

التمرين 02: ◀

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 3x + 16$$

① ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.② بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$$-2.5 < \alpha < -2$$

③ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.① بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

② ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

③ بين أن

$$f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$$

ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$ ④ بين أن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائلللمنحنى (C_f) .⑤ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .⑥ أوجد فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.⑦ مثل بيانيا (Δ) و (C_f) .⑧ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة

$$x^3 - mx^2 - 8 - m = 0$$

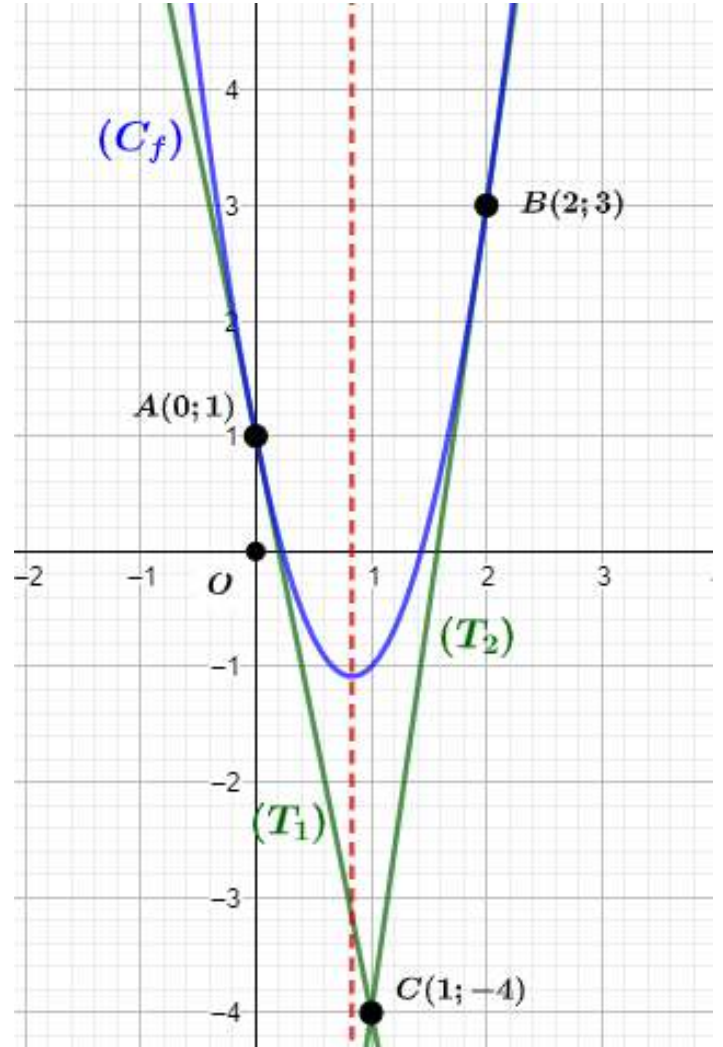
III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = \frac{|x|x^2 - 8}{x^2 + 1}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المستوى السابق① ادرس شفعية الدالة h ② اكتب h دون استعمال رمز القيمة المطلقة.③ بيّن كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) .

ثم أنشئه.

التمرين 01: ◀

I) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث: $f(x) = ax^2 + bx + c$ (C_f) تمثيلها البياني المعطى في الشكل المقابل:حيث: (C_f) يمر بالنقطتين $A(0; 1)$ و $B(2; 3)$ ، والمماسين (T_1) و (T_2) في النقطتين A و B يتقاطعان في النقطة $C(1; -4)$ ① اكتب معادلتى المماسين عند النقطتين A و B .② استنتج $f'(0)$ و $f'(2)$ ③ أوجد الأعداد الحقيقية a ، b و c .④ ادرس تغيرات الدالة f ⑤ أوجد المماسات لـ (C_f) التي تمس المبدأ O ⑥ بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{5}{6}$ محور تناظر لـ (C_f) .II) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = 3x^2 - 5|x| + 1$$

① بيّن أن h دالة زوجية② اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.③ وضع كيف يتم إنشاء (C_h) المنحنى الممثل للدالة h انطلاقامن (C_f) ، ثم أنشئه.

