

سلسلة الخباش في الرياضيات

2AS
ثانوي
جذع مشترك علوم

المرجح في المستوي

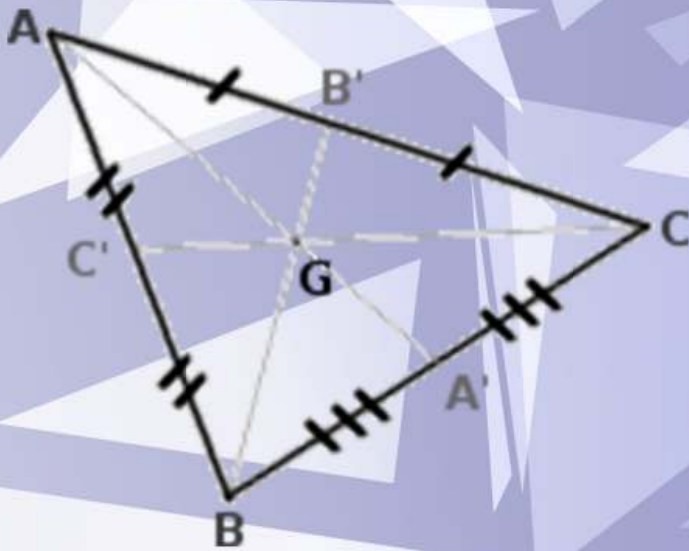
BAC 2025

تتضمن هذه السلسلة **ملخص الدرس**
و **سلسلة التمارين لكل من**

تذكير بالحساب الشعاعي

مرجح نقطتين

مرجح ثلاث نقط



جمع و إعداد الأستاذ :
أمين كروتش

تذكير بالأشعة في المستوي

الإرتباط الخطي و التوازي

القول عن شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنهما مرتبطان خطيا. معناه أنه يوجد عدد حقيقي k بحيث: $\vec{v} = k\vec{u}$.

القول عن مستقيمان (AB) و (CD) أنهما متوازيان. معناه أنه يوجد عدد حقيقي k بحيث: $\vec{AB} = k\vec{CD}$.

القول عن النقط A, B, C في استقامة واحدة. معناه أنه يوجد عدد حقيقي k بحيث: $\vec{AB} = k\vec{AC}$.

علاقة شال :

A و B نقطتان من المستوي

من أجل كل نقطة M من المستوي فإن :

$$\vec{AM} + \vec{MB} = \vec{AB}$$

$A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$ نقطتان من المستوي المنسوب الى معلم

متعامد و متجانس $(\vec{i}; \vec{j})$.

مركبتا الشعاع $\vec{AB}$ $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

طول الشعاع $\vec{AB}$ $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

إحداثيتي النقطة I منتصف القطعة $[AB]$

$$I \left(x_I = \frac{x_A + x_B}{2}; y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

شعاعان من المستوي، $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $xy' - x'y = 0$

02. المرجح في المستوي

01. مرجح نقطتين

تعريف

لتكن A و B نقطتين متميزتين وليكن α و β عددين حقيقيين حيث: $\alpha + \beta \neq 0$.

نسمي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب

النقطة G حيث: $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$

الثنائية $(A; \alpha)$ تسمى نقطة مثقلة

الجملة $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$ تسمى جملة نقطتين مثقتين

إذا كان $\alpha = \beta$ نحصل على $\vec{GA} = -\vec{GB}$ والنقطة G منتصف $[AB]$ النقطة G وحيدة

G مرجح الجملة $\{(A; \lambda\alpha); (B; \lambda\beta)\}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$

النقط A, B و G على استقامة واحدة

من أجل كل نقطة M من المستوي: $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} = (\alpha + \beta)\vec{MG}$

إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فإن الجملة $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$ لا تقبل مرجحا

إنشاء مرجح نقطتين:

لإنشاء G نعتمد العلاقة: $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\vec{AB}$

ملاحظة هامة:

إذا كان α و β من نفس الإشارة فإن G تكون من القطعة $[AB]$.

إذا كان α و β مختلفين في الإشارة فإن G تكون خارج القطعة $[AB]$.

إحداثيتي مرجح نقطتين

G مرجح النقطتين $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$ المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب و $G(x_G; y_G)$ لدينا:

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \text{ و } x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}$$

ملاحظة هامة:

من أجل كل ثلاث نقط متميزة A, B, C على استقامة واحدة من المستوي. فإن كل نقطة منها تمثل حتما مرجحا لنقطتين الأخرتين



02. مرجح ثلاث نقط

تعريف

A, B, C ثلاث نقط متميزة و α, β, γ أعداد حقيقية

حيث $(\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$ نسمي G مرجح النقط A, B, C المرفقة

بالمعاملات α, β, γ على الترتيب حيث $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} = \vec{0}$

إذا كان $\alpha + \beta + \gamma = 0$ فإن المرجح غير موجود

إذا كان $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$ فإن G تسمى مركز المسافات المتساوية

إذا كان $\alpha = \beta = \gamma = 1$ والنقط A, B, C ليست على استقامة

فإن G مركز ثقل المثلث ABC

النقطة G وحيدة

G مرجح الجملة $\{(A; \lambda\alpha); (B; \lambda\beta); (C; \lambda\gamma)\}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$

من أجل كل نقطة M من المستوي:

$$\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\vec{MG}$$

خاصية التجميع:

مبرهنة

G مرجح النقط A, B, C المرفقة بالمعاملات α, β, γ على الترتيب.

