



الخليل للمathematics

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة لوغارتمية

$\ln x$

④

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 24

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = (\ln x)^3 + 1$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) حل المعادلة $g(x) = 0$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = (\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ يكون:

$$f'(x) = 2 \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$$

(3) استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = (\ln x)^2 + 1$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) ادرس تغيرات الدالة h .

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

(3) ادرس الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h) .

(4) بين أن (C_h) يقبل A نقطة انعطاف يُطلب احداثيتها.

(5) اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_h) في النقطة A .

(6) احسب $f(e)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

(7) مثل بياناً في نفس المعلم كلا من (C_f) ، (C_h) و (T) .

(8) نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$e^m (\ln x)^3 + e^m (\ln x) - \ln x - 2e^m = 0 \dots (E)$$

- ناقش بياناً حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E)

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [(\ln x)^3 + 1] \\ &= -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\ln x)^3 + 1] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 3 \frac{1}{x} (\ln x)^2$$

لدينا: $g'(x) > 0$

و $g'(1) = 0$

ومنه

- جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2) حل المعادلة $g(x) = 0$:

لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Rightarrow (\ln x)^3 + 1 \\ &\Rightarrow (\ln x)^3 = -1 \\ &\Rightarrow \ln x = -1 \\ &\Rightarrow x = e^{-1} \end{aligned}$$

اذن حلول المعادلة $g(x) = 0$:

$$s = \{e^{-1}\}$$

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

(1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} \right] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} \right] = -\frac{2}{0^-} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} \right] = -\frac{2}{0^+} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} \right] = +\infty$$

- التفسير الهندسي:

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = 1$

(2) تبين أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ يكون: $f'(x) = 2 \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \frac{1}{x} \ln x - \left(\frac{-\frac{2}{x}}{(\ln x)^2} \right) \\ &= \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x(\ln x)^2} \\ &= 2 \left[\frac{(\ln x)^3 + 1}{x(\ln x)^2} \right] \\ &= \frac{2g(x)}{x(\ln x)^2} \end{aligned}$$

(3) استنتاج إشارة $f'(x)$:

لدينا: $x(\ln x)^2 > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	e^{-1}	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

(III)

1) دراسة تغيرات الدالة h :

- النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} [h(x)] &= \lim_{x \rightarrow 0} [(\ln x)^2 + 1] = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\ln x)^2 + 1] = +\infty \end{aligned}$$

- دراسة $h'(x)$:

$$h'(x) = \frac{2}{x} \ln x$$

لدينا $\frac{2}{x} > 0$ ومنه :

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

- جدول تغيرات الدالة h :

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$

2) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} - (\ln x)^2 - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{\ln x} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_h) و (C_f) متقاربان بجوار $+\infty$

3) دراسة الوضع النسبي بين المنحنيين (C_h) و (C_f) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - h(x)$:

$$f(x) - h(x) = \frac{2}{-\ln x}$$

لدينا:

$$-\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ومنه:

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - h(x)$	+		-

- الوضعية:

- (C_f) فوق (C_h) لما $x \in]0; 1[$.
- (C_f) تحت (C_h) لما $x \in]1; +\infty[$.

(4) تبين أن (C_h) يقبل A نقطة انعطاف:

لدينا:

$$\begin{aligned} h''(x) &= \frac{-2}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \times \frac{2}{x} \\ &= \frac{-2 \ln x + 2}{x^2} \\ &= \frac{2}{x^2} (1 - \ln x) \end{aligned}$$

لدينا $\frac{2}{x^2} > 0$ ومنه الإشارة من $(1 - \ln x)$:

$$1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1$$

$$\Rightarrow x = e$$

x	0	e	$+\infty$
$h''(x)$	+	0	-

لدينا $h''(x)$ انعدمت وغيّرت إشارتها ومنه المنحني (C_h) يقبل نقطة انعطاف احداثيها $A(e; 2)$

(5) كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_h) في النقطة A :

$$\begin{aligned} (T): y &= h'(e)(x - e) + h(e) \\ &= \frac{2}{e} \ln e (x - e) + (\ln e)^2 + 1 \\ &= \frac{2}{e} x \end{aligned}$$