◀ التمرين 03:

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$$

① ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

② بين أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$$\alpha \in]2; 3[$$

③ استنتج إشارة $g(x)$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x - 1)^2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

① بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x - 1)^3}$$

② ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

③ بيّن أن

$$f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha - 1)^2}$$

ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$

④ عين a, b, c بحيث:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x - 1)^2}$$

⑤ بيّن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل (Δ)

⑥ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

⑦ عين معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0

⑧ مثل بيانيا كل من (Δ) ، (T) و (C_f) .

⑨ ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول

المعادلة:

$$x^3 - (3 + m)x^2 + (3 + 2m)x + 1 - m = 0$$

◀ التمرين 04:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = |x + 2| + \frac{1}{x + 1}$$

و (C_f) المنحنى الممثل لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

① اكتب عبارة الدالة f دون كتابة رمز القيمة المطلقة.

② ادرس قابلية الاشتقاق f عند 2،

ثم فسر هندسيا النتيجة.

③ احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f'(x)$

ثم فسر هندسيا النتيجة.

④ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

⑤ ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

① برهن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ_1)

و (Δ_2) ، يطلب تعيين معادلتيهما.

② ادرس الوضعية بين (C_f) و كلا من (Δ_1) و (Δ_2)

③ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال

$$]-2; -\infty[\text{ حيث: } -2.6 < \alpha < -2.7$$

④ مثل بيانيا كل من (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_f) .

◀ التمرين 05:

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 6x + 12$$

① ادرس اتجاه تغير الدالة g .

② بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث:

$$\alpha \in]-1.48; 1.47[$$

③ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

①

أ/ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x أن:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$$

ج/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

②

أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل

للمنحنى (C_f) .

ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

③ بين أن: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

④ مثل بيانيا المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •

① كتابة معادلتى المماسين عند النقطتين A و B :

• لدينا (T_1) يمر من النقطتين A و C

ومنه شعاع توجيه المستقيم (AC) هو شعاع توجيه $\perp (T_1)$:

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ -4-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

إذن معادلة (T_1) هي: $-5x + (-1)y + c = 0$

نعوض النقطة A في معادلة (T_1) نجد:

$$-5(0) - (1) + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

إذن: $(T_1): y = -5x + 1$ أي: $(T_1): -5x - y + 1 = 0$

• لدينا (T_2) يمر من النقطتين B و C

ومنه شعاع توجيه المستقيم (BC) هو شعاع توجيه $\perp (T_2)$:

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -4-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

إذن معادلة (T_2) هي: $-7x + (1)y + c = 0$

نعوض النقطة B في معادلة (T_2) نجد:

$$-7(2) + (3) + c = 0 \Rightarrow c = 11$$

إذن: $(T_2): y = 7x - 11$ أي: $(T_2): -7x + y + 11 = 0$

② استنتاج $f'(0)$ و $f'(2)$:

$$f'(0) = -5 \quad \text{و} \quad f'(2) = 7$$

③ إيجاد الأعداد الحقيقية a, b و c :

لدينا (C_f) يمر من النقطة A و B ، ولدينا سابقا $f'(0) = -5$

ومنه:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(2) = 3 \\ f'(0) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 1 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 3 \\ 2a(0) + b = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases}$$

إذن: $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

④ دراسة تغيرات الدالة f :

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

⑤ إيجاد المماسات $\perp (C_f)$ التي تمس المبدأ O :

لايجاد المماسات التي تمس (C_f) في النقطة $O(0; 0)$ نعوض

النقطة O في معادلة المماس العامة، ثم نحل المعادلة:

$$f'(x)(x_0 - x) + f(x) = y_0$$

$$\Rightarrow (6x - 5)(0 - x) + 3x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -6x^2 + 5x + 3x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow -3x^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \text{أو} \\ x = -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{أو} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

ومنه (C_f) يقبل مماسين في النقطتين ذات الفاصلتين $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ يمران بالمبدأ O . نسميهما (T_3) و (T_4)

- إيجاد معادلة $\perp (T_3)$:

$$(T_3): y = f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= 2\sqrt{3}x - 2 - 5x + \frac{5\sqrt{3}}{3} + 1 - \frac{5\sqrt{3}}{3} + 1 = (2\sqrt{3} - 5)x$$

- إيجاد معادلة $\perp (T_4)$:

$$(T_4): y = f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= -2\sqrt{3}x - 2 - 5x - \frac{5\sqrt{3}}{3} + 1 + \frac{5\sqrt{3}}{3} + 1 = -(2\sqrt{3} + 5)x$$