إذا كان $\alpha + \beta \neq 0$ وكانت النقطة I مرجح النقطتين A و B

المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب.

فإن النقطة G مرجح النقطتين I و C المرفقتين بالمعاملين $\alpha + \beta$ و γ

إنشاء مرجح ثلاث نقاط :

طريقة

لإنشاء مرجح ثلاث نقاط يمكن تعويض نقطتين من هذه النقط بمرجحهما بشرط أن نرفقه بمجموع معامليهما. وبالتالي إنشاء مرجح ثلاث نقط يؤول لإنشاء مرجح نقطتين.

$$\vec{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\vec{BA} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\vec{BC} \text{ و } \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\vec{AC}$$

إحداثيات مرجح ثلاث نقاط :

G مرجح النقط $A(x_A; y_A)$ ، $B(x_B; y_B)$ و $C(x_C; y_C)$ المرفقة بالمعاملات α, β, γ على الترتيب و $G(x_G; y_G)$ لدينا:

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \text{ ، } x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

If Not
When?

العلاقة الشعاعية	المجموعة و عناصرها المميزة	الملاحظة
$\ \vec{AM}\ = \ \vec{BM}\ $	هي المستقيم المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.	A و B نقطتان معلومتان
$\ \vec{AM}\ = \alpha$	هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = \alpha$	A نقطة معلومة و $\alpha > 0$ عدد حقيقي موجب معلوم
$\ \vec{AM}\ = \ \vec{AB}\ $	هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = AB$	A و B نقطتان معلومتان
$\ \vec{AM}\ \leq \alpha$	هي القرص المغلق الذي مركزه A ونصف قطرها $r = \alpha$	A نقطة معلومة و $\alpha > 0$
$\ \vec{AM}\ < \alpha$	هي القرص المفتوح (ماعدًا الحافة) الذي مركزه A ونصف قطرها $r = \alpha$	A نقطة معلومة و $\alpha > 0$
$\vec{AM} = k\vec{AB}$ و k ينسحب $\mathbb{R}$	هي المستقيم الذي يشمل A و شعاع $\vec{AB}$ توجيهه	A و B نقطتان معلومتان
$\vec{AM} = k\vec{AB}$ و $k \in [0;1]$	قطعة المستقيم $[AB]$	A و B نقطتان معلومتان
$\vec{AM} \perp \vec{AB}$	هي المستقيم الذي يشمل A وعمودي على الشعاع $\vec{AB}$	A و B نقطتان معلومتان
$\vec{AM} \perp \vec{BM}$	هي دائرة مركزها A قطرها $[AB]$	A و B نقطتان معلومتان

النقطة G مرجح الجملة: $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$ والنقطة G' مرجح الجملة: $\{(A; \alpha'); (B; \beta')\}$ كل علاقة من الشكل $\|\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB}\| = \|\alpha' \vec{MA} + \beta' \vec{MB}\|$ حيث: $|\alpha + \beta| = |\alpha' + \beta'| \neq 0$ ، هي محور القطعة $[GG']$ كل علاقة من الشكل: $\|\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB}\| = \|\lambda \vec{MA} - \lambda \vec{MB}\|$ حيث: $\alpha + \beta \neq 0$ و $\lambda \neq 0$ هي: دائرة مركزها G ونصف قطرها r حيث: $r = \frac{|\lambda|}{|\alpha + \beta|} \times AB$ كل علاقة من الشكل: $\|\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB}\| = k$ حيث k عدد حقيقي موجب تمامًا و $\alpha + \beta \neq 0$ هي: دائرة مركزها G ونصف قطرها r حيث: $r = \frac{k}{|\alpha + \beta|}$

You Can Do It
KEEP TRYING



A, B, C ثلاث نقط من المستوى ليست على استقامة واحدة.

- 1 أنشئ النقطة K مرجح الجملة $\{(B, 3); (C, -1)\}$
- 2 أنشئ النقطة G مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, 3); (C, -1)\}$
- 3 في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نعتبر النقط $C(2; 5), B(3; 2), A(2; 1)$
- تحقق من أن النقط $A; B; C$ ليست على استقامة واحدة
- عين إحداشي النقطتين K و G
- عين إحداشي النقطة H مركز ثقل المثلث ABC

ليكن ABC مثلث حيث $AB = 8; BC = 4; AC = 6$

- 1 أنشئ النقطة I مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1); (B, 4)\}$
- 2 أنشئ النقطة J مرجح الجملة $\{(B, 2); (C, -1)\}$
- 3 نرمز ب G لمرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1); (B, 4); (C, -2)\}$
- بين أن النقطة G هي تقاطع المستقيمين (CI) و (AJ) ثم أنشئها
- 4 عين ثم أنشئ المجموعة (E) مجموعة النقط M من المستوى بحيث: $\|\vec{MA} + 4\vec{MB}\| = 5\|\vec{2MB} - \vec{MC}\|$
- 5 عين ثم أنشئ المجموعة (F) مجموعة النقط M من المستوى بحيث: $\|\vec{MA} + 4\vec{MB} - 2\vec{MC}\| = 4\|\vec{MA} - \vec{MC}\|$
- 6 نفرض أن المستوى المنسوب الى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ولتكن النقط: $D(2, 4); P(2, 1); L(6, 0); N(2, 0)$
- عين إحداشيات H مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 4); (C, -2)\}$
- عين عددين حقيقيين α, β بحيث تكون النقطة P مرجح للجملة $\{(D, \alpha); (N, \beta)\}$

