومنه $-0,36 \leq -\alpha \leq -0,35$ ومنه $e^{-0,36} \leq e^{-\alpha} \leq e^{-0,35}$ ومنه

$0,698 \leq e^{-\alpha} \leq 0,705$ ومنه $1,40 \leq 2e^{-\alpha} \leq 1,41$ ومنه $2,40 \leq 1 + 2e^{-\alpha} \leq 2,41$ بالضرب مع

$0,35 \leq \alpha \leq 0,36$ نجد $0,84 \leq \alpha(1 + 2e^{-\alpha}) \leq 0,87$ اي $0,84 \leq f(\alpha) \leq 0,87$ وهو المطلوب.

5) اثبات أن المستقيم (Δ) الذي معادلته له $y = x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$ ثم حدد الوضعية :

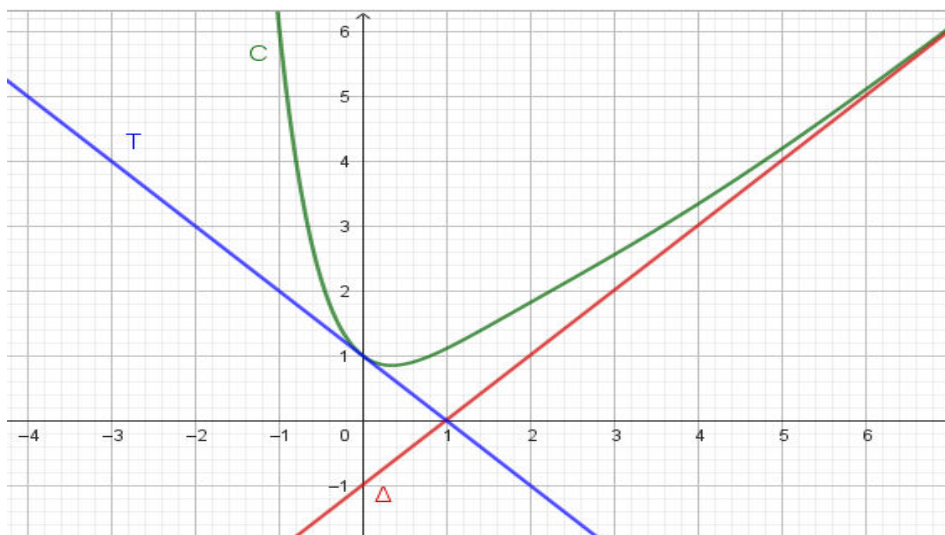
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{\frac{e^x}{x^2}} = 0$$

دراسة الوضع النسبي بين (Δ) و (C) : ندرس اشارة الفرق $f(x) - y = (x^2 + 2)e^{-x}$: نستنتج انه من اجل كل عدد

حقيقي x فان $f(x) - y > 0$ لان $e^{-x} > 0$ و $x^2 + 2 > 0$ دوماً، ومنه (Δ) يقع تحت (C) .

6) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 0 : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ ومنه $y = -x + 1$

7) رسم كل من (Δ) ، (T) ، ثم (C) :



تصحيح التمرين الثاني:

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $g(x) = x^2 - \ln(x^2)$.

(1) دراسة إتجاه تغير الدالة g و تشكيل جدول تغيراتها :

(*) الدالة المشتقة : الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و عبارة دالتها المشتقة هي $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$

نلاحظ أن إشارة $g'(x)$ من إشارة $x(2x^2 - 2)$ و عليه نلخص الإشارة في الجدول التالي :

إذن جدول التغيرات يكون :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	$-$	0	$-$	0	$+$
$2x^2-2$	$+$	0	$-$	$-$	0
$g(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0

(*) النهايات : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$

(2) نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم نكون : $g(x) > 0$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$.

(1) أ) حساب النهايات :

(*) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0$: لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{2}{x^2} + 1 + \frac{\ln(x^2)}{x^2} \right) = -\infty$

فبوضع : $\begin{cases} x^2 = t \\ -\infty \rightarrow +\infty \end{cases}$ هذه الأخيرة تصبح : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$.

(*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$: لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب) حساب النهايات و تفسير النتائج بيانيا :

(*) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x} \right) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x} \right) = +\infty$

(*) التفسير البياني : المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $x = 0$.