⑥ تبين أن المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{5}{6}$ محور تناظر $\perp (C_f)$:

• لدينا: $x \in D_f$ معناه: $x \in \mathbb{R}$ معناه $x \in \mathbb{R}$ معناه $\left(2\left(\frac{5}{6}\right) - x\right) \in \mathbb{R}$

• ولدينا:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{6} - x\right) &= 3\left(\frac{5}{6} - x\right)^2 - 5\left(\frac{5}{6} - x\right) + 1 \\ &= \frac{25}{3} - 10x + 3x^2 - \frac{25}{6} + 5x + 1 \\ &= 3x^2 - 5x + 1 = f(x) \end{aligned}$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{5}{6}$ محور تناظر $\perp (C_f)$

(II)

① تبين أن h دالة زوجية:

$$h(-x) = 3(-x)^2 - 5|-x| + 1 = 3x^2 - 5|x| + 1 = h(x)$$

$h(-x) = h(x)$ معناه أن الدالة h زوجية.

② كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$h(x) = 3x^2 - 5|x| + 1 = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 1 & ; x \geq 0 \\ 3(-x)^2 - 5(-x) + 1 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

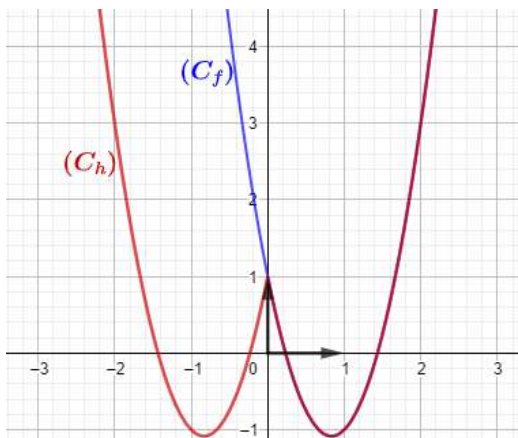
$$= \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ f(-x) & ; x \leq 0 \end{cases}$$

③ توضيح كيف يتم إنشاء (C_h) :

لما $x \geq 0$ (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور الترتيب.

- إنشاء (C_h) :



① دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$

ولدينا $g'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$

بما أن: $(x^2 + 1) > 0$ فإن $g'(x)$ موجبة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

② تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ولدينا: $g(-2) \times g(-2.5) < 0$

لأن: $g(-2) \approx 2$ و $g(-2.5) \approx -7.13$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل

حلا وحيدا α حيث: $-2.5 < \alpha < -2$

③ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

① تبين أن $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3-8)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 + 16x}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^3 + 3x + 16)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x \cdot g(x)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

② دراسة تغيرات الدالة f :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

ولدينا: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$

لدينا: $(x^2+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ كالتالي:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	+
x	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	+

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	-8	$+\infty$

③ تبين أن $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 + 3\alpha + 16 = 0 \Rightarrow \alpha^3 = -(3\alpha + 16)$$

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 + 3\alpha + 16 = 0 \quad \text{لدينا:}$$

$$\Rightarrow \alpha\alpha^2 + 3\alpha + 16 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{-(3\alpha + 16)}{\alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 8}{\alpha^2 + 1} = \frac{(-3\alpha - 16 - 8)}{\left(\frac{-(3\alpha + 16)}{\alpha} + 1\right)} \quad \text{ومنه:}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(-3\alpha - 24)}{\left(\frac{-3\alpha - 16 + \alpha}{\alpha}\right)} = \frac{(-3\alpha - 24)}{\left(\frac{-2\alpha - 16}{\alpha}\right)} \\ &= \frac{3\alpha(\alpha + 8)}{2(\alpha + 8)} = \frac{3}{2}\alpha \end{aligned}$$

- تعيين حصر $f(\alpha)$:

لدينا: $-2.5 < \alpha < -2$ ومنه: $-7.5 < 3\alpha < -6$

ومنه: $-3.75 < f(\alpha) < -3$ إذن: $-3.75 < \frac{3}{2}\alpha < -3$

④

أ/ تبين أن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - y_{(\Delta)}) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - 8}{x^2 + 1} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-8 - x}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0 \end{aligned}$$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 1} - x = \frac{-(x + 8)}{x^2 + 1}$$