ABC مثلث من المستوى، لتكن النقط A', B', C' المعرفة كما يلي:

$$3\vec{BA'} = \vec{BC} \text{ العلاقة } A'$$

$$2\vec{B'A} - 3\vec{B'C} = \vec{0} \text{ العلاقة } B'$$

$$\{(A, 2); (B, -3)\} \text{ مرجح الجملة } C'$$

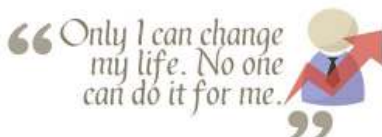
- 1 أنشئ شكلا مناسبا
- 2 أثبت أن A' و B' هي مرجح لنقطتين من النقط A, B و C بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما
- 3 لتكن G مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, -6); (C, -3)\}$
- اثبت أن المستقيمت $(AA'), (BB'), (CC')$ تتلاقى في نقطة النقطة G

في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ،

نعتبر النقط $A(0; 1), B(0; 5), C(2; 1)$

ولتكن G_m مرجح الجملة $\{(A, -m^2 + 4); (B, m^2 - 2m); (C, 2m)\}$

- 1 عين قيم m التي من أجلها يكون G_m موجودة ووحيدة
- 2 عين إحداشي النقطة G_m بدلالة m
- 3 ما هو المحل الهندسي للنقط G_m لما m ينتمي إلى $\mathbb{R}$



سلسلة التمارين - المرجح -

$[AB]$ قطعة مستقيمة حيث $AB = 5cm$ ، أنشئ مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ في الحالتين التاليتين:

- 1 $\alpha = 3$ و $\beta = -2$
- 2 $\alpha = 3009$ و $\beta = 2006$

A و B نقطتان متمازيتان من المستوى، أنشئ G مرجح الجمل المثقلة

- 1 $\{(A, 4); (B, 5)\}$
- 2 $\{(A, -2); (B, 3)\}$
- 3 $\{(A, -3); (B, -1)\}$

إذا كانت النقطة G مرجح الجملة $\{(A, -5); (B, 7)\}$

- 1 برهن أن A مرجح للجملة $\{(B, -7); (G, 2)\}$
- 2 برهن أن B مرجح للجملة $\{(A, 5); (G, 2)\}$

A و B نقطتان متمازيتان من المستوى، و G نقطة، جد عددين حقيقيين α و β بحيث تكون G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ في كل حالة مما يلي:

- 1 $3\vec{GB} - 2\vec{AB} = \vec{0}$
- 2 $-2\vec{AB} + 3\vec{GA} - 5\vec{GB} = \vec{0}$
- 3 $2\vec{AB} = \frac{2}{3}\vec{GB}$
- 4 نظيرة G بالنسبة إلى A

A و B نقطتان من المستوى حيث $AB = 8cm$

- 1 عين ثم أنشئ النقطة G مرجح الجملة $\{(A, 5); (B, 3)\}$
- 2 عين مجموعة النقط M من المستوى في كل حال مما يلي:

$$\|5\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\| \quad \rightarrow \quad \|5\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = 4$$

A, B و C ثلاث نقط ليست على استقامة

• باستعمال خاصية التجميع للمرجح، أنشئ مرجح الجمليتين التاليتين:

- 1 G مرجح الجملة $\{(A, -1); (B, 1); (C, 2)\}$
- 2 G' مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, 2); (C, -2)\}$

مثل في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

النقط $A(-1; 1), B(-1; 5), C(6; 5), D(\frac{5}{2}; 3)$

1 مانوع المثلث ABC ؟ علل.

2 عين إحداشي النقطة H مركز المسافتين المتساويتين للنقطتين B و A

3 عين إحداشي النقطة G مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$

4 هل يوجد عدد حقيقي α بحيث تكون النقطة D مرجح الجملة

$$\{(A, 1); (C, \alpha)\}$$

ماهي المجموعة (E) للنقط M من المستوى التي تحقق:

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 3 \text{ هل } A \text{ تنتمي إلى } (E) \text{ ؟ علل.}$$

حلل سلسلة المربح

التصريح 501

② و صرح البجلة المشكلة $\{(A;3);(B;-2)\}$

لدينا $2-3 \neq 0$ أي $2-3 = -1$

و منه توجد نقطة وحيدة و حيث

$$3\vec{GA} - 2\vec{GB} = \vec{0}$$

و منه (بإسعال علاقة شال)

$$3\vec{GA} - 2(\vec{GA} + \vec{AB}) = \vec{0}$$

$$3\vec{GA} - 2\vec{GA} - 2\vec{AB} = \vec{0}$$

$$\vec{GA} = 2\vec{AB}$$

$$-\vec{AG} = 2\vec{AB}$$

$$\vec{AG} = -2\vec{AB}$$



ملاحظة : لأشكال غير حقيقية

③ و صرح البجلة المشكلة $\{(A;3009);(B;2006)\}$

لدينا $3009 + 2006 \neq 0$

توجد نقطة وحيدة و حيث

$$3009\vec{GA} + 2006\vec{GB} = \vec{0}$$

$$\frac{3009}{1003}\vec{GA} + \frac{2006}{1003}\vec{GB} = \vec{0}$$

$$3\vec{GA} + 2\vec{GB} = \vec{0}$$

بإسعال علاقة شال =

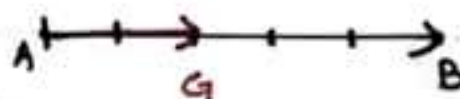
$$3\vec{GA} + 2(\vec{GA} + \vec{AB}) = \vec{0}$$