(2) أ) بيان أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ يكون : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \quad , \quad f'(x) = -\frac{2}{x^2} + 1 + \frac{2 - \ln(x^2)}{x^2} = \frac{-2 + x^2 + 2 - \ln(x^2)}{x^2} = \frac{x^2 - \ln(x^2)}{x^2}$$

ب) دراسة إتجاه تغير الدالة f : نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ إذن الدالة f متزايدة تماما على كل من

المجالين $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$ و عليه جدول تغيراتها يكون :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

ج) برهان أن المستقيم (Δ) مقارب للمنحني (C_f) :

أي نحسب : $\lim_{|x| \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{x} + \frac{\ln(x^2)}{x} \right] = 0$ ، إذن : المستقيم (Δ) هو مقارب مائل للمنحني (C_f) .

(* دراسة الوضع النسبي : أي ندرس إشارة الفرق $[f(x) - x] = \left(\frac{2 + \ln(x^2)}{x} \right)$

نلخص الإشارة في الجدول التالي :

x	$-\infty$	$-e^{-1}$	0	e^{-1}	$+\infty$
x	$-$	$-$	$+$	0	$+$
$2 + \ln(x^2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x) - x$	$-$	0	$+$	$-$	$+$

و منه الوضعية تكون كما يلي :

(* على كل من المجالين $]-\infty; -e^{-1}[$ و $]0; e^{-1}[$ المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) .

(* على كل من المجالين $]-e^{-1}; 0[$ و $]e^{-1}; +\infty[$ المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .

(* المنحني (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطتين : $(-e^{-1}; f(-e^{-1}))$ و $(e^{-1}; f(e^{-1}))$.

(3 أ) التحقق أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، $-x \in \mathbb{R}^*$ يكون : $f(x) + f(-x) = 0$.

$$\text{لدينا : } f(x) + f(-x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x} - \frac{2}{x} - x - \frac{\ln(x^2)}{x} = 0$$

إذن و بما أنه من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ ، $-x \in \mathbb{R}^*$ و $f(x) + f(-x) = 0$ فإن الدالة f فردية و منحناها البياني (C_f)

يقبل مبدأ المعلم O كمركز التناظر .

ب) باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نجد أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,3 < \alpha < 0,4$.

و بما أن الدالة f فردية إذن يوجد حل آخر β محصور بين $-0,4$ و $-0,3$ أي يكون : $-0,4 < \beta < -0,3$.

(4 أ) المنحني (C_f) يقبل مماسين يوازيان المستقيم (Δ) يعني أن : $f'(x) = 1$ ، لنحل في $\mathbb{R}^*$ هذه الأخيرة .

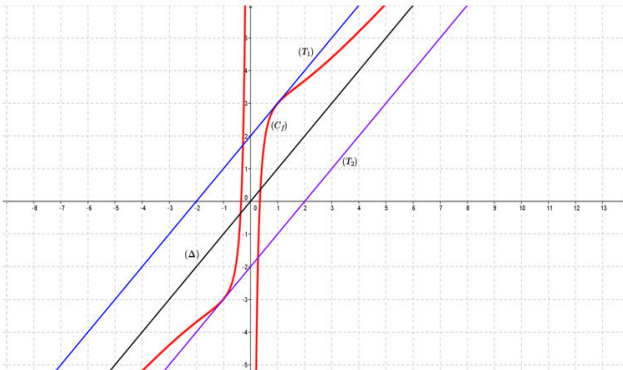
$$\text{لدينا : } \frac{x^2 - \ln(x^2)}{x^2} = 1 \text{ أي : } \frac{x^2 - \ln(x^2)}{x^2} - 1 = 0 \text{ أي تصبح : } -\frac{\ln(x^2)}{x} = 0 \text{ أي : } \begin{cases} -\ln(x^2) = 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases}$$

هذا يكافئ : $x^2 = 1$ أي : $x = 1$ أو $x = -1$ و منه فعلا المنحني (C_f) يقبل مماسين موازيين للمستقيم (Δ) .

(* كتابة معادلة المماس (T_1) عند $x_0 = 1$: $(T_1): y = f'(1)(x-1) + f(1)$ و منه : $(T_1): y = x + 2$.