لدينا: $(x^2 + 1) > 0$ ومنه: $-(x + 8) = 0 \Rightarrow x = -8$

الوضعية:

x	$-\infty$	-8	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	+	0	-

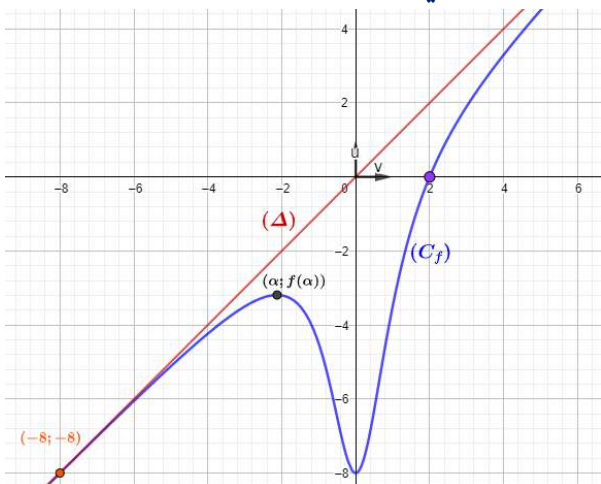
⑤

أ/ إيجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 8}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

إذن: $(C_f) \cap (xx') = \{2\}$

ب/ التمثيل البياني:



x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

① حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = +\infty \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2}{(0^+)^2} = +\infty \bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2}{(0^-)^2} = +\infty$$

② تبين أن: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 6x + 3)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3 - 3x^2 + 3x + 1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{3x^3 - 6x^2 + 3x - 3x^2 + 6x - 3 - 2x^3 + 6x^2 - 6x - 2}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 5}{(x-1)^3} = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

③ دراسة تغيرات الدالة f :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3} = \frac{g(x)}{(x-1)(x-1)^2}$$

لدينا: $(x-1)^2 \geq 0$ ، ومنه الإشارة من إشارة $g(x) \cdot (x-1)$

x	$-\infty$	1	α	$+\infty$
$x-1$	$-$		$+$	$+$
$g(x)$	$-$		0	$+$
$f'(x)$	$+$		$-$	$+$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$+$
$f(x)$	$-\infty \rightarrow +\infty$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

④ تبين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^3 = 3\alpha^2 - 3\alpha + 5$$

ومنه:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{(\alpha-1)^2}$$

$$= \frac{3\alpha^2 - 3\alpha + 5 - 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{(\alpha-1)^2} = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$$

- تعيين حصر $f(\alpha)$:لدينا: $1.5 < \alpha - 1 < 1.6$ ومنه: $2.5 < \alpha < 2.6$ ومنه: $(1.5)^2 < (\alpha-1)^2 < (1.6)^2$ ومنه: $\frac{1}{(1.6)^2} < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < \frac{1}{(1.5)^2}$ ومنه: $2.34 < f(\alpha) < 2.67$ ومنه: $\frac{6}{(1.6)^2} < \frac{6}{(\alpha-1)^2} < \frac{6}{(1.5)^2}$

⑤

/أ/ تعيين الأعداد الحقيقية a, b, c :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2} = \frac{(ax+b)(x^2-2x+1) + c}{(x-1)^2}$$

ج/ المناقشة البيانية:

$$x^3 - mx^2 - 8 - m = 0 \Rightarrow x^3 - 8 - m(x^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 8 = m(x^2 + 1) \Rightarrow \frac{x^3 - 8}{x^2 + 1} = m \Rightarrow f(x) = m$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيماتالأفقية ذات المعادلة $y_m = m$ وهي:لما $m < -8$ المعادلة تقبل حل سالبلما $m = -8$ المعادلة تقبل حلين: حل مضاعف معدوم $x = -8$ ، وحل سالبلما $-8 < m < -2$ المعادلة تقبل حل موجب وحلين سالبينلما $m = -2$ المعادلة تقبل حلين: حل موجب وحل

مضاعف سالب

لما $m > -2$ المعادلة تقبل حل وحيد موجب

(III)

① دراسة شفعية الدالة h :

$$h(-x) = \frac{|-x|(-x)^2 - 8}{(-x)^2 + 1} = \frac{|x|x^2 - 8}{x^2 + 1} = h(x)$$

ومنه الدالة h زوجية② كتابة h دون استعمال رمز القيمة المطلقة:

$$h(x) = \frac{|x|x^2 - 8}{x^2 + 1} = \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ f(-x) & ; x \leq 0 \end{cases}$$

③ استنتاج رسم (C_h) : (C_h) يطابق (C_f) لما $x > 0$ وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة إلى محور الترتيب.