$$3\vec{GA} + 2\vec{GA} + 2\vec{AB} = \vec{0}$$

$$5\vec{GA} = -2\vec{AB}$$

$$-5\vec{AG} = -2\vec{AB}$$

$$\vec{AG} = \frac{2}{5}\vec{AB}$$



التصريح 802

① و صرح $\{(A;4);(B;5)\}$

لدينا $4+5 \neq 0$

و منه توجد نقطة وحيدة و حيث

$$4\vec{GA} + 5\vec{GB} = \vec{0}$$

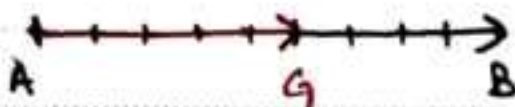
صيغة

و صرح البجلة $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ منه

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$$

$$\vec{AG} = \frac{5}{5+4}\vec{AB}$$

$$\vec{AG} = \frac{5}{9}\vec{AB}$$



تذكير

• إذا كانت α و β ضد نفس الإشارة فالفئة

و تنتمي للقطعة $[AB]$

• إذا كانت α و β مختلفان في الإشارة

ف و تقع خارج القطعة $[AB]$

④ و صرح $\{(A;-2);(B;3)\}$

لدينا $-2+3 \neq 0$ و منه

توجد نقطة وحيدة و حيث

$$-2\vec{GA} + 3\vec{GB} = \vec{0}$$

$$\vec{AG} = \frac{3}{-2+3}\vec{AB}$$

$$\vec{AG} = 3\vec{AB}$$



$$3\vec{GA} - 2\vec{AB} = \vec{0} \quad (2)$$

$$3\vec{GA} - 2(\vec{AG} + \vec{GB}) = \vec{0}$$

$$3\vec{GA} - 2\vec{AG} - 2\vec{GB} = \vec{0}$$

$$\vec{GA} + 2\vec{AG} = \vec{0}$$

مع $2+1 \neq 0$

وهنا $\{A; 2\}, \{B; 1\}$ مرجح البجلة

$$-2\vec{AB} + 3\vec{GA} - 5\vec{GB} = \vec{0} \quad (2)$$

$$-2(\vec{AG} + \vec{GB}) + 3\vec{GA} - 5\vec{GB} = \vec{0}$$

$$-2\vec{AG} - 2\vec{GB} + 3\vec{GA} - 5\vec{GB} = \vec{0}$$

$$2\vec{GA} - 7\vec{GB} + 3\vec{GA} = \vec{0}$$

$$5\vec{GA} - 7\vec{GB} = \vec{0}$$

مع $5-7 \neq 0$

وهنا $\{A; 5\}, \{B; -7\}$ مرجح البجلة

$$2\vec{AB} = \frac{2}{3}\vec{GB} \quad (3)$$

$$2\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{GB} = \vec{0}$$

$$2(\vec{AG} + \vec{GB}) - \frac{2}{3}\vec{GB} = \vec{0}$$

$$2\vec{AG} + 2\vec{GB} - \frac{2}{3}\vec{GB} = \vec{0}$$

$$-2\vec{GA} + \frac{6}{3}\vec{GB} - \frac{2}{3}\vec{GB} = \vec{0}$$

$$-2\vec{GA} + \frac{4}{3}\vec{GB} = \vec{0}$$

مع $-2 + \frac{4}{3} \neq 0$

وهنا $\{A; -2\}, \{B; \frac{4}{3}\}$ مرجح البجلة

(4) B نقطة و بالنسبة لـ A



معنا A منتصف [GB] أي

$$\vec{GB} = 2\vec{GA}$$

$$\vec{GB} - 2\vec{GA} = \vec{0}$$

وهنا مرجح البجلة $\{A; -2\}, \{B; 1\}$

(5) مرجح البجلة $\{A; -3\}, \{B; -1\}$

لدينا $-3-1 \neq 0$ و

توجد نقطة ديدة و حيث

$$-3\vec{GA} - \vec{GB} = \vec{0}$$

$$\vec{AG} = \frac{-1}{-3-1} \vec{AB}$$

$$\vec{AG} = \frac{1}{4} \vec{AB}$$



التصنيف ٥٣

(1) إثبات أن و مرجح $\{B; -7\}, \{A; 2\}$

و مرجح $\{A; -5\}, \{B; 7\}$ معناه

$$-5\vec{GA} + 7\vec{GB} = \vec{0}$$

باستخدام علاقة شال

$$-5\vec{GA} + 7(\vec{GA} + \vec{AB}) = \vec{0}$$

$$-5\vec{GA} + 7\vec{GA} + 7\vec{AB} = \vec{0}$$

$$2\vec{GA} + 7\vec{AB} = \vec{0}$$

$$-2\vec{AG} + 7\vec{AB} = \vec{0}$$

مع $-2+7 \neq 0$ و

A مرجح للبعلة لثقل $\{B; -7\}, \{A; 2\}$

(2) برهان أن B مرجح $\{A; 5\}, \{B; 4\}$

و مرجح $\{A; 5\}, \{B; 4\}$ معناه

$$-5\vec{GA} + 4\vec{GB} = \vec{0}$$

$$-5(\vec{GB} + \vec{BA}) + 4\vec{GB} = \vec{0}$$

$$-5\vec{GB} - 5\vec{BA} + 4\vec{GB} = \vec{0}$$

$$2\vec{GB} - 5\vec{BA} = \vec{0}$$

$$-2\vec{BG} - 5\vec{BA} = \vec{0}$$

بالضرب في (-1)

$$2\vec{BG} + 5\vec{BA} = \vec{0}$$

مع $2+5 \neq 0$

وهنا B مرجح للبعلة لثقل $\{A; 5\}, \{B; 4\}$

④ تصريف و صريح البعثة $\{ (A, 5); (B, 3) \}$

$$5+3 \neq 0$$

ومن ثم نجد نقطة واحدة و بحيث

$$5\vec{GA} + 3\vec{GB} = \vec{0}$$

$$\vec{AG} = \frac{3}{5+3} \vec{AB} \quad \text{أي}$$

$$\vec{AG} = \frac{3}{8} \vec{AB}$$



⑤ تبين مجموعة النقاط M

$$\|5\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = 4 \quad \text{①}$$

$$\|5\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = 4$$

و صريح $\{ (A, 5); (B, 3) \}$ ومنه

$$5\vec{MA} + 3\vec{MB} = (5+3)\vec{MG} \\ = 8\vec{MG}$$

$$\|8\vec{MG}\| = 4$$

$$8\|\vec{MG}\| = 4$$

$$\|\vec{MG}\| = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ومن

و منه مجموعة النقاط M هي دائرة

نصف قطرها $\frac{1}{2}$ ومركزها G .

$$\|5\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\| \quad \text{②}$$

و صريح البعثة $\{ (A, 5); (B, 3) \}$ ومنه

$$5\vec{MA} + 3\vec{MB} = (5+3)\vec{MG} \\ = 8\vec{MG}$$

$$\|8\vec{MG}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$$

$$8\|\vec{MG}\| = \|\vec{BA}\|$$

$$\|8\vec{MG}\| = \|\vec{BA}\|$$

$$8\|\vec{MG}\| = BA$$

$$8\|\vec{MG}\| = 8 \quad MG = \frac{8}{8} = 1$$

و منه مجموعة النقاط M هي دائرة مركزها

و نصف قطرها 1

التصريف 206

باستعمال خاصية تجميع للمرجح

① إنشاء و صريح البعثة $\{ (A, 1); (B, 4); (C, 2) \}$

جا أن $1+1+2 \neq 0$ ومنه و موجودة ووحيدة

نضع I صريح البعثة $\{ (B, 1); (C, 2) \}$

جا أن $1+2 \neq 0$ إذن I موجودة ووحيدة

و منه و صريح البعثة $\{ (A, -1); (B, 3) \}$

$$\vec{BI} = \frac{2}{1+2} \vec{BC} \quad \boxed{\vec{BI} = \frac{2}{3} \vec{BC}}$$

$$\vec{AG} = \frac{3}{-1+3} \vec{AI} \quad \boxed{\vec{AG} = \frac{3}{2} \vec{AI}}$$

② إنشاء و صريح البعثة $\{ (A, 2); (B, 2); (C, -2) \}$

جا أن $2+2-2 \neq 0$ فإن و موجودة ووحيدة

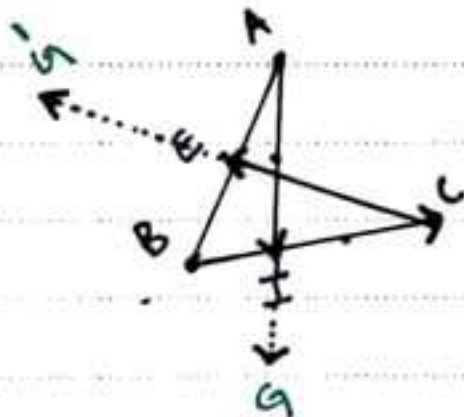
نضع E صريح البعثة $\{ (A, 2); (B, 2) \}$

جا أن $2+2 \neq 0$ فإن E موجودة ووحيدة

و منه و صريح البعثة $\{ (C, -2); (E, 4) \}$

$$\vec{AE} = \frac{2}{2+2} \vec{AB} \quad \vec{AC} = \frac{1}{2} \vec{AB}$$

$$\vec{CG} = \frac{4}{4-2} \vec{CE} \quad \vec{CG} = 2\vec{CE}$$



③ إحداثياتي و مرجح $\{(A;1); (B;1); (C;2)\}$

بما أن $1+1+2=4 \neq 0$ و منه

و موجود و ديدة .

$$G \left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \right)$$

$$G \left(\frac{1 \times (-1) + 1 \times (-1) + 2 \times 6}{1+1+2}; \frac{1 \times 1 + 1 \times 5 + 2 \times 5}{1+1+2} \right)$$

$$G \left(\frac{10}{4}, \frac{16}{4} \right) \quad \boxed{G \left(\frac{5}{2}; 4 \right)}$$

④ هل يوجد عدد حقيقي α بحيث D مرجح $\{(A;1); (C;\alpha)\}$

و $1+\alpha \neq 0$ و

$$x_0 = \frac{\beta x_A + \alpha x_C}{\alpha + \beta} \quad y_0 = \frac{\beta y_A + \alpha y_C}{\alpha + \beta}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{1 \times (-1) + \alpha \times 6}{\alpha + 1} \quad 3 = \frac{1 \times 1 + \alpha \times 5}{1 + \alpha}$$

$$5(\alpha + 1) = 2(6\alpha - 1) \quad 3(1 + \alpha) = 5\alpha + 1$$

$$5\alpha + 5 = 12\alpha - 2 \quad 3 + 3\alpha = 5\alpha + 1$$

$$4\alpha = 7 \quad 2\alpha = 2$$

$$\boxed{\alpha = 1} \quad \boxed{\alpha = 1}$$

و $1+1 \neq 0$

و منه D مرجح البتة $\{(A;1); (C;1)\}$

⑤ مجموعة النقط M :

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 3$$

$$\|(1+1+2)\vec{MG}\| = 3$$

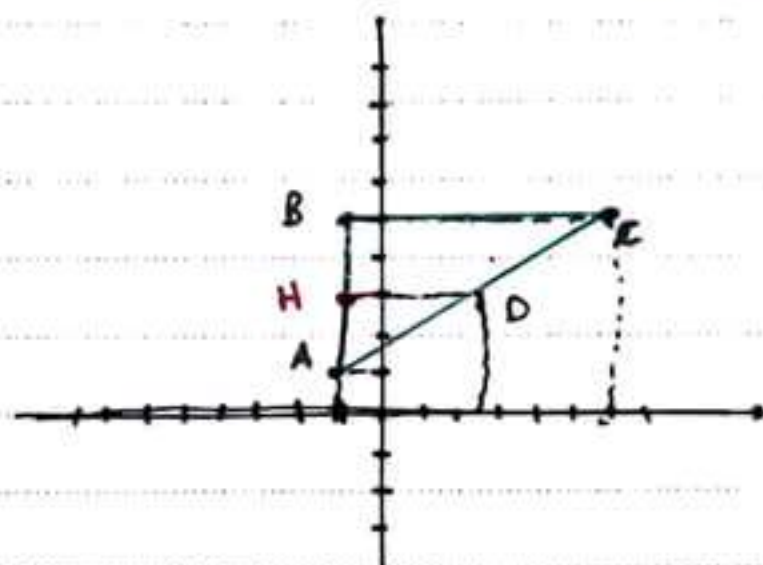
$$\|4\vec{MG}\| = 3$$

$$4\|\vec{MG}\| = 3$$

$$\|\vec{MG}\| = \frac{3}{4} \quad MG = \frac{3}{4}$$

و منه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها

و نصف قطرها $\frac{3}{4}$



② نوع المثلث ABC

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1 - (-1))^2 + (5 - 1)^2}$$

$$AB = \sqrt{16} = 4$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(6 - (-1))^2 + (5 - 1)^2}$$

$$= \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(6 - (-1))^2 + (5 - 5)^2}$$

$$= \sqrt{7^2 + 0^2} = \sqrt{49} = 7$$

لدينا

$$AC^2 = \sqrt{65}^2 = 65$$

$$AB^2 + BC^2 = 4^2 + 7^2 = 65$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

و منه

و حسب الخاصية العكسية لفيثاغورس

فالمثلث ABC قائم في B .

② إحصائي H مركز لمساوتين المتساويتين

A و B .

H مركز لمساوتين المتساويتين A و B .

معناه H مرجح للبتة $\{(A;1); (B;1)\}$

أي H منتصف القطعة $[AB]$.

$$H \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{-1 - 1}{2}; \frac{5 + 1}{2} \right)$$

$$H(-1; 3)$$

أي النقاط A, B, C ليست في استقامة واحدة.

• إحداثيات النقطة K و G =

$$K \left(\frac{\alpha x_B + \beta x_C}{\alpha + \beta} ; \frac{\alpha y_B + \beta y_C}{\alpha + \beta} \right)$$

$$K \left(\frac{3 \times 3 + 2 \times 1}{3+2} ; \frac{3 \times 2 + 2 \times 5}{3+2} \right)$$

$$K \left(\frac{9+2}{5} ; \frac{6+10}{5} \right)$$

$$K \left(\frac{11}{5} ; \frac{16}{5} \right)$$

← إحداثيات النقطة G يمكن حسابها بطريقتين

$$G \left(\frac{\alpha x_K + \beta x_A}{\alpha + \beta} ; \frac{\alpha y_K + \beta y_A}{\alpha + \beta} \right)$$

$$G \left(\frac{\alpha x_K + \beta x_A}{\alpha + \beta} ; \frac{\alpha y_K + \beta y_A}{\alpha + \beta} \right)$$

$$G \left(\frac{2 \times \frac{11}{5} + 2 \times 2}{2+2} ; \frac{2 \times \frac{16}{5} + 2 \times 1}{2+2} \right)$$

$$G \left(\frac{11}{5} ; \frac{16}{5} \right)$$

• إحداثيات النقطة H مركز ثقل المثلث ABC

H مركز ثقل المثلث ABC معناه

$$H \text{ هي مركز الثقل } \{ (A;1); (B;1); (C;1) \}$$

ومنه

$$H \left(\frac{1 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times 2}{3} ; \frac{1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 5}{3} \right)$$

$$H \left(\frac{7}{3} ; \frac{8}{3} \right)$$

① إنشاء النقطة K مبرج { (B;3); (C;-1) }

بما أن $3-1=2 \neq 0$. K موجودة وحيدة بحيث

$$3\vec{KB} - \vec{KC} = \vec{0}$$

$$\vec{BK} = \frac{-1}{3-1} \vec{BC}$$

$$\vec{BK} = -\frac{1}{2} \vec{BC}$$

② إنشاء G مبرج المثلث { (B;3); (C;-1); (A;2) }

بما أن $3-1+2 \neq 0$. G موجودة وحيدة .

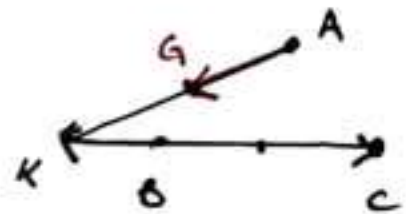
وبما أن K مبرج المثلث { (B;3); (C;-1) }

فإن G مبرج المثلث { (A;2); (K;2) }

$$2\vec{GA} + 2\vec{GK} = \vec{0}$$

$$\vec{AG} = \frac{2}{2+2} \vec{AK}$$

$$\vec{AG} = \frac{1}{2} \vec{AK}$$



③ التحقق من أن A, B, C ليست في استقامة

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2-5 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

يتحقق التحقق من الاستقامة
مربطين خطياً بـ ثبات أي النقاط A, B, C
لنحسب في استقامة .

$$1 \times 1 - 1 \times (-3) = 1 + 3 = 4 \neq 0$$

معناه $\vec{AB}$ و $\vec{BC}$ غير مرتبطين خطياً

حل التمرين رقم 09

ABC مثلث في المستوي حيث: $AB = 8; BC = 4; AC = 6$

1- إنشاء النقطة I مرشح الجملة المتقلة: $\{(A, 1); (B, 4)\}$ $\overrightarrow{AI} = \frac{4}{5} \overrightarrow{AB}$

2- إنشاء النقطة J مرشح الجملة المتقلة: $\{(B, 2); (C, -1)\}$ $\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{BC}$

3- G مرشح الجملة المتقلة $\{(A, 1); (B, 4); (C, -2)\}$

تبين أن G هي نقطة تقاطع المستقيمين (AI) و (CJ)

لدينا G مرشح الجملة المتقلة $\{(A, 1); (B, 4); (C, -2)\}$ وبالتالي $G \in (IC)$ ومنه $G \in (IC)$

لدينا J مرشح الجملة المتقلة: $\{(B, 2); (C, -1)\}$ وبالتالي J مرشح الجملة المتقلة: $\{(B, 4); (C, -2)\}$

ومنه G مرشح الجملة المتقلة $\{(A, 1); (J, 2)\}$ ومنه $G \in (AJ)$

إذن G هي نقطة تقاطع المستقيمين (AI) و (CJ)

4- نحين ثم إنشاء المجموعة E مجموعة النقاط M من المستوي حيث:

$$\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = 5\|\overrightarrow{2MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

$$\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = 5\|\overrightarrow{2MB} - \overrightarrow{MC}\| \Leftrightarrow 5\|\overrightarrow{MI}\| = 5\|\overrightarrow{MJ}\| \text{ ومنه } MI = MJ$$

وبالتالي: E هي محور التقاطعة المستقيمة $[IJ]$

5- نحين ثم إنشاء المجموعة F مجموعة النقاط M من المستوي حيث:

$$\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| = 4\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\|$$

$$\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| = 4\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\| \Leftrightarrow 3MG = 4CA \text{ ومنه } MG = \frac{4CA}{3} = 8$$

$$MG = \frac{4CA}{3} = 8$$

وبالتالي F هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 8

6- نفرض أن المستوي منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ وليكن النقط:

$$D(2, 4); P(2, 1); L(6, 0); N(2, 0)$$

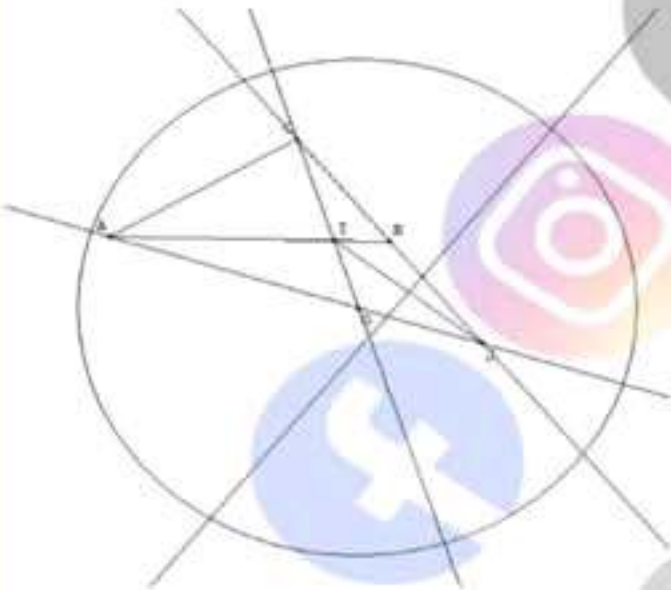
تعيين إحداثيات النقطة H مرشح الجملة $\{(D, 1); (P, 2); (L, 1)\}$ $H\left(3; \frac{3}{2}\right)$

تعيين عددين حقيقيين α و β بحيث تكون النقطة P مرشح الجملة $\{(D, \alpha); (N, \beta)\}$

P مرشح الجملة $\{(D, \alpha); (N, \beta)\}$

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta \neq 0 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} \frac{2\alpha + 2\beta}{\alpha + \beta} = 2 \\ \frac{4\alpha}{\alpha + \beta} = 1 \end{cases}$$

نأخذ مثلاً: $\beta = 3; \alpha = 1$



$$\rightarrow 3\vec{BA'} = \vec{BC} \quad \text{أي} \quad \boxed{\vec{BA'} = \frac{1}{3}\vec{BC}}$$

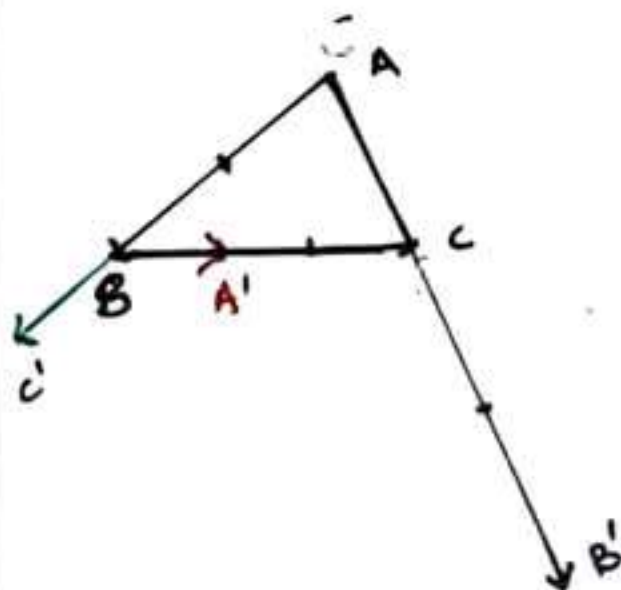
$$\rightarrow 2\vec{BA'} - 3\vec{BC} = \vec{0}$$

$$2\vec{BA'} - 3\vec{BA'} - 3\vec{AC'} = \vec{0}$$

$$-\vec{BA'} = 3\vec{AC'}$$

$$\boxed{\vec{AB'} = 3\vec{AC'}}$$

$$\rightarrow \vec{CA'} - 3\vec{CB} = \vec{0} \quad \boxed{\vec{AC'} = \frac{3}{2}\vec{AB}}$$



② إثبات أن B', A' مرجح لنقطة من

النقطة A, B, C

* لدينا $2\vec{BA'} - 3\vec{BC} = \vec{0}$ مع $(2-3 \neq 0)$

ومن B' مرجح البعثة $\{(A; 2)(C; -3)\}$

• لدينا $3\vec{BA'} = \vec{BC}$ أي $3\vec{BA'} - \vec{BC} = \vec{0}$

باستخدام علاقة شال

$$3\vec{BA'} - \vec{BA'} - \vec{AC'} = \vec{0}$$

$$2\vec{BA'} - \vec{AC'} = \vec{0}$$

$$-2\vec{A'B} - \vec{AC'} = \vec{0}$$

مع $-2-1 \neq 0$

$\{(B; -2)(C; -1)\}$

المرجح البعثة

③ إثبات أن G نقطة تقاطع $(AA'), (BB'), (CC')$

← لدينا B' مرجح البعثة $\{(A; 2)(C; -3)\}$

ومن G مرجح البعثة $\{(B; -6)(B'; -1)\}$

أي G تنتمي للمستقيم (BB')

← لدينا C' مرجح البعثة $\{(A; 1)(B; -3)\}$

ومن G مرجح البعثة $\{(A; 2)(B; -6)\}$

أي G مرجح البعثة $\{(C; -4)(C; -3)\}$

أي G تنتمي للمستقيم (CC')

← لدينا A' مرجح البعثة $\{(B; -2)(C; -1)\}$

أي A' مرجح البعثة $\{(B; -6)(C; -3)\}$

ومن G مرجح البعثة $\{(A; 2)(A'; -9)\}$

أي G تنتمي للمستقيم (AA')

بما أن $GE(AA') \cap GE(BB') \cap GE(CC') = G$

ف G نقطة تقاطع المستقيمات $(AA'), (BB'), (CC')$

التصريف 11

① تعيين قيم m حيث تكون G موجودة وحيطة

$$(-m^2+4) + m^2 - 2m + 2m \neq 0$$

$$4 \neq 0 \quad (\text{محققا})$$

ومن G موجودة وحيطة من أجل كل $m \in \mathbb{R}$

② معادلتان G بدلالة m

$$G_m: \frac{(-m^2+4) \times 0 + (m^2-2m) \times 0 + 2m \times 2}{-m^2+4 + m^2 - 2m + 2m} = \frac{4m}{4} = m$$

$$G_m = \frac{1(-m^2+4) + 5(m^2-2m) + 1(2m)}{-m^2+4 + m^2 - 2m + 2m}$$

$$= m^2 - 2m + 1$$

$$G_m(m; m^2 - 2m + 1)$$

③ المحل العددي للنقطة G لـ m ينتمي لـ $\mathbb{R}$

هو التمثيل البياني للدالة ذات المعادلة

$$y = x^2 - 2x + 1$$