(* كتابة معادلة المماس (T_2) عند $x_0 = -1$: $(T_2): y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ و منه : $(T_2): y = x - 2$.

ب) الإنشاء :



$$(5) \text{ لدينا : } h(x) = \left[\frac{\ln(x+1)^2}{x+1} + (x+1) + \frac{2}{x+1} \right] + 2$$

يكون : $h(x) = f(x+1) + 2$.

إذن : يوجد تحويل نقطي يحول المنحني (C_f) إلى (C_h) و هو الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

تصحيح التمرين الثالث:

$$g(x) = x^2 + 1 - \ln x \quad (I)$$

1) دراسة اتجاه تغير الدالة g : الدالة تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ حيث: $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$ نستنتج ان اشارة

$$g'(x) \text{ من نفس اشارة } 2x^2 - 1$$

دراسة اشارة $2x^2 - 1 = 0$ على $\mathbb{R}$:

$$2x^2 - 1 = 0 \text{ ومنه } x^2 = \frac{1}{2} \text{ ومنه } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ او } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

جدول اشارة $2x^2 - 1$:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$		
$2x^2-1$		+	0	-	0	+

جدول اشارة $g'(x)$:

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+

اذن نجد ان الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$ ومتزايدة تماما على $[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$.

جدول التغيرات:

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$		$g(\frac{\sqrt{2}}{2})$	

2) حساب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثم تبين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فان: $g(x) > 0$:

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + 1 - (\ln \sqrt{2} - \ln 2) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 + \ln 2 = \frac{3 + \ln 2}{2}$$

لدينا $\frac{3 + \ln 2}{2} > 0$ أي $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$ وبما ان $g(\frac{\sqrt{2}}{2})$ حسب جدول تغيرات الدالة g هي قيمة حدية صغرى اذن نستنتج انه من

اجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فان: $g(x) > 0$.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1 \quad (II)$$

1) حساب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

2) تبين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فان: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم تشكيل جدول التغيرات:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2} + 1 = \frac{1 - \ln x}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} \text{ حيث: }]0; +\infty[$$

نستنتج ان اشارة $f'(x)$ من نفس اشارة $g(x)$ وحسب ما سبق وجدنا انها من اجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فان: $g(x) > 0$

اذن من اجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فان: $f'(x) > 0$ والدالة f متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.

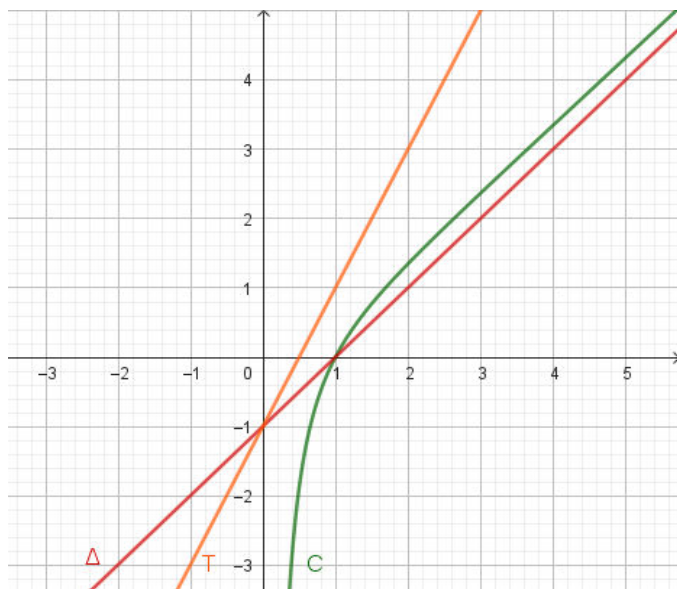
x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحني (C) في النقطة التي فاصلتها 1: $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ ومنه نجد $y = 2x - 2$
 4) تبين ان (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث $y = x - 1$ معادلة له ثم دراسة الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

اذن (Δ) مقارب مائل لـ (C) في جوار $+\infty$.