◀ حل التمرين 03:

(I)

① دراسة تغيرات الدالة g :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

لدينا: $g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$ لدينا: $(x-1)^2 > 0$ ومنه: $g'(x) > 0$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

② تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تملك حلا وحيدا α :لدينا: $\bullet$ الدالة g مستمرة ومنتزعة تماما على $\mathbb{R}$

$$g(2) \times g(3) < 0 \bullet$$

لأن: $g(2) \approx -3$ و $g(3) \approx 4$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا③ استنتاج إشارة $g(x)$:

لما $m > f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين موجبين

◀ حل التمرين 04:

① كتابة عبارة الدالة f دون كتابة رمز القيمة المطلقة:

$$f(x) = |x + 2| + \frac{1}{x + 1}$$

$$= \begin{cases} x + 2 + \frac{1}{x + 1} & ; x \in [-2; -1[\cup]-1; +\infty[\\ -x - 2 + \frac{1}{x + 1} & ; x \in]-\infty; -2] \end{cases}$$

② دراسة قابلية الاشتقاق للدالة f عند (-2) :

لدينا: $f(-2) = -1$ ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-x - 2 + \frac{1}{x + 1} - (-1)}{x + 2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-x - 1 + \frac{1}{x + 1}}{x + 2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-x^2 - x - x - 1 + 1}{(x + 2)(x + 1)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-x^2 - 2x}{(x + 2)(x + 1)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-x(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-x}{x + 1} \right)$$

$$= \frac{2}{-1} = -2 \in \mathbb{R}$$

ومنه الدالة f تقبل الاشتقاق عند -2 من اليسار

ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-1)} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x + 2 + \frac{1}{x + 1} - (-1)}{x + 2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x + 3 + \frac{1}{x + 1} + 1}{x + 2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 + x + 3x + 3 + 1}{(x + 2)(x + 1)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 + 4x + 4}{(x + 2)(x + 1)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{(x + 2)(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x + 2}{x + 1} \right) = \frac{0}{-1} = 0 \in \mathbb{R}$$

ومنه الدالة f تقبل الاشتقاق عند -2 من اليمين

وبما أن $-2 \neq 0$ فإن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند -2

$$= \frac{ax^3 + (b - 2a)x^2 + (a - 2b)x + b + c}{(x - 1)^2}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

ب/ تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ ومنه: (C_f) يقبل

مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{2}{(x - 1)^2} \right] = 0$$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$ ومنه: (C_f) يقبل م م م بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = x - 1$

ج/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

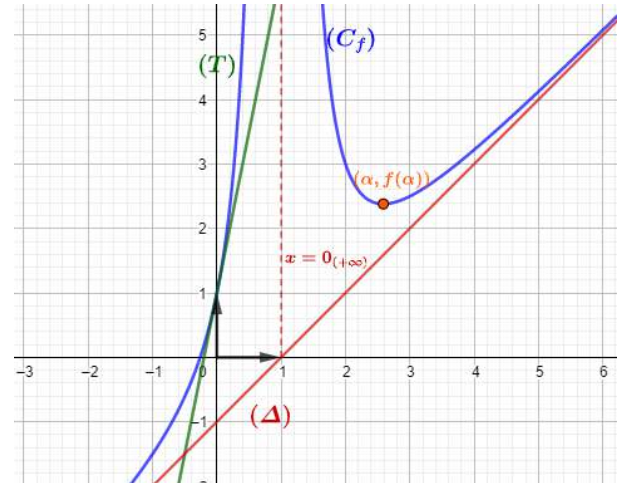
بما أن: $(x - 1)^2 > 0$ ، فإن: $(f(x) - y_{(\Delta)}) > 0$

ومنه: (C_f) يقع فوق (Δ) على D_f .