(6) حساب $f(e)$:

$$f(e) = (\ln e)^2 + 1 - \frac{2}{\ln e} = 0$$

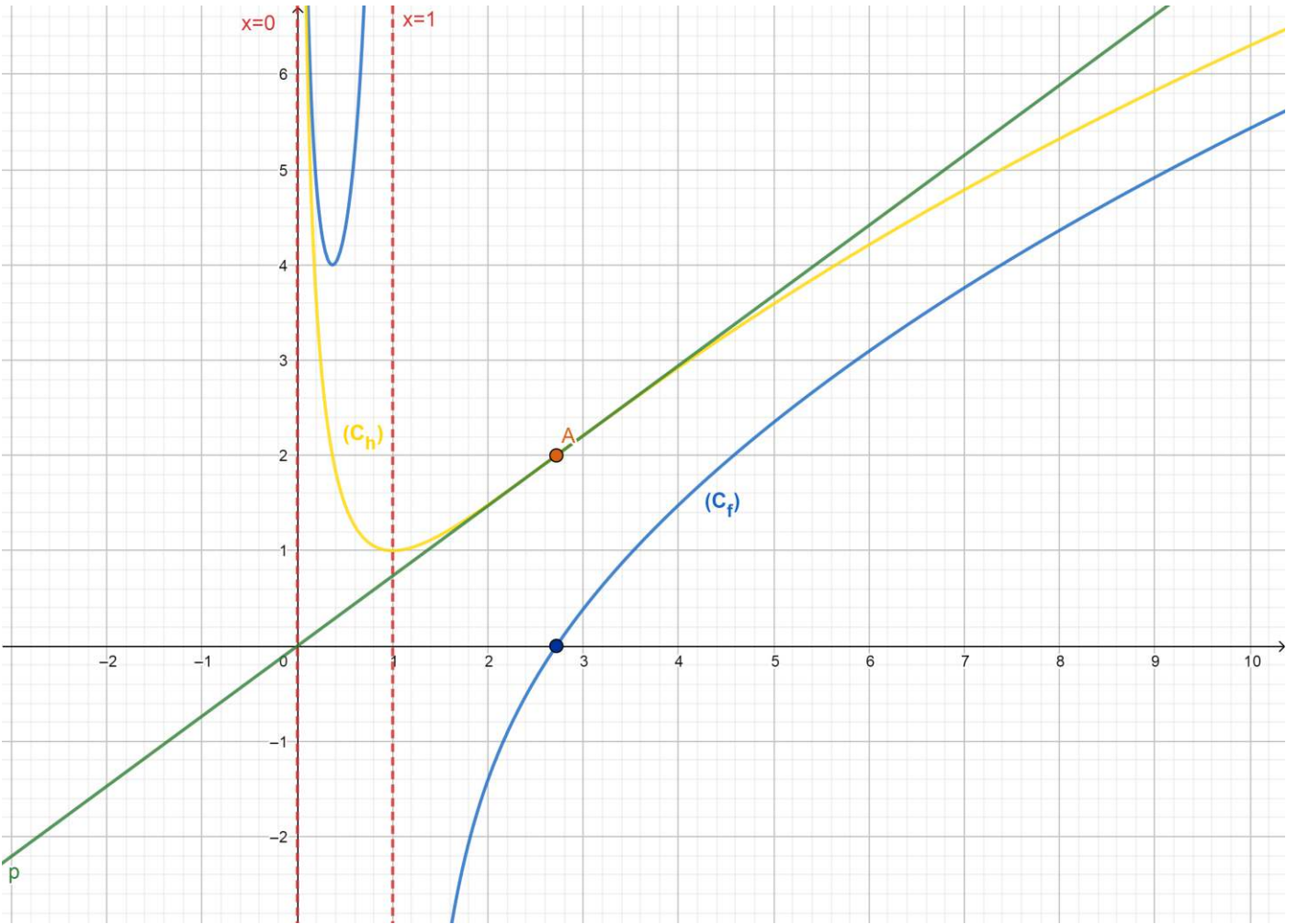
- الاستنتاج:

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة e .

(7) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=0$ و $x=1$
- نرسم المماس (T)
- نعين نقطة انعطاف المنحني (C_h)
- باستعمال جدول تغيرات الدالة h نرسم (C_h)
- نعين نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



(8) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned} e^m(\ln x)^3 + e^m \ln x - \ln x - 2e^m &= 0 \\ \Rightarrow e^m[(\ln x)^3 + \ln x - 2] &= \ln x \\ \Rightarrow e^m \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} \right] &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^m[f(x)] = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-m}$$

ومنه حلول المعادلة (E) هل فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = e^{-m}$ اذن:

لما $e^{-m} < 4$ أي $-m < \ln 4$ أي $m > -\ln 4$ المعادلة تقبل حل وحيد
لما $e^{-m} = 4$ أي $-m = \ln 4$ أي $m = -\ln 4$ المعادلة تقبل حلين احدهما مضاعف
لما $e^{-m} > 4$ أي $-m > \ln 4$ أي $m < -\ln 4$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