دراسة الوضع النسبي: ندرس اشارة الفرق $f(x) - y = \frac{\ln x}{x}$: نستنتج ان اشارة الفرق $f(x) - y$ من نفس اشارة $\ln x$ ونعم ان $\ln x = 0$ عند $x = 1$ و $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$ و $x < 1 \Rightarrow \ln x < 0$ أي ان (C) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 1 و (C) فوق (Δ) و $x > 1$ و (C) تحت (Δ) و $0 < x < 1$.
 5) رسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحني (C) :



6) m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم حيث $y = mx - m$ معادلة له .

أ) التحقق انه من اجل كل عدد حقيقي m فان النقطة $A(1; 0)$ تنتمي الى المستقيم (Δ_m) :

بتعويض احداثيي هذه النقطة في معادلة (Δ_m) نجد $0 = m(1) - m$ أي $0 = 0$ اذن فالمعادلة محققة مهما كانت قيمة الوسيط الحقيقي m ومنه فان النقطة $A(1; 0)$ تنتمي الى المستقيم (Δ_m) .

ب) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - m$:

عدد حلول هذه المعادلة هو عدد النقط المشتركة بين المستقيم الدوار (Δ_m) حول النقطة $A(1; 0)$ والمنحني (C) أي مناقشة دورانية وحسب الشكل نجد:

- $m \in]-\infty; 1]$ للمعادلة حل وحيد وهو 1 .
- $m \in]1; 2[$ للمعادلة حلين مختلفين .
- $m = 2$ للمعادلة حل وحيد وهو 1 .
- $m \in]2; +\infty[$ للمعادلة حلين مختلفين .

تصحيح التمرين الرابع:

$$g(x) = (x-1)e^{2x} - 1 \quad (I)$$

1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\text{النهايات: } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{2x} - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)e^{2x} - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x} - e^{2x} - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2}(2xe^{2x}) - e^{2x} - 1 \right] = -1$$

$$\text{لان } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2xe^{2x}) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (\alpha e^{\alpha}) = 0 \text{ حسب التزايد المقارن}$$

اتجاه التغير:

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $g'(x) = e^{2x} + (x-1)(2e^{2x}) = (1+2x-2)e^{2x} = (2x-1)e^{2x}$
بما انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ فان $e^{2x} > 0$ فان إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $2x-1$.
جدول إشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0 $+$

نستنتج ان الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0 $+$
$g(x)$	-1	$g(\frac{1}{2})$	$+\infty$

2) أ، تبين أن: المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث: $1,10 < \alpha < 1,11$:

الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ ولدينا $g(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e - 1$ وهو عدد سالب اذن من خلال جدول التغيرات نجد ان مجال الصور الذي يحتوي على 0 هو فقط المجال $[g(\frac{1}{2}); +\infty[$ وهو صورة المجال $[\frac{1}{2}; +\infty[$ والدالة رتيبة تماما عليه ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فانه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على مجموعة التعريف وبالضبط على المجال $[\frac{1}{2}; +\infty[$ وليكن α .
لدينا $g(1,10) \simeq -0,1$ ، $g(1,11) \simeq 0,01$ اي $g(1,10) \times g(1,11) < 0$ ومنه نستنتج ان $1,10 < \alpha < 1,11$.
ب) دراسة إشارة $g(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x : مما سبق نستنتج:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		$-$	0 $+$

$$f(x) = (2x-3)(e^{2x} - 2) \quad (II)$$

$$1) \text{ أ) حساب النهايات: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-3)(e^{2x} - 2) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-3)(e^{2x} - 2) = +\infty$$

ب) تبين أن: المستقيم (D) ذا معادلة $y = -4x + 6$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-3)(e^{2x} - 2) - (-4x + 6) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-3)e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} - 3e^{2x} = 0$$

$$\text{لان } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0 \text{ حسب التزايد المقارن اذن نستنتج ان } (D) \text{ مقارب لـ } (C) \text{ بجوار } -\infty.$$

ج) دراسة الوضع النسبي بين (C) و (D) : ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$: $f(x) - y = f(x) - (-4x + 6) = (2x-3)e^{2x}$

نستنتج ان إشارة الفرق $f(x) - y$ من نفس إشارة $2x-3$ ومنه $f(x) - y = 0$ تعني $x = \frac{3}{2}$ و $f(x) - y > 0$ تعني