⑥ تعيين معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

$$y_{(T)} = f'(0)(x - 0) + f(0) = \frac{g(0)}{(-1)^3}x + f(0) = 5x + 1$$

⑦ التمثيل البياني:



⑧ المناقشة البينائية:

$$x^3 - (3 + m)x^2 + (3 + 2m)x + 1 - m = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 - mx^2 + 3x + 2mx + 1 + m = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = mx^2 - 2mx + m$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = m(x^2 - 2x + 1)$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = m(x - 1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x - 1)^2} = m$$

$$\Rightarrow f(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع

المستقيمات الأفقية ذات المعادلة: $y_m = m$ ، وهي:

لما $m < 1$ المعادلة تقبل حل سالب

لما $m = 1$ المعادلة تقبل حل معدوم

لما $1 < m < f(\alpha)$ المعادلة تقبل حل موجب

لما $m = f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين أحدهما مضاعف

موجب والآخر موجب

- التفسير الهندسي للنتيجة: (C_f) يقبل نصفين مماسين عند النقطة ذات الفاصلة -2 معامل توجيه كل منهما 0 و -2 على الترتيب

③

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$:

- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(x + 2 + \frac{1}{x+1} \right) = 1 + \frac{1}{0^+} = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(x + 2 + \frac{1}{x+1} \right) = 1 + \frac{1}{0^-} = -\infty$
- التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = -1$

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x+1} \right) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x - 2 + \frac{1}{x+1} \right) = +\infty$

④ دراسة تغيرات الدالة f :

- دراسة $f'(x)$:

- لما: $x \in [-2; -1[\cup]-1; +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 1 - 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ و $(x+2) \geq 0$ ومنه:

إذن: $f'(x) > 0$ لما: $x \in]0; +\infty[$

$f'(x) < 0$ لما: $x \in [-2; -1[\cup]-1; 0[$

• لما: $x \in]-\infty; -2]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x - 2 - 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x+1)^2} = \frac{-(x^2 + 2x + 3)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه:

لدينا: $\Delta = -8 < 0$ ومنه: $(x^2 + 2x + 3) > 0$

إذن: $f'(x) < 0$ لما: $x \in]-\infty; -2]$

- تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	3	$+\infty$

⑤

ب/ برهان أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين:

- لما: $x \in [-2; -1[\cup]-1; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x+1} \right] = 0$$

ومنه (C_f) يقبل م (Δ_1) بجوار $+\infty$ معادلته: $y = x + 2$

- لما: $x \in]-\infty; -2]$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x-2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x+1} \right] = 0$$

ومنه (C_f) يقبل م (Δ_2) بجوار $-\infty$ معادلته: $y = -x - 2$

ج/ دراسة الوضعية بين (C_f) و (Δ_1):

- لما: $x \in [-2; -1[\cup]-1; +\infty[$

$$f(x) - y_{(\Delta_1)} = \frac{1}{x+1}$$

لدينا: $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ومنه:

x	-2	-1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta_1)}$	-	+	+

- دراسة الوضعية بين (C_f) و (Δ_2):

- لما: $x \in]-\infty; -2]$

$$f(x) - y_{(\Delta_2)} = \frac{1}{x+1}$$

لدينا: $(x+1) < 0$ على المجال $]-\infty; -2]$

ومنه: $(f(x) - y_{(\Delta_2)}) < 0$ إذن: (C_f) تحت (Δ_1)

⑥ تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا: الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; -2]$

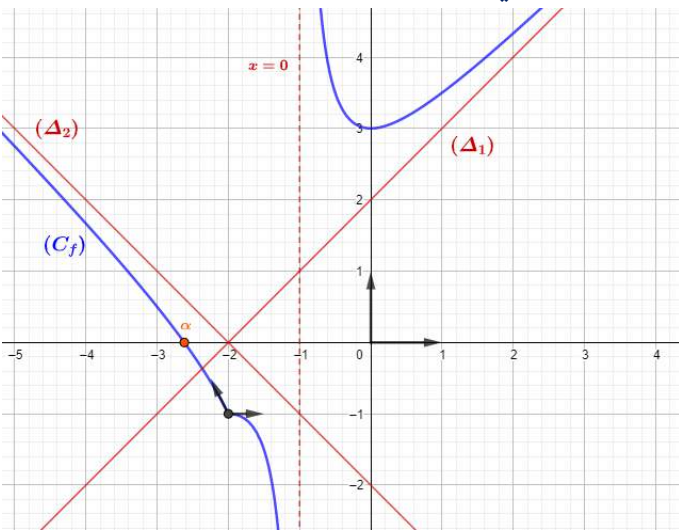
ولدينا: $f(-2.6) \times f(-2.7) < 0$

لأن $f(-2.6) \approx -0.02$ و $f(-2.7) \approx 0.11$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل

حلا وحيدا α حيث: $-2.7 < \alpha < -2.6$.