$x > \frac{3}{2}$ و $f(x) - y < 0$ تعني $x < \frac{3}{2}$ وعليه نستنتج ان (C) يتقاطع مع (D) في النقطة ذات الفاصلة $x = \frac{3}{2}$ و (C)

فوق (D) في المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ و (C) تحت (D) في المجال $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

2) أ، تبين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 4g(x)$: الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'(x) = 2(e^{2x} - 2) + 2e^{2x}(2x - 3) = 2e^{2x} - 4 + 4xe^{2x} - 6e^{2x}$$

$$= e^{2x}(2 + 4x - 6) - 4 = 4[(x - 1)e^{2x} - 1] = 4g(x)$$

ب) الاستنتاج: وجدنا انه من اجل كل $x \in \mathbb{R}$ فان $f'(x) = 4g(x)$ ومنه نستنتج ان اشارة $f'(x)$ من نفس اشارة $g(x)$ اذن:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$

اي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$.
جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

ج) كتابة معادلة T مماس (C) في النقطة ذات الفاصلة 1: لدينا $f(1) = -e^2 + 2$ ، $f'(1) = -4$ اذن
 $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ ومنه نجد $y = -4x + 6 - e^2$ وهي معادلة المماس (T) .

3) تبين أن: $f(\alpha) = -\frac{(2\alpha - 3)^2}{\alpha - 1}$ ، ثم استنتاج حصر $f(\alpha)$:

لدينا $g(\alpha) = 0$ اي $(\alpha - 1)e^{2\alpha} = 1$ ومنه $e^{2\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$ (1)

ولدينا $f(\alpha) = (2\alpha - 3)(e^{2\alpha} - 2)$ (2)

بتعويض (1) في (2) نجد $f(\alpha) = (2\alpha - 3)\left(\frac{1}{\alpha - 1} - 2\right) = (2\alpha - 3)\left(\frac{3 - 2\alpha}{\alpha - 1}\right) = -\frac{(2\alpha - 3)^2}{\alpha - 1}$

الحصر: لدينا $1,10 < \alpha < 1,11$ ومنه $0,10 < \alpha - 1 < 0,11$ ومنه $\frac{1}{0,11} < \frac{1}{\alpha - 1} < \frac{1}{0,10}$ (1)

ايضاً لنا $1,10 < \alpha < 1,11$ ومنه $2 \times 1,10 - 3 < 2\alpha - 3 < 2 \times 1,11 - 3$ ومنه $-0,78 < 2\alpha - 3 < -0,8$ ومنه

$0,64 < (2\alpha - 3)^2 < 0,61$ (2)

من (1) و (2) وبالضرب نجد $\frac{0,61}{0,11} < \frac{(2\alpha - 3)^2}{\alpha - 1} < \frac{0,64}{0,10}$ ومنه $-\frac{0,64}{0,10} < -\frac{(2\alpha - 3)^2}{\alpha - 1} < -\frac{0,61}{0,11}$ ومنه

$$-6,4 < f(\alpha) < -5,5$$

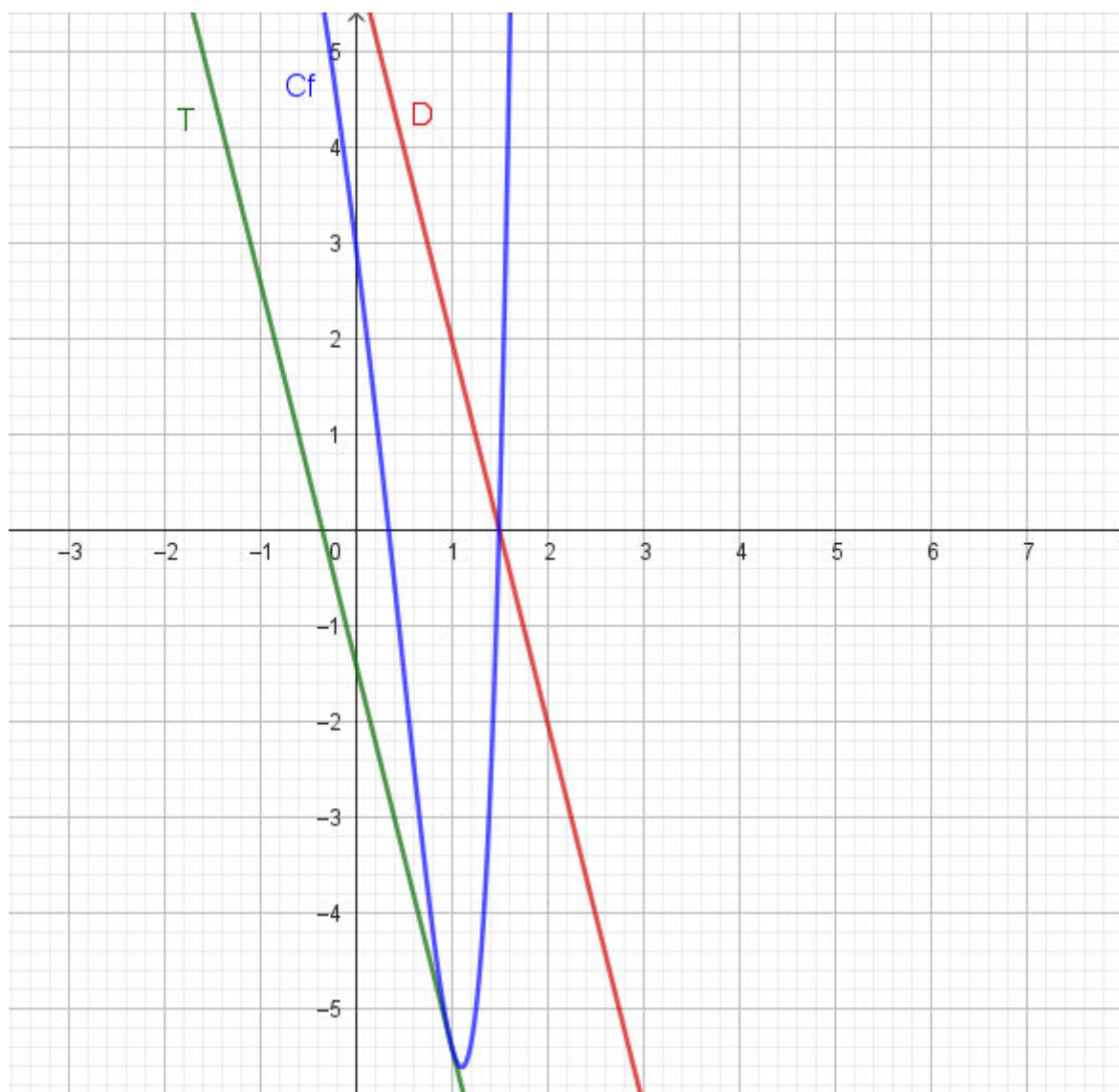
4) أ، تعيين احداثيات نقط تقاطع (C) مع كل من حامي محوري الاحداثيات:

- مع (yy') : نحسب $f(0)$: لدينا $f(0) = (2 \times 0 - 3)(e^{2 \times 0} - 2) = 3$ ومنه $f(0) = 3$ و $(C) \cap (yy') = \{B(0;3)\}$

- مع (xx') : نحل المعادلة $f(x) = 0$: لدينا $f(x) = 0$ معناه $(2x - 3)(e^{2x} - 2) = 0$ ومنه $2x - 3 = 0$ اي $x = \frac{3}{2}$ او

$$(C) \cap (xx') = \left\{ C\left(\frac{3}{2}; 0\right), D\left(\frac{1}{2} \ln 2; 0\right) \right\} \text{ اذن } x = \frac{1}{2} \ln 2 \text{ اي } e^{2x} - 2 = 0$$

ب) انشاء (D) و (T) ثم (C) :



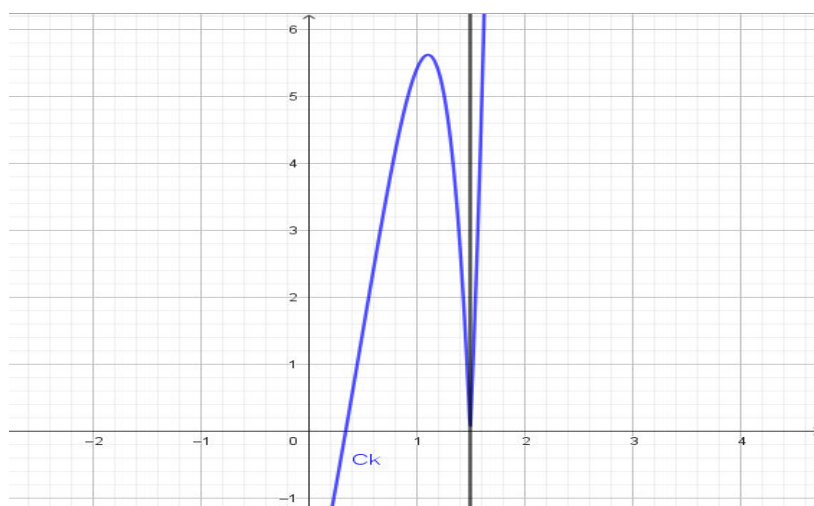
5, $k(x) = |2x - 3|(e^{2x} - 2)$ و (Γ) تمثيلها البياني:

شرح كيفية تمثيل (Γ) انطلاقاً من (C) ، ثم تمثيله:

$$k(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \geq \frac{3}{2} \\ -f(x) & ; x < \frac{3}{2} \end{cases} \text{ ومنه } k(x) = |2x - 3|(e^{2x} - 2) = \begin{cases} (2x - 3)(e^{2x} - 2) & ; 2x - 3 \geq 0 \\ -(2x - 3)(e^{2x} - 2) & ; 2x - 3 < 0 \end{cases} \text{ لدينا}$$

اذن نستخلص انه لتمثيل (Γ) نحتفظ بجزء (C) في المجال $[\frac{3}{2}; +\infty[$ وعلى المجال $]-\infty; \frac{3}{2}]$ ننشئ نظير (C) بالنسبة لحامل محور الفواصل.

رسم (Γ) :



6) الدالة h معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(x^2)$

درس اتجاه تغير الدالة h على $\mathbb{R}$. ثم تشكيل جدول تغيراتها :

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه $h'(x) = 2xf'(x^2)$

نستنتج ان إشارة $h'(x)$ من نفس إشارة الجداء $xf'(x^2)$

اولا دراسة إشارة $f'(x^2)$: مما سبق لنا إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f'(x)		-	0 +

اذن باستعمال الجدول نجد : $f'(x^2) = 0$ تعني $x^2 = \alpha$ ومنه $x = \sqrt{\alpha}$ او $x = -\sqrt{\alpha}$ (لان $\alpha > 0$)

$f'(x^2) > 0$ تعني $x^2 > \alpha$ ومنه $\sqrt{x^2} > \sqrt{\alpha}$ ومنه $|x| > \sqrt{\alpha}$ ومنه $x > \sqrt{\alpha}$ او $x < -\sqrt{\alpha}$ أي $x < -\sqrt{\alpha}$

$f'(x^2) < 0$ تعني $x^2 < \alpha$ ومنه $\sqrt{x^2} < \sqrt{\alpha}$ ومنه $|x| < \sqrt{\alpha}$ ومنه $0 \leq x < \sqrt{\alpha}$ او $-x < \sqrt{\alpha}$ أي $-x < \sqrt{\alpha}$ $0 \geq x > -\sqrt{\alpha}$

بعبارة اخرى $f'(x^2) < 0$ تعني $-\sqrt{\alpha} \leq x < \sqrt{\alpha}$

جدول إشارة $h'(x)$:

x	$-\infty$	$-\sqrt{\alpha}$	0	$\sqrt{\alpha}$	$+\infty$			
x		−	−	0	+	+		
f'(x ²)		+	0	−	−	0	+	
h'(x)		−	0	+	0	−	0	+

نستنتج ان الدالة h متناقصة تماما على كل من المجالين $[0; \sqrt{\alpha}]$ و $]-\infty; -\sqrt{\alpha}]$ ومتزايدة تماما على كل من المجالين

$[\sqrt{\alpha}; +\infty[$ و $[-\sqrt{\alpha}; 0]$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$-\sqrt{\alpha}$	0	$\sqrt{\alpha}$	$+\infty$				
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

الأستاذ جمال بورنان