⑦ التمثيل البياني:



◀ حل التمرين 05:

(I)

① دراسة اتجاه تغير الدالة g :

لدينا $g'(x) = 3x^2 + 6$

$$-2x - 6 = 0 \Rightarrow -2x = 6 \Rightarrow x = -3$$

ومنه إشارة $y - f(x)$:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) على المجال: $]-\infty; -3[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-3; -3)$
- (C_f) تحت (Δ) على المجال: $]-3; +\infty[$

$$\textcircled{3} \text{ تبين أن: } f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$$

يكفي أن نبرهن أن $f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = 0$

$$\begin{aligned} f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha &= \frac{\alpha^3 - 6}{\alpha^2 + 2} - \frac{3}{2}\alpha \\ &= \frac{2\alpha^3 - 12 - 3\alpha^3 - 6\alpha}{\alpha^2 + 2} \\ &= \frac{-(\alpha^3 + 6\alpha + 12)}{\alpha^2 + 2} \\ &= -\frac{g(\alpha)}{\alpha^2 + 2} \end{aligned}$$

ولدينا من السؤال السابق: $g(\alpha) = 0$

ومنه:

$$f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = -\frac{0}{\alpha^2 + 2} = 0$$

$$\text{إذن: } f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$$

- حصر $f(\alpha)$:

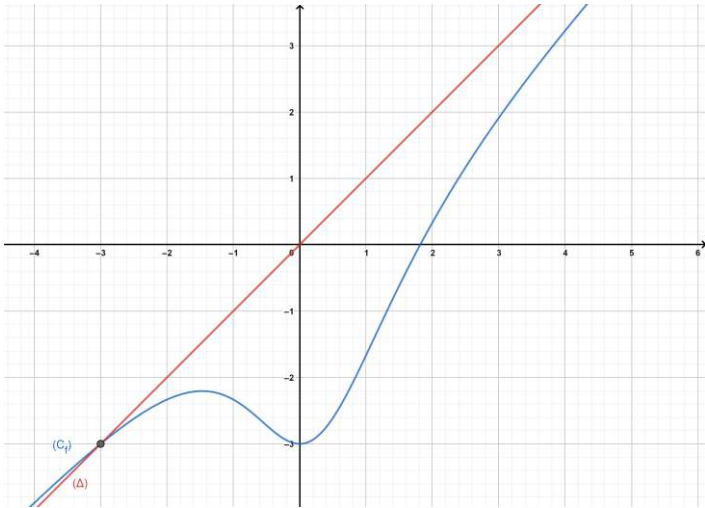
$$\text{لدينا: } -1.48 < \alpha < -1.47$$

$$\text{ولدينا: } f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(-1.48) &< \frac{3}{2}\alpha < \frac{3}{2}(-1.47) \\ -2.22 &< f(\alpha) < -2.21 \end{aligned}$$

$\textcircled{4}$ إنشاء المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) :



• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •

ولدينا $3x^2 + 6 > 0$, إذن: الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

$\textcircled{2}$ تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α :

بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$g(-1.47) = -0.12 \text{ و } g(-1.48) = 0.0035$$

$$\text{ولدينا } g(-1.48) \times g(-1.47) < 0$$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيد

- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

$\textcircled{1}$

/ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

ب/ حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2)(x^2 + 2) - (2x)(x^3 - 6)}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \frac{x(x^3 + 6x + 12)}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2} \end{aligned}$$

- جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
x	-		-	+
$g(x)$	-	0	+	+
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow f(\alpha)$	$\searrow -3$	$\nearrow +\infty$

$\textcircled{2}$

/ تبين أن المستقيم (Δ) مقارب مائل:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - 6 - x^3 - 2x}{x^2 + 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-6 - 2x}{x^2 + 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-2x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-2}{x} \right) = 0 \end{aligned}$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

ب/ دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$ على $\mathbb{R}$:

$$f(x) - y = \frac{-2x - 6}{x^2 + 2}$$

لدينا: $(x^2 + 2) > 0$ ومنه الإشارة من $(-2x - 6)$: